1991 г. ноябрь — декабрь *т. 46, вып. 6 (282)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 514

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ РАССЛОЕНИЙ

А. А. Борисенко, А. Л. Ямпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Предлагаемая вниманию читателя обзорная статья содержит сводку результатов по римановой геометрии расслоений.

По своей структуре статья разбита на семь разделов. В первом мы рассматриваем метрику С. Сасаки [93] касательного и нормального расслоения, и, соответственно, сферического касательного и нормального расслоения.

Обобщением расслоений являются римановы субмерсии. Поскольку римановы субмерсии представляют в настоящее время предмет исследования многих геометров, то мы сочли уместным поместить во втором разделе обзор работ Б. О' Нейла и А. Грея [57, 84]. Тем самым будет заполнен существенный пробел в геометрической литературе по этой тематике на русском языке.

В третьем разделе мы поместили обзор результатов, в которых ставится и в определенном смысле решается первый и естественный вопрос римановой геометрии расслоений: какова связь геометрических характеристик расслоения с аналогичными характеристиками слоев и базы.

Четвертый раздел полностью посвящен обзору результатов по изучению геодезических касательного и нормального расслоений, а также вполне геодезических подмногообразий в них. Наиболее законченные результаты в этом направлении получены С. Сасаки [95] и К. Сато [96].

В пятом разделе собраны результаты по геометрии подмногообразий (поверхностей) в касательном расслоении риманова многообразия с метрикой Сасаки.

Кроме самостоятельного геометрического интереса, метрика Сасаки имеет важные приложения. В шестом разделе изложены некоторые примеры таких приложений. В частности, мы излагаем доказательство теоремы о строении параболической поверхности в римановом пространстве, принадлежащее А. А. Борисенко.

Последний седьмой раздел содержит формулировки ряда нерешенных вопросов и задач, связанных с изучением римановой геометрии расслоений. Авторы надеются, что сформулированные утверждения окажутся интересными и для других геометров.

Не затронутые в обзоре темы отражены в недавно вышедшей монографии: Cordero L., Dodson C. T. J., de Leon M. «Differential Geometry of Frame Bundles».— Kluwer Acad. Press, 1989. Содержание нашего обзора не пересекается с содержанием этой монографии.

Примечания.

1. На протяжении всей статьи, если не оговорено противное: а) римановы многообразия предполагаются имеющими размерность n; б) малые индексы изменяются от 1 до n; в) индексы I, $\mathcal{J}$, K, H изменяются от 1 до $2n$.

2. При цитировании, символом «*» помечены работы по римановой геометрии, список которых вынесен отдельно.

1. Римановы и псевдоримановы метрики на расслоениях

Пусть заданы два топологических пространства E и B и непрерывное отображение $\pi\colon E \to B$. Говорят, что отображение задает *локально тривиальное расслоение*, если найдется такое пространство F, что для любой точки $x \in B$ существует ее окрестность $U \ni x$, для которой прообраз $\pi^{-1}(U)$ гомеоморфен прямому произведению $U \times F$.

Пространство E называется (*тотальным*) *пространством расслоения* или *расслоенным пространством*, пространство B — *базой расслоения*, а пространство F — *слоем расслоения*, отображение π — *проекцией*.

Окрестность U, фигурирующая в определении, называется иногда *тривиализующей окрестностью*.

Пусть теперь M — гладкое n-мерное многообразие, $(U_\alpha, \{x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha\}$ — атлас, x_0 — фиксированная точка. *Касательным вектором* ξ *к многообразию* M *в точке* x_0 называется набор чисел $\{\xi^1_\alpha, \ldots, \xi^n_\alpha\}$, удовлетворяющий на пересечении окрестностей U_α и U_β соотношению

$$\xi^k_\alpha = \xi^j_\beta \frac{\partial x^k_\alpha}{\partial x^j_\beta}(x_0).$$

Множество всех касательных векторов в точке $x \in M$ называется *касательным пространством* T_xM. Дизъюнктивное объединение всех касательных пространств $\bigcup\limits_{x \in M} T_xM$ обозначаем через TM.

Множество TM наделяется топологией. А именно *окрестностью точки* $(x_0, \xi_0) \in TM$ называется множество таких касательных векторов η в точках $x \in M$, что $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} (\xi^k_\alpha - \eta^k_\alpha)^2 < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и некоторой карты U_α.

Пусть π: $TM \to M$ — отображение, сопоставляющее каждому касательному пространству T_xM точку касания. Это отображение задает расслоение с базой M, слоем, изоморфным E^n, тотальным пространством TM, которое называется *касательным расслоением многообразия* M.

Локальные координаты на TM можно определить следующим образом. Пусть U — координатная окрестность M и $(x^1, \ldots, x^n)$ — координатные функции. Тогда каждый касательный вектор к M в точке $x_0 \in M$ может быть задан $2n$ переменными (x_0^i, ξ_0^i), где $\{x_0^i\}$ — координаты точки x_0, $\{\xi_0^i\}$ — координаты вектора ξ в базисе $(\partial/\partial x^i)|_{x_0}$. Эти координаты называются *естественными индуцированными координатами* касательного расслоения.

Пусть $(U, \{x^i\})$, $(U', \{x'^i\})$ — две координатные (тривиализующие) окрестности, такие, что $U \cap U' \neq \varnothing$. Тогда пересечение окрестностей $(U \times E^n) \cap \cap (U' \cap E^n)$ также не пусто, и координатному преобразованию $x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n)$ на $U \cap U'$ соответствует координатное преобразование

$$x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n),$$
$$\xi'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\xi^k$$

на $(U \times E^n) \cap (U' \cap E^n)$.

Аналогичным образом определяется нормальное расслоение подмногообразия и естественные индуцированные координаты на нем.

Естественный базис касательного к TM пространства составляют векторы $\{\partial/\partial x^i;\ \partial/\partial \xi^i\}$.

Касательное к TM пространство разбивается на два подпространства, одно из которых касательно слою, а другое трансверсально слою. Первое называется *вертикальным подпространством* $\mathscr{V}TM$, а второе — *горизонтальным подпространством* $\mathscr{H}TM$.

Таким образом, в каждой точке $\tilde{Q} = (Q, \xi) \in TM$

$$T_{\tilde{Q}}TM = \mathscr{H}_{\tilde{Q}}TM \oplus \mathscr{V}_{\tilde{Q}}TM.$$

Обзор римановых метрик на касательном расслоении риманова многообразия мы начнем с метрики, которую определил на TM Сасаки [93]. А именно пусть (M, g) — риманово многообразие с метрикой g. Если (x^i) — локальные координаты на M, то линейный элемент ds метрики g записывается в виде $ds^2 = g_{ik}dx^idx^k$. Введем на TM естественные индуцированные координаты (x^i, ξ^i) и рассмотрим две близкие точки TM с координатами (x^i, ξ^i) и $(x^i + dx^i,\ \xi^i + d\xi^i)$.

Перенесем касательный вектор $(\xi^i + d\xi^i)$ параллельно в смысле Леви-Чивита из точки $(x^i + dx^i)$ в точку (x^i) вдоль естественной геодезической, соединяющей эти точки. Пусть $d\theta$ означает угол между результатом параллельного переноса и вектором (ξ^i). Тогда квадрат дифференциала расстояния $d\sigma^2$ между точками (x^i, ξ^i) и $(x^i + dx^i, \xi^i + d\xi^i)$ определим так: $d\sigma^2 = ds^2 + |\xi|^2 d\theta^2$. В локальных координатах (x^i, ξ^i) для линейного элемента TM получим следующее выражение:

$$d\sigma^2 = g_{ik}dx^idx^k + g_{ik}D\xi^iD\xi^k,$$

где $D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{jk}\xi^i dx^k$ — ковариантные дифференциалы координат касательного вектора.

Обозначим через Tg_{IJ} компоненты метрики Сасаки TM. Тогда $d\sigma^2 = Tg_{ij}dx^idx^j + 2Tg_{i\,n+j}dx^id\xi^j + Tg_{n+i\,n+j}d\xi^id\xi^j$. Отсюда найдем выражение

$Tg_{I\mathcal{J}}$ в локальных координатах $(x^i,\ \xi^i)$:

$$Tg_{ij} = g_{ij} + g_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu i}\Gamma^{\beta}_{\nu j}\xi^{\mu}\xi^{\nu},$$
$$Tg_{i\,n+j} = \Gamma_{i\lambda,j}\xi^{\lambda},\quad Tg_{n+i\,n+j} = g_{ij}.$$

Контрвариантные компоненты метрики Сасаки имеют вид [93]

$$Tg^{ij} = g^{ij},\quad Tg^{i\,n+j} = -\Gamma^{j}_{\mu s}g^{is}\xi^{\mu},$$
$$Tg^{n+i\,n+j} = g^{ij} + g^{\alpha\beta}\Gamma^{i}_{\mu\alpha}\Gamma^{j}_{\nu\beta}\xi^{\mu}\xi^{\nu}.$$

Другой подход к определению этой метрики предложил П. Домбровский [50]. А именно если $g_{ij}\,dx^idx^j$ — метрическая форма M, то скалярное произведение векторов X и Y на M, имеющих координаты в естественном базисе $(\partial/\partial x^i)$ соответственно $\{X^1, \ldots, X^n\}$ и $\{Y^1, \ldots, Y^n\}$, вычисляется по формуле $\langle X,\ Y\rangle = g_{ij}X^iY^j$.

Рассмотрим с этой точки зрения скалярное произведение «$\tilde{X},\ \tilde{Y}$» двух векторов $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$, касательных к TM и имеющих в естественном базисе $(\partial/\partial x^i,\ \partial/\partial\xi^i)$ координаты

$$\{\tilde{X}^1, \ldots, \tilde{X}^n;\ \tilde{X}^{n+1}, \ldots, \tilde{X}^{2n}\},$$
$$\{\tilde{Y}^1, \ldots, \tilde{Y}^n;\ \tilde{Y}^{n+1}, \ldots, \tilde{Y}^{2n}\}\ \text{соответственно.}$$

Тогда

$$«\tilde{X},\ \tilde{Y}» = g_{ij}\tilde{X}^i\tilde{Y}^j + g_{ij}\,(\tilde{X}^{n+i} + \Gamma^{i}_{\lambda k}\xi^{\lambda}\tilde{X}^k)\,(\tilde{Y}^{n+j} + \Gamma^{j}_{\mu s}\xi^{\mu}\tilde{Y}^s).$$

Определим отображения

$$\begin{cases} K\colon TTM \to TM, \\ \pi_*\colon TTM \to TM \end{cases}$$

формулами

$$K\tilde{X} = (\tilde{X}^{n+i} + \Gamma^{i}_{\lambda k}\xi^{\lambda}\tilde{X}^k)\,\partial/\partial x^i,$$
$$\pi_*\tilde{X} = \tilde{X}^i\partial/\partial x^i.$$

Отображение K Домбровский назвал *отображением связности*, в то время как π_* есть дифференциал проекции $\pi\colon TM \to M$. Таким образом, формула для вычисления скалярного произведения векторов $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ в метрике Сасаки преобразуется к виду

$$«\tilde{X},\ \tilde{Y}» = \langle\pi_*\tilde{X},\ \pi_*\tilde{Y}\rangle + \langle K\tilde{X},\ K\tilde{Y}\rangle.$$

При этом вертикальное подпространство $\mathcal{V}TM = \operatorname{Ker}\pi_*$, а горизонтальное $\mathcal{H}TM = \operatorname{Ker}K$ и, очевидно, эти подпространства в метрике Сасаки ортогональны (см. [93], [50], 1*).

Заметим, что формулой «$\tilde{X},\ \tilde{Y}$» $= \langle\pi_*,\ \tilde{X},\ K\tilde{Y}\rangle + \langle K\tilde{X},\ \pi_*\tilde{Y}\rangle$ так же определяется (псевдо-) риманова метрика. Это — так называемая *метрика Вильмса* [101].

Используя определения π_* и K, можно ввести понятие горизонтального и вертикального лифтов на TM данного векторного поля Z на M. А именно (см. [50]) векторные поля Z^H и Z^V на TM называются соответственно *горизонтальным и вертикальным лифтом* поля Z, если

$$\pi_*Z^H_{(Q,\xi)} = Z_Q,\quad KZ^H_{(Q,\xi)} = 0,$$
$$\pi_*Z^V_{(Q,\xi)} = 0,\quad KZ^V_{(Q,\xi)} = Z_Q$$

в каждой точке $(Q,\ \xi) \in TM$.

В локальных координатах определение лифтов выглядит так. Если $Z = \{Z^1, \ldots, Z^n\}$ — вектор T_QM, то его горизонтальный Z^H и вертикальный Z^V лифты в точку (Q, ξ) имеют координаты

$$Z^H = \{Z^1, \ldots, Z^n; \ -\Gamma^1_{jk}Z^j\xi^k, \ \ldots, \ -\Gamma^n_{jk}Z^j\xi^k\},$$
$$Z^V = \{0, \ldots, 0; \ Z^1, \ldots, Z^n\}.$$

Отметим попутно технически важную лемму о скобках лифтов векторных полей.

Лемма 1.1 [50]. *В каждой точке* $(Q, \xi) \in TM$

$$[X^V, Y^V] = 0,$$
$$[X^H, Y^V] = (\nabla_X Y)^V,$$
$$\pi_* [X^H, Y^H] = [X, Y],$$
$$K [X^H, Y^H] = -R(X, Y)\xi,$$

где ∇, *вообще говоря,— произвольная аффинная связность на* M *и* $R(X, Y)\xi$ — *ее тензор кривизны.*

Аналог для расслоения реперов доказан в [47].

Лемма 1.2 [93]. *Символы Кристоффеля первого рода связности Ливи-Чивита метрики Сасаки имеют вид*

$$\widetilde{\Gamma}_{n+j\, n+k, H} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}_{n+j\, k, h} = \frac{1}{2}(R_{j\lambda kh} + 2g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda h}\Gamma^\beta_{jk})\xi^\lambda, \quad \Gamma_{n+j\, k, n+h} = \Gamma_{j,kh},$$

$$\widetilde{\Gamma}_{jk,h} = \Gamma_{jk,h} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda j}\Gamma^\beta_{\mu h}) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda h}\Gamma^\beta_{\mu k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^h}(g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda j}\Gamma^\beta_{\mu k})\right]\xi^\mu\xi^\lambda,$$

$$\widetilde{\Gamma}_{jk, n+h} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Gamma_{\lambda j, h}}{\partial x^k} + \frac{\partial\Gamma_{\lambda k, h}}{\partial x^j} - g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{hj}\Gamma^\beta_{\lambda k} - g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda j}\Gamma^\beta_{hk}\right]\xi^\lambda.$$

Лемма 1.3 [93]. *Символы Кристоффеля второго рода связности Леви-Чивита метрики Сасаки имеют вид*

$$\widetilde{\Gamma}^I_{n+j\, n+k} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}^i_{n+j\, k} = \frac{1}{2}R^i_{k\,\lambda j}\xi^\lambda,$$

$$\widetilde{\Gamma}^{n+i}_{n+j\, k} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{2}\Gamma^i_{\mu h}R^h_{k\lambda j}\xi^\mu\xi^\lambda,$$

$$\widetilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}[R^i_{k\mu h}\Gamma^h_{\lambda j} + R^i_{j\mu h}\Gamma^h_{\lambda k}]\xi^\lambda\xi^\mu,$$

$$\widetilde{\Gamma}^{n+i}_{jk} = \frac{1}{2}\left[R^i_{jk\lambda} + R^i_{kj\lambda} + 2\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^\lambda}\right]\xi^\lambda + \frac{1}{2}\Gamma^i_{\nu h}[R^h_{ks\mu}\Gamma^s_{\lambda j} + R^h_{js\mu}\Gamma^s_{\lambda k}]\xi^\lambda\xi^\mu\xi^\nu.$$

Используя эти леммы, можно найти ковариантные производные комбинаций лифтов векторных полей.

Лемма 1.4 [65].

$$\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^V = 0, \quad \widetilde{\nabla}_{X^H}Y^V = (\nabla_X Y)^V + \frac{1}{2}\left[R(\xi, Y)X\right]^H,$$

$$\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^H = \frac{1}{2}[R(\xi, X)Y]^H, \quad \widetilde{\nabla}_{X^H}Y^H = (\nabla_X Y)^H - \frac{1}{2}[R(X, Y)\xi]^V.$$

Аналог этой леммы для расслоения реперов дан в [47].

Здесь уместно также заметить, что конструкция метрики Сасаки не требует того, чтобы связность была римановой, и, следовательно, эта конструкция применима к любым векторным расслоениям со связностью над римановым многообразием.

Рассмотрим с этой точки зрения нормальное расслоение поверхности F^l в римановом пространстве M^{l+p}. В каждой точке $Q \in F^l$ имеет место разложение касательного к M^{l+p} пространства $T_Q M^{l+p}$ в прямую сумму двух подпространств $T_Q F^l$ и $N_Q F^l$, первое из которых касательно к F^l, а второе ортогонально к $T_Q F^l$ в метрике пространства M^{l+p}.

Пространством нормального расслоения называется дизъюнктивное объединение $N_Q F^l$ по всем $Q \in F^l$. Если $Q \in F^l$, а ξ — нормаль к F^l в точке Q, то пара $\widetilde{Q} = (Q, \xi)$ есть точка нормального расслоения NF^l. Обозначим через $(x^1, \ldots, x^l)$ локальные координаты F^l, а через $(\xi^1, \ldots, \xi^p)$ координаты нормали ξ в некотором базисе нормалей $n_{1|}, \ldots, n_{p|}$, который в дальнейшем будем считать ортонормированным. Тогда набор координат $(x^1, \ldots, x^l; \xi^1, \ldots, \xi^p)$ задает локальные координаты на NF^l, которые называются по аналогии с касательным расслоением *естественными индуцированными координатами.*

Пусть $\bar{g}$ и $\overline{\nabla}$ — метрика и ковариантная производная на M^{l+p}, а g — индуцированная на F^l метрика. Если X — касательное к F^l, а ξ — нормальное к F^l векторные поля, то *ковариантной производной в нормальной связности* $\nabla_X^\perp \xi$ векторного поля ξ по направлению векторного поля X называется проекция векторного поля $\overline{\nabla}_X \xi$ на нормальное подпространство к F^l.

В локальных координатах

$$\nabla_i^\perp n_{\alpha|} = \mu_{\alpha|i}^{\tau} n_{\tau|} \quad (i = 1, \ldots, l; \ \alpha = 1, \ldots, p),$$

где $\mu_{\alpha|i}^{\tau}$ $(= \mu_{\tau\alpha|i})$ — коэффициенты кручения. Поэтому для векторных полей

$$\nabla_X^\perp \xi = X^i \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} + \mu_{\tau|i}^{\alpha} \xi^\tau \right) n_{\alpha|}.$$

Ковариантным дифференциалом $D^\perp$ нормального векторного поля ξ называется нормальная ковариантная производная поля ξ по направлению векторного поля $dX = \{dx^1, \ldots, dx^l\}$

$$D^\perp \xi = (d\xi^\alpha + \mu_{\tau|i}^{\alpha} \xi^\tau dx^i)\, n_{\alpha|}.$$

Определим в естественных индуцированных координатах (x^i, ξ^α) линейный элемент $d\sigma$ метрики Сасаки NF^l равенством [5]

$$d\sigma^2 = g_{ij} dx^i dx^j + \delta_{\alpha\beta} D^\perp \xi^\alpha D^\perp \xi^\beta,$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронеккера (соответствующий послойной евклидовой метрике).

Для компонент метрики Сасаки Ng нормального расслоения получаем следующее выражение [31]:

$$Ng_{ij} = g_{ij} + \delta_{\alpha\beta} \mu_{\tau|i}^{\alpha} \mu_{\sigma|j}^{\beta} \xi^\tau \xi^\sigma,$$
$$Ng_{i\, l+\beta} = \mu_{\beta\tau|i} \xi^\tau,$$
$$Ng_{l+\alpha\, l+\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Контравариантные компоненты имеют вид

$$Ng^{ij} = g^{ij}, \quad Ng^{i\, l+\beta} = -\mu_{\tau|s}^{\beta} g^{si} \xi^\tau,$$
$$Ng^{l+\alpha\, l+\beta} = \delta^{\alpha\beta} + g^{ts} \mu_{\tau|t}^{\alpha} \mu_{\sigma|s}^{\beta} \xi^\tau \xi^\sigma.$$

Естественным образом определяются для NF^l отображение π_* и отображение связности K (см. [89]). Если $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ касаются NF^l в точке $\widetilde{Q} = (Q, \xi)$ и в естественном базисе $(\partial/\partial x^i; \partial/\partial \xi^\alpha)$ векторы $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ имеют координаты $\{\widetilde{X}^i;$

$\tilde{X}^{l+\alpha}\}$, $\{\tilde{Y}^i;\ \tilde{Y}^{l+\alpha}\}$, то, обозначив через « » скалярные произведения векторов в метрике Сасаки, а через $\langle\ ,\ \rangle$ и $\langle\ ,\ \rangle_\perp$ — скалярные произведения векторов в метрике g и послойной (евклидовой) метрике соответственно, найдем

$$\langle\!\langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle\!\rangle = g_{ij}\tilde{X}^i\tilde{Y}^j + \delta_{\alpha\beta}(\tilde{X}^{l+\alpha} + \mu^\alpha_{\tau|i}\tilde{X}^i\xi^\tau)(\tilde{Y}^{l+\beta} + \mu^\beta_{\sigma|j}\tilde{Y}^j\xi^\sigma) = \\ = \langle \pi_*\tilde{X}, \pi_*\tilde{Y}\rangle + \langle K\tilde{X}, K\tilde{Y}\rangle_\perp,$$

т. е. π_* и K в локальных координатах представляются в виде

$$\pi_*\tilde{X} = \tilde{X}^i\partial/\partial x^i, \quad K\tilde{X} = (\tilde{X}^{l+\alpha} + \mu^\alpha_{\tau|i}\tilde{X}^i\xi^\tau)\,n_{\alpha|},$$

Вертикальное подпространство $\mathscr{V}_{\tilde{Q}}NF^l = \operatorname{Ker}\pi_*$, горизонтальное $\mathscr{H}_{\tilde{Q}}NF^l = \operatorname{Ker}K$.

Естественным образом определяются горизонтальный и вертикальный лифты касательного X и нормального η векторов в TNF^l, в точку (Q, ξ). А именно [89]

$$X^H = \{X^i;\ -\mu^\alpha_{r|k}X^k\xi^\tau\}, \quad \eta^V = \{0;\ \eta^\alpha\}.$$

Аналог леммы Домбровского имеет следующий вид [6, 31].

Лемма 1.5. *В каждой точке* $\tilde{Q} = (Q, \xi) \in NF^l$

$$[\zeta^V, \eta^V]_{\tilde{Q}} = 0, \quad [X^H, \eta^V]_{\tilde{Q}} = (\nabla^\perp_X\eta)^V_Q,$$

$$\pi_*\,[X^H, Y^H]_{\tilde{Q}} = [X, Y]_Q, \quad K\,[X^H, Y^H]_{\tilde{Q}} = -(N\,(X, Y)\,\xi)_Q,$$

где $N\,(X, Y)\,\xi$ *— вектор кривизны нормальной связности.*

Напомним, что

$$N_{\alpha\beta|ij} = \frac{\partial\mu_{\alpha\beta|j}}{\partial x^i} - \frac{\partial\mu_{\alpha\beta|i}}{\partial x^j} + \mu_{\alpha\tau|i}\mu^\tau_{\beta|j} - \mu_{\alpha\tau|j}\mu^\tau_{\beta|i}$$

— тензор кривизны нормальной связности, а $N\,(X, Y)\,\xi = N^\alpha_{\beta|ij}X^iY^j\xi^\beta n_{\alpha|}$. Инвариантным образом

$$N\,(X, Y)\,\xi = \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi - \nabla^\perp_{[X, Y]}\xi.$$

В качестве других технических результатов приведем выражение символов Кристоффеля метрики NF^l и аналог леммы Ковальского о ковариантных производных (см. [6, 31]).

Лемма 1.6. *Символы Кристоффеля первого рода римановой связности метрики Сасаки* NF^l *равны:*

$$\tilde{\Gamma}_{ij,k} = \Gamma_{ij,k} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}(\mu_{\alpha\tau|i}\mu^\alpha_{\sigma|k}) + \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_{\alpha\tau|j}\mu^\alpha_{\sigma|k}) - \frac{\partial}{\partial x^k}(\mu_{\alpha\tau|i}\mu^\alpha_{\sigma|j})\right]\xi^\tau\xi^\sigma,$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij,l+\beta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\mu_{\beta\tau|i}}{\partial x^j} + \frac{\partial\mu_{\beta\tau|j}}{\partial x^i} + \mu_{\beta\alpha|i}\mu^\alpha_{\tau|j} + \mu_{\beta\alpha|j}\mu^\alpha_{\tau|i}\right]\xi^\tau,$$

$$\tilde{\Gamma}_{l+\beta\,i,j} = \frac{1}{2}\,[N_{\beta\tau|ij} + 2\mu_{\alpha\beta|i}\mu^\alpha_{\tau|j}]\,\xi^\tau,$$

$$\tilde{\Gamma}_{i\,l+\alpha,\,l+\beta} = \mu_{\beta\alpha|i}, \quad \tilde{\Gamma}_{l+\alpha\,l+\beta,\,i} = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{l+\alpha\,l+\beta,\,l+\tau} = 0.$$

Лемма 1.7. *Символы Кристоффеля второго рода римановой связности метрики Сасаки* F^l *имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{2}\,[\hat{N}^k_{i|\tau\alpha}\mu^\alpha_{\sigma|j} + \hat{N}^k_{j|\tau\alpha}\mu^\alpha_{\sigma|i}]\,\xi^\tau\xi^\sigma,$$

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^{l+\sigma} = \frac{1}{2}\mu_{\tau|t}^{\sigma}(\hat{N}_{i|\alpha\beta}^{t}\mu_{\lambda|j}^{\alpha} + \hat{N}_{j|\alpha\beta}^{t}\mu_{\lambda|i}^{\alpha})\xi^{\tau}\xi^{\beta}\xi^{\lambda} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\mu_{\lambda|i}^{\sigma}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial\mu_{\lambda|j}^{\sigma}}{\partial x^{i}} + \mu_{\alpha|i}^{\sigma}\mu_{\lambda|j}^{\alpha} + \mu_{\alpha|j}^{\sigma}\mu_{\lambda|i}^{\alpha} - 2\Gamma_{ij}^{t}\mu_{\lambda|t}^{\sigma}\right]\xi^{\lambda},$$
$$\widetilde{\Gamma}_{l+\alpha\, j}^{k} = \frac{1}{2}\hat{N}_{j|\lambda\alpha}^{k}\xi^{\lambda},\quad \widetilde{\Gamma}_{l+\alpha\, j}^{l+\sigma} = \mu_{\alpha|j}^{\sigma} + \frac{1}{2}\mu_{\lambda|t}^{\sigma}\hat{N}_{j|\alpha\nu}^{t}\xi^{\lambda}\xi^{\nu},$$
$$\widetilde{\Gamma}_{l+\alpha\, l+\beta}^{k} = 0,\quad \widetilde{\Gamma}_{l+\alpha\, l+\beta}^{l+\sigma} = 0.$$

Л е м м а 1.8. *Если X, Y — касательные, а η и ζ — нормальные векторные поля на $F^l \subset M^{l+p}$, то в каждой точке $\widetilde{Q} = (Q, \xi)$ имеют место равенства*

$$\widetilde{\nabla}_{\eta^V}\xi^V = 0,\quad \widetilde{\nabla}_{X^H}\eta^V = (\nabla_X^{\perp}\eta)^V + \frac{1}{2}[\hat{N}(\zeta, \eta)X]^H,$$
$$\widetilde{\nabla}_{\eta^V}Y^H = \frac{1}{2}[\hat{N}(\xi, \eta)Y]^H,\quad \widetilde{\nabla}_{X^H}Y^H = (\nabla_X Y)^H - \frac{1}{2}[N(X, Y)\xi]^V.$$

В последних двух леммах участвует тензор $\hat{N}$. В локальных координатах $\hat{N}_{j|\alpha\beta}^{i} = g^{is}N_{\alpha\beta|sj}$, а в инвариантной форме $\hat{N}(\xi, \eta)X$ определяется равенством $\langle\hat{N}(\xi, \eta)X, Y\rangle = \langle N(X, Y)\xi, \eta\rangle_{\perp}$. Таким образом, если $N(X, Y)$ — кососимметричное линейное преобразование $N_Q F^l$, то $\hat{N}(\xi, \eta)$ — кососимметричное линейное преобразование $T_Q F^l$.

Заметим попутно, что из уравнения Риччи для погруженных многообразий

$$\langle\bar{R}(X, Y)\xi, \eta\rangle_{\bar{g}} = \langle N(X, Y)\xi, \eta\rangle_{\perp} - \langle[A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$$

следует, что в пространствах постоянной кривизны (в этом случае $\langle\bar{R}(X, Y)\xi, \eta\rangle_{\bar{g}}$ есть 0) $\hat{N}(\xi, \eta)X = [A_\xi, A_\eta]X$, где A_ξ и A_η — матрицы вторых квадратичных форм поверхности F^l относительно нормалей ξ и η соответственно.

Если в каждом слое TM ограничиться векторами фиксированной длины $\rho > 0$, то получим подрасслоение $T_\rho M$, являющееся гиперповерхностью, в TM. Если M компактно, то $T_\rho M$ — компактное подмногообразие в TM. Его вложение задается условием $g_{ik}\xi^i\xi^k = \rho^2$. Нормалью к $T_\rho M$ в точке $(Q, \xi) \in T_\rho M$ будет вектор ξ^V, где лифт понимается в смысле TM.

$T_\rho M$ называется *сферическим касательным расслоением*. При $\rho = 1$ еще говорят о *расслоении единичных векторов*. Кроме $T_\rho M$ в TM можно рассматривать и другие типы поверхностей (см. § 5).

Отображение связности $T_\rho M$ определяется как ограничение отображения связности расслоения TM: $K_\rho = K|_{T_\rho M}$. При этом K_ρ: $T_{(Q,\xi)}$, $T_\rho M \to L_Q^{\perp}(\xi)$, где $L_Q^{\perp}(\xi)$ — ортогональное дополнение ξ в $T_Q M$.

Компоненты метрического тензора $T_\rho M$ можно вычислить, например, так.

Рассмотрим равенство $g_{ik}\xi^i\xi^k = \rho^2$ как уравнение относительно ξ^n. Тогда $T_\rho M$ задается явно и

$$\frac{\partial\xi^n}{\partial x^k} = -\frac{1}{\xi_n}\Gamma_{ik}^{j}\xi^i\xi_j \quad (= A_k),$$
$$\frac{\partial\xi^n}{\partial\xi^p} = -\frac{\xi_p}{\xi_n} \quad (= B_p),$$

где $\xi_i = g_{is}\xi^s$, $p = 1, \ldots, n-1$.

После стандартных вычислений находим

$$(T_\rho g)_{ij} = g_{ij} + \Gamma^s_{i\lambda}\Gamma_{j\mu,s}\xi^\lambda\xi^\mu + \Gamma_{\lambda i,n},\ \xi^\lambda A_j + \Gamma_{\lambda j,n}\xi^\lambda A_i + g_{nn}A_iA_j,$$
$$(T_\rho g)_{i\,n+p} = \Gamma_{\lambda i,p},\ \xi^\lambda + \Gamma_{\lambda i,n},\ \xi^\lambda B_p + g_{np}A_i + g_{nn}A_iB_p,$$
$$(T_\rho g)_{n+p\,n+q} = g_{pq} + g_{np}B_q + g_{nq}B_p + g_{nn}B_pB_q,$$
$$(p, q = 1, \ldots, n-1)$$

Несколько иной вид компонент метрики T_1M (т. е. при $\rho = 1$) получили С. Ямагучи и Н. Кавабата [107].

Зададим T_1M в TM параметрически:

$$x^i = u^i, \quad \xi^i = \xi^i(u^i, t^p).$$

Пусть $\nabla_i\xi$ — ковариантная производная ξ в связности многообразия M по u^i, $\partial_p\xi$ — обычная производная ξ по параметру t^p. Тогда компоненты метрики Сасаки T_1M примут вид

$$(T_1g)_{ij} = g_{ij} + \langle\nabla_i\xi, \nabla_j\xi\rangle,$$
$$(T_1g)_{i\,n+p} = \langle\nabla_i\xi, \partial_p\xi\rangle,$$
$$(T_1g)_{n+p\,n+q} = \langle\partial_p\xi, \partial_q\xi\rangle.$$

Если в каждом слое нормального расслоения NF^l ограничиться векторами фиксированной длины, то получим сферическое нормальное расслоение $N_\rho F^l$.

С геометрической точки зрения интересно изучение геометрии нормального расслоения единичных векторов, т. е. при $\rho = 1$.

Поскольку вдоль F^l базис нормалей можно выбрать ортонормированным, то условие единичности нормального вектора примет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{p} (\xi^\alpha)^2 = 1,$$

а естественное вложение $N_1F^l \subset NF^l$ задается так:

$$y^i = x^i, \quad y^{l+\varphi} = \xi^\varphi,$$
$$y^{l+p} = \xi^p(\xi^1, \ldots, \xi^{p-1}) = \sqrt{1 - \sum_{\theta=1}^{p-1}(\xi^\theta)^2},$$

где (y) — координаты на NF^l, (x^i, ξ^φ) — координаты на N_1F^l, $i = 1, \ldots, l$; $\varphi = 1, \ldots, p-1$. Положим

$$B_\theta = \frac{\partial\xi^p}{\partial\xi^\theta} = -\frac{\xi^\theta}{\xi^p}.$$

В таких координатах справедливы следующие леммы.

Лемма 1.9. *Ковариантные компоненты метрического тензора метрики Сасаки N_1F^l равны*

$$(N_1g)_{ij} = g_{ij} + \mu^\alpha_{\tau|i}\mu_{\alpha\nu|j}\,\xi^\tau\xi^\alpha,$$
$$(N_1g)_{i\,l+\varphi} = (\mu_{\varphi\lambda|i} + \mu_{p\lambda|i}B_\varphi)\,\xi^\lambda,$$
$$(N_1g)_{l+\theta\,l+\varphi} = \delta_{\theta\varphi} + B_\theta B_\varphi$$
$$(\alpha, \tau, \lambda = 1, \ldots, p;\ \varphi, \theta = 1, \ldots, p-1;\ i, j = 1, \ldots, l).$$

Лемма 1.10. *Контравариантные компоненты метрического тензора равны*

$$(N_1 g)^{ij} = g^{ij}, \ (N_1 g)^{i\, l+\varphi} = -g^{is}\mu^{\varphi}_{\lambda|s}\xi^{\lambda},$$
$$(N_1 g)^{l+\theta\, l+\varphi} = \delta^{\theta\varphi} - \xi^{\theta}\xi^{\varphi} + g^{is}\mu^{\theta}_{\tau|i}\mu^{\varphi}_{\lambda\, s}\xi^{\tau}\xi^{\lambda}$$
$$(\alpha, \tau, \lambda = 1, \ldots, p; \ \varphi, \theta = 1, \ldots, p-1; \ i, j = 1, \ldots, l).$$

На расслоении реперов FM и ортонормированных реперов OM аналог метрики Сасаки построил К. П. Мок [73].

Геометрический смысл этой метрики состоит в следующем. Пусть $Q = (x^1, \ldots, x^n)$ — точка на M, $F = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — линейный репер в $T_Q M$. Тогда пара (Q, F) составляет точку расслоения реперов FM. Рассмотрим две близкие точки расслоения реперов: $(Q + dQ, F + dF)$ и (Q, F). Перенесем каждый вектор репера $F + dF$ в точку Q параллельно в смысле Леви-Чивита вдоль геодезической, соединяющей точки Q и $Q + dQ$. Пусть $d\theta^i$ — угол между результатом параллельного переноса вектора $\xi_i + d\xi_i$ и вектором ξ_i, ds — длина геодезического сегмента $(Q, Q + dQ)$. Тогда линейный элемент $d\sigma$ метрики Сасаки FM определяется формулой

$$d\sigma^2 = ds^2 + \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 (d\theta^i)^2.$$

Работа содержит также прямые аналоги лемм 1.2 и 1.3, вычисление тензора кривизны метрики Сасаки FM. Не желая утяжелять индексные обозначения, мы отсылаем читателя к оригинальной статье [73], отметив, что полученные в ней формулы качественно мало отличаются от соответствующих формул для TM.

Возвращаясь к касательному расслоению, укажем локальные выражения для некоторых других типов метрик на TM, связанных с римановой (псевдоримановой) метрикой и связностью M.

Рассмотрим квадратичные формы [105]:

I. $g_{ij}dx^i dx^j$,
II. $2g_{ij}dx^i D\xi^j$,
III. $g_{ij}D\xi^i D\xi^j$.

Тогда метрическая форма метрики Сасаки может быть представлена как сумма I + III. Форма II, рассматриваемая как метрическая форма на TM, определяет так называемую *метрику полного лифта*. Метрику I + III, т. е. метрику Сасаки, иногда называют *метрикой диагонального лифта*. Формы I + II и II + III также определяют (псевдо-) римановы метрики на TM. Их свойства изучались в работах [105, 100]. А. П. Широковым предложена конструкция синектической метрики и синектической связности на TM [25].

И вообще, можно указать процедуру поднятия (лифта) с M на TM любых тензорных полей, а не только метрик. Различают горизонтальные, вертикальные, полные поднятия тензорных полей. Мы, однако, этих вопросов касаться не будем (см. [8, 74] и др.), так как это может быть темой отдельного обзора.

Итак, на касательном расслоении риманова многообразия можно построить различными способами (псевдо-) риманову метрику исходя из (псевдо-) римановой метрики данного риманова многообразия. Таким образом, отображение проекции π: $TM \to M$ становится отображением между двумя (псевдо-) римановыми многообразиями, причем π_* есть сюръекция и сохраняет длины горизонтальных векторов. Возможно, это послужило основой для определения понятия римановой субмерсии, к рассмотрению которой мы переходим.

2. Римановы субмерсии

2.1. Основные уравнения римановой субмерсии. Пусть M и B — римановы многообразия. *Риманова субмерсия* π: $M \to B$ есть отображение M на B, удовлетворяющее следующим аксиомам A1 и A2.

A1. π *имеет максимальный ранг, т. е.* $\mathrm{rg}\, \pi_* = \dim B$, *а следовательно,* $\pi^{-1}(b)$ *для каждого* $b \in B$ *есть гладкое вложение подмногообразия в* M *размерности* $\dim M - \dim B$.

Подмногообразия $\pi^{-1}(b)$ называются *слоями*. Векторные поля на M, касательные к слоям, называются *вертикальными*. Векторные поля на M, ортогональные слоям в метрике M, называются *горизонтальными*.

A2. π_* *сохраняет длины горизонтальных векторов.* M называется *пространством субмерсии*, B — *базой субмерсии*. О'Нейл [84] нашел аналоги уровней Гаусса — Кодацци изометрического погружения для случая римановых субмерсий.

Заметим, что пространство римановой субмерсии является частным случаем многообразия почти произведения, геометрия которого изучалась А. Греем [57]. Его метод аналогичен методу О'Нейла как по идеям, так и по результатам. Мы, однако, считаем риманову субмерсию более естественным объектом для изучения, и дальнейшее изложение следует О'Нейлу [84] (см. также [2 *]).

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ означают проекции касательного к M пространства на пространство горизонтальных и вертикальных векторов соответственно. Буквы U, V, W всегда будут означать вертикальные векторные поля, а X, Y, Z — горизонтальные.

Второй квадратичной формой слоев называется тензорное поле T типа (1, 2) на M, определяемое произвольными векторными полями E и F на M по формуле (ср. [57])

$$T_E F = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}E}(\mathcal{V}F) + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}E}(\mathcal{H}F).$$

где ∇ — ковариантная производная на M.

T обладает следующими свойствами:

1. В каждой точке T_E — кососимметричный линейный оператор на касательном пространстве к M и переводит горизонтальные векторы в вертикальные и наоборот.

2. T вертикален в том смысле, что $T_E = T_{\mathcal{V}E}$.

3. T симметричен на вертикальных векторных полях:

$$T_V W = T_W V.$$

Для определения другого тензора: A, в определении T переставляются проекции $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$:

$$A_E F = \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}E}(\mathcal{H}F) + \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}E}(\mathcal{V}F).$$

A есть тензор (1, 2) и имеет следующие свойства:

1′. В каждой точке $A_E F$ есть кососимметрический линейный оператор на касательном пространстве к M и переводит горизонтальные векторы в вертикальные и наоборот.

2′. A горизонтален в том смысле, что

$$A_E = A_{\mathcal{H}E}.$$

3. Для горизонтальных векторных полей

$$A_X Y = -A_Y X.$$

Тензор A есть тензор интегрируемости горизонтального распределения, так как

$$A_X Y = \frac{1}{2} \mathscr{V}[X, Y].$$

Обозначим через $\overline{\nabla}$ связность, индуцированную на слоях, т. е.

$$\overline{\nabla}_V W = \mathscr{V} \nabla_V W.$$

Следующая лемма дает аналог разложения Гаусса для римановой субмерсии.

Лемма 2.1 [84].

1) $\nabla_V W = T_V W + \overline{\nabla}_V W,$
2) $\nabla_V X = \mathscr{H} \nabla_V X + T_V X$
3) $\nabla_X V = A_X V + \mathscr{V} \nabla_X V,$
4) $\nabla_X Y = \mathscr{H} \nabla_X Y + A_X Y$

(ср. [65, 57]).

Обозначим через $\langle \bar{R}(V_1, V_2) V_3, V_4 \rangle$ тензор кривизны слоя, через $\langle R^* (h_1, h_2) h_3, h_4 \rangle$ — тензор, определяемый равенством

$$\langle R^* (h_1, h_2) h_3, h_4 \rangle = \langle R^* (h_1^*, h_2^*) h_3^*, h_4^* \rangle,$$

где R^* — тензор кривизны B и $h_i^* = \pi_* (h_i)$.

Если $A_X Y$ в локальных координатах выражается как $A_{ij}^s X^i Y^j$, то через $(\nabla_Z A)_X Y$ обозначим выражение $(\nabla_k A_{ij}^s) Z^k X^i Y^j$. Тогда аналоги уравнений Гаусса — Кодацци римановой субмерсии выписываются так (ср. [57]):

$$\langle R(X, Y) Z, H \rangle = \langle R^* (X, Y) Z, H \rangle - 2 \langle A_X Y, A_Z H \rangle + \langle A_Y Z, A_X H \rangle + \langle A_Z X, A_Y H \rangle,$$

$$\langle R(X, Y) Z, V \rangle = \langle (\nabla_Z A)_X Y, V \rangle + \langle A_X Y, T_V Z \rangle - \langle A_Y Z, T_V X \rangle - \langle A_Z X, T_V Y \rangle,$$

$$\langle R(X, Y) V, W \rangle = \langle (\nabla_V A)_X Y, W \rangle - \langle (\nabla_W A)_X Y, V \rangle + \langle A_X V, A_Y W \rangle - \langle A_X W, A_Y V \rangle - \langle T_V X, T_W Y \rangle + \langle T_W X, T_V Y \rangle,$$

$$\langle R(X, V) Y, W \rangle = \langle (\nabla_X T)_V W, Y \rangle + \langle (\nabla_V A)_X Y, W \rangle - \langle T_V X, T_W Y \rangle + \langle A_X V, A_Y W \rangle,$$

$$\langle R(U, V) W, X \rangle = \langle (\nabla_V T)_U W, X \rangle - \langle (\nabla_U T)_V W, X \rangle,$$

$$\langle R(U, V) W, F \rangle = \langle \bar{R}(U, V) W, F \rangle + \langle T_U F, T_V W \rangle - \langle T_U W, T_V F \rangle.$$

При этом ковариантные производные полей A и T описываются следующими равенствами:

$$(\nabla_V A)_W = -A_{T_V W}, \quad (\nabla_X T)_Y = -T_{A_X Y},$$

$$(\nabla_X A)_W = -A_{A_X W}, \quad (\nabla_V T)_Y = -T_{T_V Y}.$$

Из уравнений Гаусса — Кодацци легко получить (ср. [57])

Следствие. *Пусть $\pi: M \to B$ — риманова субмерсия, K, K_* и $\bar{K}$ — секционные кривизны M, B и слоев соответственно.*

Тогда

$$K(V,W)=\bar{K}(V,W)-\frac{\langle T_VV,T_WW\rangle-|T_VW|^2}{|V\wedge W|^2},$$

$$K(X,V)=\frac{1}{|X|^2|V|^2}(\langle(\nabla_XT)_VV,X\rangle+|A_XV|^2-|T_VX|^2),$$

$$K(X,Y)=K_*(X_*Y_*)-\frac{3|A_XY|^2}{|X\wedge Y|^2},\quad X_*=\pi_*(X).$$

Из последней формулы следует, что по горизонтальным площадкам секционная кривизна пространства субмерсии не больше кривизны базы ([57, 12]).

В качестве примеров рассмотрены: а) расслоения Хопфа π: $S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$; б) риманово однородное пространство G/K и π: $G\to G/K$; в) расслоение реперов FB и π: $FB\to B$.

В дополнение к этим приложениям А. Грэй [57] рассматривал расслоения Хопфа $S^{4n+3}\to\mathbb{H}P^n$ и получил выражение для секционной кривизны кватернионного проективного пространства.

В рассмотренных примерах основным моментом было нахождение выражения для тензора A римановой субмерсии, так как $T\equiv 0$ (это римановы субмерсии с вполне геодезическими слоями).

Выпишем тензор A для расслоений Хопфа. Рассмотрим π: $S^{2n+1}\xrightarrow{S^1}\mathbb{C}P^n$ [84]. Пусть N означает единичную внешнюю нормаль к единичной сфере $S^{2n+1}\subset\mathbb{R}^{2n+2}\subset\mathbb{C}^{n+1}$. Пусть $\mathcal{J}$ естественная почти комплексная структура на $\mathbb{C}^{n+1}$. Слои субмерсии π: $S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$ одномерны и являются интегральными кривыми векторного поля $\mathcal{J}N$, которые, в свою очередь, являются большими окружностями S^{2n+1}.

Таким образом, вертикальное подпространство субмерсии π: $S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$ совпадает с $\mathcal{J}N$, горизонтальное — с его ортогональным дополнением.

Если X и Y — горизонтальные векторные поля на S^{2n+1}, то формулы

$$A_XY=\langle X,\mathcal{J}Y\rangle\mathcal{J}N,\quad A_X(\mathcal{J}N)=\mathcal{J}X$$

полностью определяют тензор A.

Из приведенного выше следствия получаем формулу секционной кривизны $\mathbb{C}P^n$:

$$K_*(X_*,Y_*)=1+\frac{3\langle X,\mathcal{J}Y\rangle^2}{|X\wedge Y|^2}.$$

Рассмотрим кватернионное расслоение Хопфа π: $S^{4n+3}\to\mathbb{H}P^n$ [57]. На касательном расслоении к S^{4n+3} определены операторы кватернионнокэлеровой структуры I, $\mathcal{J}$, K: $I^2=K^2=\mathcal{J}^2=-E$, $I\mathcal{J}=K$. Пусть N — единичная нормаль к S^{4n+3} в R^{4n+4}. Тогда

$$A_XY=-\langle IX,Y\rangle IN-\langle\mathcal{J}X,Y\rangle\mathcal{J}N-\langle KX,Y\rangle KN,$$

где X, Y — горизонтальные векторы расслоения Хопфа (т. е. горизонтальные лифты касательных к $\mathbb{H}P^n$ векторов в пространство субмерсии).

Определим оператор Q: $QX=XI\wedge X\mathcal{J}\wedge XK$. Хотя, вообще говоря, XI, $X\mathcal{J}$, XK не являются базовыми, но QX базовое, т. е. существует векторное поле Q_*X_* на $\mathbb{H}P^n$, такое, что $Q_*X_*=\pi_*(QX)$, а $QX=(Q_*X_*)^H$.

Тогда

$$K_*(X_*,Y_*)=1+3(\langle X_*\wedge Q_*X_*,Y_*\wedge Q_*Y_*\rangle^{1/2}-\langle X_*,Y_*\rangle^2|X_*\wedge\wedge Y_*|^{-2}=1+3\sin(\varphi+\theta)\sin(\varphi-\theta)(\sin\varphi)^{-2},$$

где φ и θ определяются из условий

$$\langle X \wedge QX,\ \ Y \wedge QY \rangle = \cos^4 \theta \, |X|^4 \, |Y|^4,$$
$$\langle X, Y \rangle = \cos \varphi \, |X| \, |Y|.$$

Итак, расслоения Хопфа $S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$, $S^{2n+1} \xrightarrow{S^1} \mathbb{C}P^n$, $S^{4n+3} \xrightarrow{S^3} \mathbb{H}P^n$ являются римановыми субмерсиями с вполне геодезическими слоями. Оказывается, что верна и обратная теорема, доказанная Р. Эскобалесом [51].

Теорема 2.1. *Пусть π: $S^m \to B$ — риманова субмерсия со связными вполне геодезическими слоями, размерность слоя которой лежит в пределах от 1 до $m-1$. Тогда π является субмерсией одного из 5 типов*:

a) π: $S^{2n+1} \xrightarrow{S^1} \mathbb{C}P^n$ $(n \geqslant 2)$,

b) π: $S^{4n+3} \xrightarrow{S^3} \mathbb{H}P^n$ $(n \geqslant 2)$,

c) π: $S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$ $(1/2)$.

d) π: $S^7 \xrightarrow{S^3} S^4$ $(1/2)$,

e) π: $S^{15} \xrightarrow{S^7} S^8$ $(1/2)$.

В случаях а) *и* в) *B изометрично комплексному и кватернионному проективному пространству секционной кривизны* $1 \leqslant K_* \leqslant 4$. *В случаях* c), d) *и* e) *B изометрично сфере кривизны* $K_* = 4$.

Напомним, что касательное расслоение риманова многообразия с метрикой Сасаки также есть риманова субмерсия с вполне геодезическими слоями.

В каждой точке $(Q, \xi) \in TM$, тензор A полностью определяется следующими формулами:

$$A_{X^H} Y^H = -\frac{1}{2} [R(X, Y)\xi]^H,$$

$$A_{X^H} Y^V = \frac{1}{2} [R(\xi, Y) X]^H,$$

где R — тензор кривизны многообразия в точке $Q \in M$.

Отсюда, в частности, секционные кривизны TM по горизонтальным, вертикальным и смешанным площадкам в точке (Q, ξ) равны [57]:

а) $K(X^V, Y^V) = 0$,

б) $K(X^V, Y^H) = \frac{1}{4} |R(\xi, X) Y|^2 / |X|^2 |Y|^2$,

в) $K(X^H, Y^H) = K_*(X, Y) - \frac{3}{4} |R(X, Y)\xi|^2 / |X \wedge Y|^2$,

где $X \wedge Y$ — простой бивектор на векторах $X, Y \in T_Q M$.

Л. Бержери и Ж.-П. Буржиньон [38] исследовали связь операторов Лапласа на пространстве римановой субмерсии с операторами Лапласа слоев и базы субмерсии с вполне геодезическими слоями. Точнее, пусть π: $M \to B$ — риманова субмерсия с вполне геодезическими слоями. Пусть $F_m = \pi^{-1}(\pi(m))$ означает слой, проходящий через точку $m \in M$. Обозначим через Δ^M оператор Лапласа на пространстве римановой субмерсии.

Если f: $M \to \mathbb{R}$ — функция класса C^2, то через $f \downarrow F_m$ обозначим сужение f на слой F_m, через Δ^{F_m} — оператор Лапласа слоя, рассматриваемого в метрике, индуцированной из M.

Вертикальным лапласианом Δ_v называется дифференциальный оператор второго порядка, определенный на C^2-функциях на M по формуле

$$(\Delta_v f)(m) = (\Delta^{F_m} (f \downarrow F_m))(m).$$

Горизонтальным лапласианом Δ_h называется дифференциальный оператор

$$\Delta_h = \Delta^M - \Delta_v.$$

Говорят, что операторы A и B *коммутируют*, если $AB - BA$ — нулевой оператор.

Теорема 2.2 [38]. *Если слои римановой субмерсии* π: $M \to B$ *вполне геодезичны, то операторы* Δ^M, Δ_v *и* Δ_h *попарно коммутируют.*

Используя этот факт, Бержери и Буржиньон отмечают, что если M компактно и связно, то спектр оператора Δ_v (так же, как и Δ^M) дискретен, чего нельзя сказать о Δ_h. Однако если кратность каждого собственного значения оператора Δ^M в рассматриваемой ситуации конечна, то для собственных значений оператора Δ_v это, вообще говоря, неверно.

Спектр оператора Δ_v содержит, в общем случае спектр оператора Δ^B базового многообразия, но не совпадает с ним.

Если через $L^2(M)$ обозначить гильбертово пространство (вещественнозначных) L^2-функций на M, то оказывается, что $L^2(M)$ допускает базис, состоящий из общих собственных функций операторов Δ^M и Δ_v.

Связь между собственными значениями операторов Δ^M, Δ_v и Δ_h описывается так. Пусть

$$H(b, \varphi) = \{f \in L^2(M) \mid \Delta_h f = bf,\ \Delta_v f = \varphi f\}.$$

Если $f \in H(b, \varphi)$, то $\Delta^M f = (b + \varphi) f$. Обратное, однако, неверно, т. е. собственные значения оператора Δ^M не являются всевозможными суммами собственных значений операторов Δ_h и Δ_v, если M — не прямое произведение. Среди других результатов этой работы отметим связи типа неравенств, установленные для диаметров пространства субмерсии, слоя и базы. Обозначим через $\operatorname{diam}(F/G)$ диаметр метрического пространства F/G, где F — слой рассматриваемый с метрикой, индуцированной из M, G — группа изометрий слоя. Обозначим через $\operatorname{diam}_h(M)$ горизонтальный диаметр M:

$$\operatorname{diam}_h M = \sup_{p,\, q \in M} \inf \{\text{длина горизонтальной геодезической, соединяющей } p \text{ и } q, \text{ если это возможно}\},$$

где inf берется по всем возможным горизонтальным кривым.

Тогда

$$\operatorname{diam}^2 B + \operatorname{diam}^2 (F/G) \leqslant \operatorname{diam}^2 M,$$

$$\operatorname{diam}^2 M \leqslant \operatorname{diam}^2 B + \operatorname{diam}^2 F,$$

$$\operatorname{diam}^2 M \leqslant \operatorname{diam}_h^2 M + \operatorname{diam}^2 (F/G).$$

Представляется интересным изучение связи геометрии подмногообразия в пространстве римановой субмерсии с геометрией слоев и базы.

Естественным классом подмногообразий в M являются слои. Они являются интегральными подмногообразиями вертикального распределения. Связь секционных кривизн M, F и вторых квадратичных форм слоя в пространстве субмерсии найдена О'Нейлом (см. выше).

Горизонтальное распределение римановой субмерсии, за исключением случая плоской базы, не интегрируемо. Однако это не мешает рассматривать горизонтальные подмногообразия в M, размерность которых меньше размерности базы. Такие подмногообразия рассматривал Рекцигель [90]. Уточним определения и дадим формулировку его результата.

Пусть π: $M \to B$ — псевдориманова субмерсия. Отображение g: $N \to M$ называется *горизонтальным изометрическим погружением*, если касательное пространство к $g(N) \subset M$ горизонтально в каждой точке.

Обозначим через f композицию проекции субмерсии и погружения g: $f = \pi \circ g$.

Основной результат [90] можно сформулировать так.

Теорема 2.3. *Если g: $N \to M$ — горизонтальное изометрическое погружение псевдориманова многообразия N в пространство псевдоримановой субмерсии M, то*:

а) *$f = \pi \circ g$ — изометрическое погружение $N \to B$*;

б) *вторая квадратичная форма h^g погружения g горизонтальна и $\pi_* h^g = h^f$, где h^f — вторая квадратичная форма f: $N \to B$*;

в) *пусть $\perp(g)$ и $\perp(f)$ — нормальные расслоения погружений g и f соответственно. $\nabla^\perp$ — нормальная связность $\perp(g)$ и $\perp(f)$.*

Для любого нормального векторного поля $\eta \in \perp(g)$, $\pi_* \eta$ нормальное векторное поле из $\perp f$. В случае если η горизонтально, то

$$2V\nabla_X^\perp \eta = A\,(g_* X, \eta), \qquad \pi_* \nabla_X^\perp \eta = \nabla_X^\perp \pi_* \eta$$

для любого векторного поля X на N.

(Напомним, что A — тензор интегрируемости горизонтального распределения).

Следствие. *Погружение f: $N \to B$ вполне геодезично, вполне омбилично или псевдоомбилично тогда и только тогда, когда такими же свойствами обладает g: $N \to M$.*

В работе [69] рассмотрены двумерные чебышевские поверхности в пространстве римановой субмерсии. Исследованы два случая расположения такой поверхности: а) если проекция на базу одномерна, а на слой двумерна; б) если проекция на базу и слой одномерны. Один из результатов: если пересечение поверхности со слоем есть линия ее чебышевской сети, то проекция сети на слой есть чебышевская сеть слоя.

Некоторые результаты по геометрии римановых субмерсий, слои которых не являются вполне геодезическими, изложил Икута [61]. Так, например, им предъявлено выражение для тензора кривизны нормальной связности слоя через тензоры интегрируемости горизонтального распределения и вторые квадратичные формы слоев. Доказана

Теорема 2.4. *Пусть π: $M^{n+k}(c) \to B^n(a)$ — риманова субмерсия пространства постоянной кривизны c на пространство постоянной кривизны a. Если*:

а) *$c = a$, то горизонтальное распределение интегрируемо*;

б) *$c \neq a$ и нормальная связность слоя плоская, то n четно.*

Впрочем, утверждение а) является простым следствием из формул О'Нейла, связывающих кривизны базы и пространства субмерсии.

Кроме того, из интегрируемости горизонтального распределения следует, что M есть метрическое произведение базы на слой. С учетом того, что M имеет постоянную кривизну, это означает, что M плоско, т. е. $c = a = 0$.

Представляется интересной постановка задачи для римановых субмерсий, предложенная в работе [80]. Пусть π: $M \to B$ — риманова субмерсия, N — подмногообразие в M. Тогда $\pi\,(N)$ есть подмногообразие в B. Какова связь свойств $N \subset M$ и $\pi\,(N) \subset B$? В [80] показано, что если N — локально симметрическое подмногообразие в M, то при определенных условиях $\pi\,(N)$ будет локально симметричным подмногообразием в B. А именно предполагается, что f: $N \to M$ — изометрическое погружение N в пространство постоянной кривизны M; что π: $M \to B$ и π: $N \to B' \subset B$ являются римановыми субмерсиями с вполне геодезическими слоями, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ \pi\downarrow & & \pi\downarrow \\ B' & \xrightarrow{f'} & B \end{array}$$

коммутативна; что f является диффеоморфизмом на слоях; что $A_E F = 0$ для горизонтального F, касательного к N и E, ортогонального к N. Примером (возможно, единственным в силу множества упомянутых условий) является расслоение Хопфа π: $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, где $N = S^{2m+1}$ $(m < n)$-подмногообразие в $M = S^{2n+1}$ и $\pi(N) = \mathbb{C}P^m$ локально симметрично в $\mathbb{C}P^n$. Более интересные примеры подмногообразий в пространстве субмерсии можно получить, упростив ситуацию, рассматривая касательное расслоение риманова многообразия и поверхности в нем.

2.2. Геодезические в римановых субмерсиях. Уравнение геодезических для касательного расслоения риманова многообразия с метрикой Сасаки, как частного случая римановой субмерсии, были получены в работе [93]. Случай же общей римановой субмерсии подробно рассмотрел О'Нейл [85], на работе которого мы сейчас и остановимся.

Основная цель работы [85] состоит в сравнении геодезических M и B для римановой субмерсии π: $M \to B$ и выяснения связи сопряженности и индекса геодезических M и B. В частности, получены уравнения геодезической в пространстве субмерсии.

Более точно, пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ — операторы горизонтального и вертикального проектирования в касательном пространстве к M, E', E'', ... — ковариантные производные в римановой связности M касательного к M векторного поля E. Пусть $E_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}E$, $E_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}E$. Тогда для любого векторного поля E справедливо разложение $E = E_{\mathcal{H}} + E_{\mathcal{V}}$.

Теорема 2.5. *Пусть* π: $M \to B$ — *субмерсия*, $E = E_{\mathcal{H}} + E_{\mathcal{V}}$ — *векторное поле на кривой* $\gamma(t) \subset M$. *Тогда*

$$\mathcal{H}(E') = E_*' + A_{E_{\mathcal{H}}}(\mathcal{V}\gamma') + A_{\mathcal{H}\gamma'}(E_{\mathcal{V}}) + T_{\mathcal{V}\gamma'}(E_{\mathcal{V}}),$$

$$\mathcal{V}(E') = A_{\mathcal{H}\gamma'}(E_{\mathcal{H}}) + T_{\mathcal{V}\gamma'}(E_{\mathcal{H}}) + \mathcal{V}(E_{\mathcal{V}}'),$$

где γ' — *касательное векторное поле к* $\gamma(t)$, $E_* = \pi_*(E)$ — *проекция векторного поля* E *в касательное векторное поле к базе и одновременно* E_* *рассматривается как горизонтальный лифт поля* $\pi_*(E)$.

Теорема 2.6. *Пусть* γ — *кривая в* M, $X = \mathcal{H}\gamma'$, $U = \mathcal{V}\gamma'$. *Тогда*

$$\mathcal{H}\gamma'' = \gamma_*'' + 2A_X U,$$

$$\mathcal{V}(\gamma'') = T_U X + \mathcal{V}(U'),$$

где γ_*'' — *горизонтальный лифт вектора второй ковариантной производной кривой* $\pi \circ \gamma$ *на базе* B.

Полагая $\mathcal{H}(\gamma'') = 0$ и $\mathcal{V}(\gamma'') = 0$, получаем условие того, что γ — геодезическая на M. В частности, если γ горизонтальна, т. е. $\mathcal{V}\gamma'' = 0$, то $\gamma_* = \pi \circ \gamma$ есть геодезическая на B и обратно, горизонтальный лифт геодезической B в M есть геодезическая M.

Следствие. *Если* π: $M \to B$ — *риманова субмерсия с вполне геодезическими слоями, то уравнение геодезической* γ *на* M *имеет вид*

$$\gamma_*'' = -2A_{\mathcal{H}\gamma'}(\mathcal{V}\gamma'), \qquad \mathcal{V}(\mathcal{V}\gamma')' = 0.$$

Для формулировки других результатов дадим некоторые определения.

Пусть γ — геодезическая риманова многообразия M, соединяющая точки a и b на M. Векторное поле ξ вдоль γ называется *полем Якоби*, если ξ удовлетворяет уравнению Якоби:

$$\xi'' + R(\gamma', \xi)\gamma' = 0.$$

Точки a и b называются *сопряженными вдоль* γ, если существует ненулевое поле Якоби вдоль γ, причем $\xi(a) = \xi(b) = 0$.

Пусть a и b — сопряженные точки на геодезической. Размерность пространства решений уравнения Якоби называется *кратностью* сопряженной точки или *порядком сопряженности*.

Наличие на геодезическом сегменте сопряженных точек свидетельствует о том, что рассматриваемая геодезическая не является единственной кратчайшей, соединяющей две данные точки.

Основной результат работы [85] формулируется так.

Теорема 2.7. *Пусть γ: $[a, b] \to M$ — горизонтальный геодезический сегмент на пространстве римановой субмерсии π: $M \to B$. Если I — индексная форма (Морса) на M, а I_B — индексная форма (Морса) на B, то*

$$I(E, F) = I_B(E_*, F_*) + \int_a^b \langle DE, DF\rangle\, dt,$$

где $DE = \mathcal{V}(E'_{\mathcal{V}}) - T_{E_{\mathcal{V}}}\gamma' + 2A_{\gamma'}E_{\mathcal{H}}$ — производное векторное поле [1]).

В качестве следствия этой теоремы утверждается, что сопряженные точки на γ появляются не ранее, чем сопряженные точки на $\pi \circ \gamma$.

Для приложения полученных результатов рассматривается субмерсия π: $M \to B$, где M компактно и имеет постоянную секционную кривизну 1. Пусть

$$A = \sup_{|X \wedge Y|=1} |A_X Y| \quad (X, Y \in \mathcal{H})$$

— норма тензора интегрируемости горизонтального распределения. (Заметим, что в случае касательного расслоения $A_X Y = R(X, Y)\xi$, где $R(X, Y)$ — оператор кривизны.) Пусть $\beta(s)$ — натурально параметризованная геодезическая в B. Тогда:

1) для каждого целого m точка $\beta(m\pi)$ является сопряженной точкой для $\beta(0)$ порядка $\dim B - 1$;

2) все прочие сопряженные точки $\beta(t)$ для $\beta(0)$ лежат в интервалах $m\pi + d \leqslant t \leqslant (m + 1)\pi - d$, где $d = \pi(1 + 3A^2(\beta))^{-1/2}$;

3) порядок сопряженности на каждом таком интервале равен, по крайней мере, размерности слоя.

Более детальное описание негоризонтальных геодезических дано в работе [79].

3. Связь геометрических характеристик касательного (нормального) расслоения и базы

Одной из важнейших характеристик римановой метрики является ее секционная кривизна. Поэтому изучение связей геометрии касательного (нормального) расслоения и базы начнем с кривизны метрики Сасаки. Описание будем вести как в инвариантной форме, так и в локальных координатах.

---

[1]) Определение индексной формы Морса см.: Кобояси К. и Номидзу Ш. Основы дифференциальной геометрии.— М.: Мир, 1990.— Т. 2.— С. 81.

Обозначим через $R(X, Y)Z$ поле тензора кривизны базы, $\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}$ поле тензора кривизны касательного расслоения.

Лемма 3.1. *В каждой точке $\tilde{Q} = (Q, \xi)$ тензор кривизны $\tilde{R}$ метрики Сасаки TM определяется следующими формулами:*

$$\tilde{R}(X^V, Y^V)Z^V = 0,$$

$$\tilde{R}(X^V, Y^V)Z^H = \left[R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(\xi, X)R(\xi, Y)Z - \frac{1}{4}R(\xi, Y)R(\xi, X)Z\right]^H,$$

$$\tilde{R}(X^H, Y^V)Z^H = \left[\frac{1}{4}R(R(\xi, Y)Z, X)\xi + \frac{1}{2}R(X, Z)Y\right]^V + \left[\frac{1}{2}(\nabla_X R)(\xi, Y)Z\right]^H,$$

$$\tilde{R}(X^H, Y^V)Z^V = -\left[\frac{1}{2}R(Y, Z)X + \frac{1}{4}R(\xi, Y)R(\xi, Z)X\right]^H,$$

$$\tilde{R}(X^H, Y^H)Z^V = \left[R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(R(\xi, Z)Y, X)\xi - \frac{1}{4}R(R(\xi, Z)X, Y)\xi\right]^V,$$

$$\tilde{R}(X^H, Y^H)Z^H = \left[R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(\xi, R(Z, Y)\xi)X + \frac{1}{4}R(\xi, R(X, Z)\xi)Y + \frac{1}{2}R(\xi, R(X, Y)\xi)Z\right]^H + \left[\frac{1}{2}(\nabla_Z R)(X, Y)\xi\right]^V,$$

где X, Y, Z — касательные векторы в точке $Q = \pi(\tilde{Q})$.

Аналог этой леммы для расслоения реперов доказан в [47].

В индуцированных локальных координатах компоненты тензора кривизны в точке (Q, ξ) метрики Сасаки TM выразятся так:

$$\tilde{R}^i_{jkm} = R^i_{jkm} + \frac{1}{4}R^i_{m\lambda\alpha}R^\alpha_{\mu kj}\xi^\lambda\xi^\mu + \frac{1}{4}R^i_{k\lambda\alpha}R^\alpha_{\mu jm}\xi^\lambda\xi^\mu + \frac{1}{2}R^i_{j\lambda\alpha}R^\alpha_{\mu km}\xi^\lambda\xi^\mu,$$

$$\tilde{R}^i_{j\,k\,n+m} = \frac{1}{2}\nabla_k R^i_{j\lambda m}\xi^\lambda,$$

$$\tilde{R}^i_{j\,n+k\,n+m} = R^i_{jkm} + \frac{1}{4}R^i_{\alpha\lambda k}R^\alpha_{j\mu m}\xi^\lambda\xi^\mu - \frac{1}{4}R^i_{\alpha\lambda m}R^\alpha_{j\mu k}\xi^\lambda\xi^\mu,$$

$$\tilde{R}^i_{n+j\,k\,n+m} = \frac{1}{2}R^i_{kjm} - \frac{1}{4}R^i_{\alpha\lambda m}R^\alpha_{k\mu j}\xi^\lambda\xi^\mu,$$

$$\tilde{R}^i_{n+j\,n+k\,n+m} = 0, \quad \tilde{R}^{n+i}_{n+j\,n+k\,n+m} = 0.$$

Аналог этого утверждения для расслоения реперов имеется в [73].

На основании сформулированной леммы легко доказать следующие утверждения.

Теорема 3.2 [65]. *Касательное расслоение TM с метрикой Сасаки локально симметрично тогда и только тогда, когда M плоско.*

Теорема 3.3 [65]. *Касательное расслоение TM с метрикой Сасаки плоско тогда и только тогда, когда M плоско.*

Теорема 3.4 [34]. *Если секционная кривизна TM ограничена, то M плоско, а следовательно, и TM плоско.*

Имеют место и дословные аналоги этих результатов для расслоения реперов [73, 47].

Теорема 3.2 допускает существенное усиление. Для его формулировки введем понятие внутреннего нуль-индекса. *Внутренним нуль-индексом* $\nu(Q)$ точки $Q \in M$ называется размерность максимального линейного подпространства $L_Q \subset T_Q M$, такая, что для $Y \in L_Q$ и любых $X, Z \in T_Q M$ для тензора кривизны M имеет место равенство $R(X, Y) Z = 0$. Если $\nu(Q) \geqslant k$ для всех $Q \in M$, то метрика на M называется *сильно k-параболической*. Ясно, что случай $\nu = n$ соответствует плоской метрике M. Геометрическое строение многообразий с постоянным внутренним нуль-индексом описали Хартман [9*] и Мальтц [10*]. Если ν постоянно, то распределение L голономно и интегральные подмногообразия являются вполне геодезическими в M, локально изометричными евклидову пространству E^{ν}.

Теорема 3.4′ [4]. *Если внутренний нуль-индекс $\tilde{\nu}$ касательного расслоения TM^n с метрикой Сасаки равен k, то k четно и M^n есть метрическое (риманово) произведение риманова многообразия $M^{n-k/2}$ на евклидово пространство $E^{k/2}$, а TM^n есть метрическое (риманово) произведение $TM^{n-k/2}$ на E^k.*

Доказательство основано на построении исходя из условия теоремы $k/2$ параллельных линейно независимых векторных полей на M.

Существенно больше результатов о кривизне метрики Сасаки получено для сферических касательных расслоений.

Первой публикацией на эту тему стала небольшая статья В. Клингенберга и С. Сасаки [64]. Они рассмотрели метрику Сасаки на T_1S^2 и доказали, что ее секционная кривизна постоянна и равна 1/4. Р. Гримальди [58] показала, что среди двумерных многообразий сфера является единственным многообразием, для которого расслоение единичных векторов с метрикой Сасаки является симметрическим пространством. Рассматривая $T\rho\,(M^n, K)$, где (M^n, K) означает многообразие постоянной кривизны K, при $n = 2$, Танно [98] и независимо Надь П. [75] показали, что при $\rho^2 = 1/K$ метрика Сасаки $T\rho\,(M^2, K)$ имеет постоянную секционную кривизну $K/4$. Этот результат является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 3.5 [32]. *Экстремальные значения $\bar{K}_{\max}$ и $\bar{K}_{\min}$ секционной кривизны метрики Сасаки $T_1(M^n, K)$ равны:*

а) *если $n = 2$, то*

$$\bar{K}_{\max} = \begin{cases} K^2/4, & K \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[, \\ K(1 - 3K/4), & K \in]0, 1]; \end{cases}$$

$$\bar{K}_{\min} = \begin{cases} K(1 - 3K/4), & K \in]-\infty; 0] \cup]1, \infty[, \\ K^2/4, & K \in]0, 1]; \end{cases}$$

б) *если $n \geqslant 3$, то*

$$\bar{K}_{\max} = \begin{cases} K + \dfrac{K^2(K-5)^2}{4(K^2 - 4K - 1)}, & K \in]-\infty, (3 - \sqrt{17})/2], \\ 1, & K \in](3 - \sqrt{17})/2, 2/3], \\ K + \dfrac{K^2}{4(2K-1)}, & K \in]2/3, (5 + \sqrt{17})/2], \\ K^2/4, & K \in](5 + \sqrt{17}/2, +\infty[, \end{cases}$$

$$\bar{K}_{\min} = \begin{cases} K(1 - 3K/4), & K \in]-\infty, 0] \cup]4/3, \infty[, \\ 0, & K \in]0, 4/3]. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы основано на тщательном анализе приведенной ниже формулы для секционной кривизны метрики Сасаки $T\rho M$ в случае многообразия постоянной кривизны и при $\rho = 1$.

Лемма 3.1′ [32]. *Пусть $\overline{X}$, $\overline{Y}$ — единичные взаимно ортогональные векторы, касательные к $T\rho M$ в точке $\overline{Q} = (Q, \rho\xi)$ $(|\xi| = 1)$. Секционная кривизна $\overline{K}(\overline{X}, \overline{Y})$ метрики Сасаки $T\rho M$ в двумерном направлении $(\overline{X}, \overline{Y})$ равна*

$$\overline{K}(\overline{X}, \overline{Y}) = \langle R(X_H, Y_H) Y_H, X_H\rangle - (3\rho^2/4) |R(X_H, Y_H)\xi|^2 + \\ + 3\langle R(X_H, Y_H) Y_V, X_V\rangle - \rho^2 \langle R(\xi, X_V) X_H, R(\xi, Y_V) Y_H\rangle + \\ + (\rho^2/4) |R(\xi, Y_V) X_H + R(\xi, X_V) Y_H|^2 + \rho\langle(\nabla_{X_H} R)(X_H, Y_H)\xi, X_V\rangle - \\ - \rho\langle(\nabla_{Y_H} R)(X_H, Y_H)\xi, Y_V\rangle + \frac{1}{\rho^2}(|X_V|^2 |Y_V|^2 - \langle X_V, Y_V\rangle^2).$$

Нетрудно заметить, что в случае постоянства кривизны M секционные кривизны $T\rho(M, K)$ и $T_1(M, K)$ связаны соотношением $\rho^2\overline{K}(\rho, K) = \overline{K}(1, \rho^2 K)$. Поэтому теорема 3.5 тривиально обобщается **на** $T\rho(M, K)$. А именно обозначим кривизну слоя через $\varkappa$. Тогда $\varkappa = 1/\rho^2$ и $\overline{K}(\rho, K) = \varkappa\overline{K}(1, K/\varkappa)$. Следовательно,

$$\overline{K}_{\min}(\rho, K) = \varkappa\overline{K}_{\min}(1, K/\varkappa),$$
$$\overline{K}_{\max}(\rho, K) = \varkappa\overline{K}_{\max}(1, K/\varkappa).$$

Из теоремы 3.5 следует также, что для $T_1(M, K)$ секционная кривизна метрики Сасаки не может быть неположительной, в то время как неотрицательность ее имеет место при $K \in [0, 4/3]$. Естественно возникает вопрос о необходимых и достаточных условиях неотрицательности секционной кривизны T_1M или $T\rho M$ в общем случае. Справедлива

Теорема 3.6 [5]. *Пусть X, Y, U, W, ξ — единичные векторы, касательные к M в точке Q, причем $\langle X, Y\rangle = \langle U, W\rangle = 0$, $\langle U, \xi\rangle = \langle W, \xi\rangle = 0$. Пусть $K(X, Y)$ — секционная кривизна M в направлении элементарной площадки векторов (X, Y). В точке $\overline{Q} = (Q, \xi)$ секционная кривизна $T\rho M$ неотрицательна, если*

$$\frac{\langle(\nabla_X R)(\xi, W) X, Y\rangle^2}{|R(\xi, W) X|^2} + \frac{\langle(\nabla_Y R)(\xi, U) Y, X\rangle^2}{|R(\xi, U) Y|^2} + \\ + (\rho^2/4)[3\langle R(X, Y) W, U\rangle - \rho^2\langle R(\xi, U) X, R(\xi, W) Y\rangle + \\ + (\rho^2/2)\langle R(\xi, U) Y, R(\xi, W) X\rangle]^2 \leqslant K(X, Y) - \frac{3\rho^2}{4}|R(X, Y)\xi|^2$$

при любых X, Y, U, W.

Теорема дает достаточное условие, близкое к необходимому в том смысле, что при $n = 2$ оно становится необходимым. А именно

Теорема 3.7 [29]. *Для того чтобы $T\rho M^2$ имело неотрицательную секционную кривизну, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Delta_1 K \leqslant K^3 (1 - 3(\rho^2/4) K),$$

где K — гауссова кривизна M^2, Δ_1 — первый дифференциальный параметр Бельтрами.

Условиям теоремы 3.6 удовлетворяют также компактные симметрические пространства ранга 1. Действительно, для них $K(X, Y) > 0$ и при $\rho = 0$ условия теоремы выполняются. Следовательно, это условие выполняется и при некотором $\rho > 0$.

Чтобы прояснить геометрический смысл теоремы 3.6, введем следующие обозначения:

$$M = \sup_{\substack{|X\wedge Y|=1\\ |\xi|=1}} |R(X, Y)\xi|, \quad \mu = \inf_{|X\wedge Y|=1} K(X, Y),$$

$$M_\nabla = \sup_{\substack{|X\wedge Y|=1\\ |\xi\wedge W|=1}} \frac{|\langle(\nabla_X R)(\xi, W)X, Y\rangle|}{|R(\xi, W)X|}.$$

Тогда огрубление неравенств теоремы приводит к таким следствиям.

Теорема 3.8 [5]. а) *Если*

$$\rho^2 M \leqslant \frac{4}{3}\left[\sqrt[3]{1+\frac{3}{4}\frac{\mu-2M_\nabla}{M}}-1\right],$$

то $T_\rho M$ имеет неотрицательную кривизну.

б) *Если $0 \leqslant \mu \leqslant 1/6$, $M^2 \leqslant \mu/6$, $M_\nabla^2 \leqslant \mu/6$, то T_1M имеет неотрицательную секционную кривизну.*

Вопрос о необходимом значении ρ для $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$, $\mathbb{C}aP^2$ остается открытым.

Наряду с секционной кривизной, в римановой геометрии рассматриваются кривизны Риччи и скалярная кривизна римановой метрики. *Тензором Риччи R_{ij}* называется свертка тензора кривизны, т. е. $R_{ij} = R^s_{isj}$. *Кривизной Риччи* в направлении единичного касательного вектора X называется скаляр

$$\mathrm{Ric}\,(X) = R_{ij}X^iX^j.$$

Скалярной кривизной метрики в данной точке называется свертка тензора Риччи: $R = g^{is}R_{is}$.

Риманово многообразие называется *эйнштейновым*, если его кривизна Риччи не зависит ни от точки, ни от направления.

Справедлива

Теорема 3.9 [104]. *Если TM с метрикой Сасаки эйнштейново, то M плоско.*

Дословный аналог этого утверждения для FM доказан в [47]. Для сферических касательных расслоений ситуация более интересна. Так, в двумерном случае Р. Гримальди [58] показала эквивалентность следующих трех утверждений:

а) $T\rho M^2$ локально симметрично;

б) $T\rho M^2$ является пространством Эйнштейна;

в) M^2 изометрично евклидовой сфере радиуса ρ.

К. Бузанка [39] исследовал вопрос о собственных векторах оператора Риччи на $T\rho M^2$. Один из результатов состоит в том, что если $\mathrm{Ric}\,(X) = \lambda X$ и X — горизонтальное (вертикальное) векторное поле, причем $\mathrm{supp}\, X = T\rho M^2$, то гауссова кривизна M^2 постоянна, причем $\lambda = K/2\,(2-\rho^2 K)$ (соответственно $\lambda = \rho^2K^2/2$).

В более высоких размерностях имеются результаты для пространств постоянной кривизны.

Теорема 3.10 [30]. а) *Кривизна Риччи $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ метрики Сасаки $T_1(M^n, K)$ лежит в пределах:*

(i) $n = 2$:

$$K^2/2 \leqslant \widetilde{\mathrm{Ric}} \leqslant K\,(2-K)/2 \quad \text{при } 0 < K \leqslant 1,$$

$$K\,(2-K)/2 \leqslant \widetilde{\mathrm{Ric}} \leqslant K^2/2 \quad \text{при } K \leqslant 0,\ K > 1;$$

(ii) $n \geqslant 3$:

$$(n-1)\,K\,(2-K)/2 \leqslant \widetilde{\mathrm{Ric}} \leqslant (2\,(n-1)-K)\,K/2, \quad 1 < K \leqslant n-2,$$

$$(n-1)\,K\,(2-K)/2 \leqslant \widetilde{\mathrm{Ric}} \leqslant (K^2 + 2\,(n-2))/2, \quad K \leqslant 1, \ K > n-2.$$

б) *Скалярная кривизна* $\widetilde{Sc}$ *метрики Сасаки* $T_1\,(M^n, K)$ *равна*

$$\widetilde{Sc} = (n-1)\,(n^2+2n-4-(K-n)^2)/2$$

и, в частности, $\widetilde{Sc} \leqslant (n-1)\,(n^2+2n-4)/2$ *при любом значении* K.

При $K = 1$ скалярная кривизна и кривизна Риччи вычислены также в [107].

Доказательство сформулированной теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 3.2 [30]. *Ненулевые компоненты тензора Риччи* $T_1\,(M^n, K)$ *равны*

$$\tilde{R}_{pp} = K\,(n-1) - K^2/2,$$

$$\tilde{R}_{nn} = K\,(n-1) - (n-1)\,K^2/2,$$

$$\tilde{R}_{n+p\;n+p} = n - 2 + K^2/2, \quad (p = 1, \ldots, n-1).$$

Замечание. Система координат на T_1M выбрана так, что в рассматриваемой точке $(Q, \xi) \in T_1M$, n-я координата соответствует направлению вектора ξ, а в точке Q $g_{ij} = \delta_{ij}, \Gamma^i_{jk} = \Gamma_{jk,\,i} = 0$. (Другое выражение для тензора Риччи T_1S^n см. [107].)

Выражение (инвариантное) тензора Риччи для расслоения реперов получено в [47].

Интересен также тот факт, что T_1M как гиперповерхность в TM имеет постоянную среднюю кривизну [92]. А именно вектор средней кривизны $\overline{H}$ в каждой точке $(Q, \xi) \in T_1M$ имеет вид

$$\overline{H} = -\frac{n-1}{2n-1}\,\xi^V,$$

где ξ^V — вертикальный лифт (в смысле TM) вектора ξ, т. е. единичная нормаль к T_1M в TM в точке $(Q, \xi) \in T_1M$.

Обратимся теперь к аналогичным результатам для нормального расслоения поверхности в римановом пространстве.

Обозначим через $N\,(X, Y)\,\xi$ поле тензора нормальной связности $F^l \subset M^{l+p}$, $\hat{N}\,(\xi, \eta)\,X$ — поле сопряженного тензора. (Напомним, что в пространстве постоянной кривизны $\hat{N}\,(\xi, \eta)\,X = [A_\xi, A_\eta]\,X$, где X, Y — касательные, ξ, η — нормальные векторные поля.) Пусть $\tilde{R}\,(\tilde{X}, \tilde{Y})\,\tilde{Z}$ — поле тензора кривизны нормального расслоения NF^l с метрикой Сасаки, $R\,(X, Y)\,Z$ — поле тензора кривизны F^l.

Лемма 3.3 [6]. *В каждой точке* $\tilde{Q} = (Q, \xi)$ *тензор кривизны* $\tilde{R}$ *метрики Сасаки* NF^l *определяется следующими формулами*:

$$\tilde{R}\,(X^H, Y^H)\,Z^H = [R\,(X, Y)\,Z + \frac{1}{4}\hat{N}\,(\xi, N\,(Z, Y)\,\xi)\,X + \\ + \frac{1}{4}\hat{N}\,(\xi, N\,(X, Z)\,\xi)\,Y + \frac{1}{2}\hat{N}\,(\xi, N\,(X, Y)\,\xi)\,Z]^H + \\ + \left[\frac{1}{2}\,(\nabla^\perp_Z N)\,(X, Y)\,\xi\right]^V,$$

$$\tilde{R}(X^H, Y^H)\zeta^V = \frac{1}{2}[(\nabla_X\hat{N})(\xi,\zeta)Y - (\nabla_Y\hat{N})(\xi,\zeta)X]^H + \\ + \left[N(X,Y)\zeta + \frac{1}{4}N(\hat{N}(\xi,\zeta)Y, X)\xi - \frac{1}{4}N(\hat{N}(\xi,\zeta)X, Y)\xi\right]^V,$$

$$\tilde{R}(X^H, \eta^V)Z^H = \left[\frac{1}{2}(\nabla_X\hat{N})(\xi,\eta)Z\right]^H + \\ + \left[\frac{1}{2}N(X,Z)\eta + \frac{1}{4}N(\hat{N}(\xi,\eta)Z, X)\xi\right]^V,$$

$$\tilde{R}(X^H, \eta_V)\zeta^V = -\left[\frac{1}{2}\hat{N}(\eta,\zeta)X + \frac{1}{4}\hat{N}(\xi,\eta)\hat{N}(\xi,\zeta)X\right]^H,$$

$$\tilde{R}(\varphi^V, \eta^V)Z^H = \left[\hat{N}(\varphi,\eta)Z + \frac{1}{4}\hat{N}(\xi,\varphi)\hat{N}(\xi,\eta)Z - \\ - \frac{1}{4}\hat{N}(\xi,\eta)\hat{N}(\xi,\varphi)Z\right]^H, \quad \tilde{R}(\varphi^V, \eta^V)\zeta^V = 0,$$

где все лифты осуществляются в точку $\tilde{Q} = (Q, \xi)$ $(Q \in F^l$, $\xi, \varphi, \eta, \zeta \in N_QF^l$; $X, Y, Z \in T_QF^l)$.

В специальной системе координат в окрестности точки $Q \in F^l$, а именно такой, что в данной точке $g_{ik} = \delta_{ik}$, $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$, $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ij}^k = 0$, результат последней леммы может быть записан так.

Лемма 3.3′ [6].

$$\tilde{R}_{ijkm} = R_{ijkm} + \sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\frac{1}{4}N_{\mu\alpha\,|\,im}N_{\alpha\nu\,|\,kj} + \frac{1}{4}N_{\mu\alpha\,|\,ik}N_{\alpha\nu\,|\,jm} + \\ + \frac{1}{2}N_{\mu\alpha\,|\,ij}N_{\alpha\nu\,|\,km}\Big)\xi^\mu\xi^\nu,$$

$$\tilde{R}_{ijk\,l+\sigma} = \frac{1}{2}\nabla_k N_{\nu\sigma\,|\,ij}\xi^\nu,$$

$$\tilde{R}_{ij\,l+\tau\,l+\sigma} = N_{\tau\sigma\,|\,ij} + \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{l}(N_{\mu\tau\,|\,it}N_{\nu\sigma\,|\,tj} - N_{\mu\sigma\,|\,it}N_{\nu\tau\,|\,tj})\xi^\mu\xi^\nu,$$

$$\tilde{R}_{i\,l+\beta\,k\,l+\sigma} = \frac{1}{2}N_{\beta\sigma\,|\,ik} - \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{l}N_{\mu\sigma\,|\,it}N_{\nu\beta\,|\,tk}\xi^\mu\xi^\nu,$$

$$\tilde{R}_{i\,l+\beta\,l+\tau\,l+\sigma} = 0, \quad \tilde{R}_{l+\alpha\,l+\beta\,l+\tau\,l+\sigma} = 0,$$

здесь $(i, j, k, m = 1, \ldots, l;\ \alpha, \beta, \tau, \sigma = 1, \ldots, p;\ p = n - l)$.

Обозначим через $\tilde{R}$ тензор кривизны метрики Сасаки $N\rho F^l$. Если систему координат в окрестности точки Q выбрать так, что в точке $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$, $\Gamma_{ij,k} = 0$, а единичную нормаль ξ принять за p-й базисный вектор N_QF^l, то в точке $Q = (Q, \rho\xi)$ тензор кривизны метрики Сасаки $N_\rho F^l$ примет следующий вид.

Лемма 3.4 [6].

$$\tilde{R}_{ijkm} = R_{ijkm} + \frac{\rho^2}{4}\sum_{\alpha=1}^{p}[N_{p\alpha\,|\,im}N_{\alpha p\,|\,kj} + N_{p\alpha\,|\,ik}N_{\alpha p\,|\,jm}] + \frac{\rho^2}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}N_{p\alpha\,|\,ij}N_{\alpha p\,|\,km},$$

$$\tilde{R}_{ij\,l+\varkappa} = \frac{\rho}{2}\nabla_k N_{p\varkappa\,|\,ij},$$

$$\tilde{R}_{ij\,l+\theta\,l+\varkappa} = N_{\theta\varkappa\,|\,ij} + \frac{\rho^2}{4}\sum_{t=1}^{l}[N_{p\theta\,|\,it}N_{p\varkappa\,|\,tj} - N_{p\varkappa\,|\,it}N_{p\theta\,|\,jt}],$$

$$\bar{R}_{i\,l+\psi\,k\,l+\varkappa} = \frac{1}{2} N_{\psi\varkappa\,|\,ik} - \frac{\rho^2}{4} \sum_{t=1}^{l} N_{p\varkappa\,|\,it} N_{p\psi\,|\,tk}, \ \bar{R}_{i\,l+\psi\,l+\theta\,l+\varkappa} = 0,$$

$$\bar{R}'_{l+\varphi\,l+\psi\,l+\theta\,l+\varkappa} = \frac{1}{\rho^2}(\delta_{\varphi\theta}\delta_{\psi\varkappa} - \delta_{\varphi\varkappa}\delta_{\psi\theta}),$$

где R_{ijkm} *— тензор кривизны* F^l ($i, j, k, m = 1, \ldots, l$; $\varkappa, \theta, \varphi, \psi = 1, \ldots, p - 1$).

Сформулируем аналоги рассмотренных выше теорем 3.2—3.4.

Теорема 3.11 [6]. а) *Метрика Сасаки* NF^l *плоская тогда и только тогда, когда* F^l *есть подмногообразие с внутренне плоской метрикой, вложенное в* M^{l+p} *с плоской нормальной связностью.*

б) NF^l *локально симметрично тогда и только тогда, когда* F^l *— симметрическое пространство, вложенное в* M^{l+p} *с плоской нормальной связностью.*

Распределение $\tilde{L}$ на NF^l назовем *горизонтальным* (*вертикальным*), если в каждой точке $\tilde{Q} \in NF^l$ подпространство $\tilde{L}_{\tilde{Q}}$ горизонтально (вертикально).

Теорема 3.12 [6]. а) *Если метрика Сасаки* NF^l *вертикально* ν*-сильно параболична, то на* F^l *имеется* ν *параллельных в нормальной связности нормальных векторных полей.*

б) *Пусть* F^l *— поверхность в евклидовом пространстве* E^{l+p}*. Если метрика Сасаки* NF^l *горизонтально* k*-сильно параболична, то* F^l *расслаивается на* k*-мерные внутренне плоские вполне геодезические в* F^l *подмногообразия с плоской нормальной связностью в объемлющем пространстве.*

Секционную кривизну метрики Сасаки $N_\rho F^l$ дает

Лемма 3.5 [6]. *Пусть* $\bar{X} = X^H + \zeta^V$, $\bar{Y} = Y^H + \eta^V$ *— единичные взаимно ортогональные векторы, касательные к* $N_\rho F^l$ *в точке* $\bar{Q} = (Q, \rho\xi)$*. Тогда*

$$\begin{aligned}\bar{K}(\bar{X}, \bar{Y}) = {} & \langle R(X, Y) Y, X\rangle - (3\rho^2/4) \,|\, N(X, Y)\,\xi \,|^2_\perp + \\ & + 3\langle N(X, Y)\,\eta, \zeta\rangle_\perp - \rho^2 \langle \hat{N}(\xi, \zeta) X, \hat{N}(\xi, \eta) Y\rangle + \\ & + \frac{\rho^2}{4} \,|\, \hat{N}(\xi, \eta) X + \hat{N}(\xi, \zeta) Y \,|^2 + \rho \langle (\nabla^\perp_Y N)(X, Y)\,\xi, \zeta\rangle_\perp - \\ & - \rho\langle \nabla_X N\rangle (X, Y)\,\xi, \eta\rangle_\perp + \frac{1}{\rho^2}(|\,\eta\,|^2_\perp \,|\,\zeta\,|^2_\perp - \langle \eta, \zeta\rangle^2_\perp),\end{aligned}$$

где $\langle\cdot, \cdot\rangle$ *и* $\langle\cdot, \cdot\rangle_\perp$ *— скалярные произведения в метрике* F^l *и послойной (евклидовой) метрике соответственно.*

Если кривизна F^l положительна, то при малых ρ кривизна $N_\rho F^l$ может быть положительной. Примером такой поверхности является поверхность Веронезе.

Рассмотрим вложение $E^3 \to E^5$, радиус-вектор которого имеет вид

$$U = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 x_3, \ \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 x_3, \ \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 x_2, \ \frac{1}{2\sqrt{3}}(x_1^2 - x_2^2), \ \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)\right\}.$$

Если $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$, то $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 1$. Таким образом, получается изометрическое погружение $S^2(\sqrt{3}) \to S^4(1)$, при котором точки (x_1, x_2, x_3) и $(-x_1, -x_2, -x_3)$ переходят в одну и ту же точку. То есть мы имеем вложение $\mathbb{R}P^3$ в $S^4(1)$, которое и называется *поверхностью Веронезе* V^2.

Теорема 3.13 [6]. *Секционная кривизна метрики Сасаки* $N_\rho V^2$ *при* $\rho = \sqrt{3}/2$ *постоянна, положительна и равна* $1/12$.

Этот пример дает аналог результата [64], полученный при рассмотрении T_1S^2.

4. Геодезические линии в касательном и нормальном расслоении. Вполне геодезические подмногообразия

4.1. Геодезические метрики Сасаки касательного расслоения. Уравнения геодезических TM были получены Сасаки [93]. Пусть (x^i, y^i) — естественные индуцированные координаты на TM. Тогда $C(t) = (x^i(t), y^i(t))$ есть уравнение кривой в TM. Очевидно, что кривую в TM можно понимать как векторное поле $y(t)$ вдоль кривой $x(t)$ на базовом многообразии. Кривая $C(t)$ называется *горизонтальной* (*вертикальной*), если при каждом значении параметра t вектор dC/dt горизонтален (вертикален).

Если векторное поле $y(t)$ является касательным векторным полем кривой $x(t)$, то кривая $C(t) = (x(t), y(t))$ называется *лифтом* кривой $x(t)$. Лифт кривой всегда есть горизонтальная кривая. Верно и обратное. Таким образом, кривая $C(t)$ на TM горизонтальна тогда и только тогда, когда она является лифтом некоторой кривой на M.

Пусть σ — параметр «длина дуги» кривой $C(\sigma)$ на TM. Кривая $C(\sigma) = (x(\sigma), y(\sigma))$ будет геодезической на TM, если $x(\sigma)$ и $y(\sigma)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям [93]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^i}{d\sigma^2} + \Gamma^i_{jk}\dfrac{dx^j}{d\sigma}\dfrac{dx^k}{d\sigma} = R^i_{j\mu\lambda}\dfrac{dx^j}{d\sigma}y^\lambda\dfrac{Dy^\mu}{d\sigma}, \\ \dfrac{D^2y^i}{d\sigma^2} = 0, \end{cases}$$

где $\dfrac{Dy^i}{d\sigma}$ — ковариантная производная векторного поля вдоль $x(\sigma)$. Обозначим ковариантную производную вдоль $x(\sigma)$ штрихом ($'$). Тогда уравнения геодезической в TM в векторной форме запишутся так:

$$\begin{cases} x'' = R(y', y)\,x', \\ y'' = 0. \end{cases}$$

Заметим, что параметризация $C(\sigma)$ натуральна и поэтому

$$\left\|\frac{dC(\sigma)}{d\sigma}\right\|^2 = |x'(\sigma)|^2 + |y'(\sigma)|^2 = 1.$$

Положим $|y'(\sigma)| = c$. Вдоль $x(\sigma)$ имеем $(c^2)' = 2\langle y', y''\rangle = 0$, т. е. $c = \text{const}$. Поэтому вдоль $x(\sigma)$ $|x'(\sigma)| = \sqrt{1-c^2}$ есть постоянная величина. Если s — параметр «длина дуги» для $x(\sigma)$, то из последнего равенства легко следует, что

$$ds/d\sigma = \sqrt{1-c^2}.$$

Поэтому лифт геодезической M является геодезической TM [93]. Такие геодезические ортогональны слоям и называются *горизонтальными геодезическими*. Таким образом, горизонтальные геодезические TM порождаются параллельными векторными полями вдоль геодезических M. Аналогичная теорема для расслоения реперов доказана в [73].

Теорема 4.1 [93]. *Каждая прямая на слое касательного расслоения TM является геодезической TM. (Это означает, что слои TM вполне геодезичны.)*

Доказательство немедленно следует из уравнений геодезических TM. Ясно, что такие прямые вертикальны и они составляют класс *вертикальных геодезических*. Это же верно и для FM [73].

Другие геодезические называются *геодезическими общего положения*.

Важное свойство геодезических состоит в том, что если геодезическая горизонтальна в одной точке, то она горизонтальна всюду. Иначе говоря, если геодезическая ортогональна одному слою, то она ортогональна всем слоям, которые она пересекает. Это утверждение верно и для римановых субмерсий с вполне геодезическими слоями [85]. Более того, в [108] имеется усиление и обобщение этого результата. А именно рассматривается *риманово многообразие с метрикой типа слоеной* (bundle-like metric). Типичными примерами таких метрик являются, в частности, метрика Сасаки на касательном расслоении риманова многообразия, метрика римановой субмерсии, метрика риманова многообразия, на котором действует группа изометрий, такая, что все орбиты имеют одинаковую размерность. Римановы многообразия с метрикой типа слоеной называются *слоеными*.

Пусть $\gamma(s)$ — геодезические на слоеном римановом многообразии M, параметризованные длиной дуги. Будем говорить, что $\gamma(s)$ имеет постоянный угол с листами, если вдоль геодезической длина проекции вектора $\gamma'(s)$ на касательное пространство к слою постоянна.

Т е о р е м а 4.2 [108]. *Пусть M — слоеное многообразие со слоением E коразмерности q $(= n - p)$ и римановой метрикой $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Предположим, что слои вполне геодезичны.*

(i) *Если метрика $\langle\cdot, \cdot\rangle$ есть метрика типа слоеной относительно E, то любая геодезическая в M имеет постоянный угол с листами.*

(ii) *Если все геодезические в M имеют постоянные углы с листами, тогда $\langle\cdot, \cdot\rangle$ есть метрика типа слоеной относительно E.*

Для многообразий постоянной кривизны оказалось возможным дать исчерпывающее описание всех геодезических на их касательном расслоении. А именно геодезические общего положения разбиваются на 3 класса: (i) класс геодезических общего положения над геодезическими базы; (ii) класс геодезических над кривыми постоянной первой и нулевой второй кривизны; (iii) класс геодезических над кривыми постоянной положительной первой кривизны, ненулевой второй кривизны и нулевой третьей кривизны. В каждом случае явно выписаны векторные поля, определяющие геодезическую того или иного типа на сфере S^n, евклидовом пространстве E^n, гиперболическом пространстве H^n [96].

Такая классификация основана на лемме [93], согласно которой для многообразия постоянной кривизны проекция любой геодезической его касательного расслоения на базу есть пространственная кривая, т. е. такая, у которой кривизна $k_i = 0$ при $i \geqslant 3$.

Заметим, что коль скоро известны кривая и векторные поля вдоль них, задающие геодезические в касательном расслоении пространственной формы, то естественно поставить вопрос о вполне геодезических подмногообразиях в этом расслоении. На сегодняшний день, однако, результатов в этом направлении нет, если не считать некоторых общих, которые состоят в том, что для любого риманова многообразия M в TM вполне геодезическими многообразиями являются: а) слои [93]; б) база, вложенная в TM с помощью нулевого векторного поля [67]; в) образ базы в TM, задаваемый параллельным векторным полем постоянной длины на M [102]. Заметим, что в последнем случае база с необходимостью является метрическим произведением по крайней мере вида $M_1^{n-1} \times E^1$.

На касательном расслоении единичных векторов T_1M уравнение геодезических, параметризованных длиной дуги, имеют вид [94]

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\sigma}\frac{dx^k}{d\sigma} = R^i_{j\mu\lambda}\frac{dx^j}{d\sigma}y^\lambda\frac{Dy^\mu}{d\sigma},$$

$$\frac{D^2y^i}{d\sigma^2} = -c^2y^i,$$

где $c = |y'|$ — постоянная величина.

В инвариантной форме эти уравнения запишутся так:

$$\begin{cases} x'' = R(y', y)x', \\ y'' = -c^2y, \end{cases}$$

где, как и ранее, $(\ ')$ обозначает ковариантную производную векторного поля $y(\sigma)$ вдоль кривой $x(\sigma)$ на базе.

Естественно выделяются три класса геодезических T_1M: вертикального, горизонтального и общего типов. Тривиально проверяется, что всякая горизонтальная геодезическая задается параллельным векторным полем вдоль геодезической M, т. е. «набор» горизонтальных геодезических TM и T_1M в некотором смысле один и тот же. Вертикальные геодезические — это геодезические слоя. Нетрудно видеть, что это есть большая окружность слоя, и тем самым устанавливается, что слои T_1M вполне геодезичны.

Исчерпывающее описание геодезических общего типа в T_1M дал Сасаки [95] для пространств постоянной кривизны (пространственных форм S^n, E^n, H^n). А именно *геодезические общего типа* можно разделить на три класса:

(i) класс геодезических над геодезическими M. Каждая геодезическая этого класса описывается единичным векторным полем, меняющимся геликоидально вдоль геодезической M. Геодезические этого типа могут быть замкнуты;

(ii) класс геодезических над кривыми постоянной кривизны k_1 и нулевой кривизны (кручения) k_2. На S^n это малые окружности, на H^n это эквидистанты, орициклы и правильные окружности в соответствии с $k_1 < 1$, $k_1 = 1$ и $k_1 > 1$. Для T_1S^2 любая геодезическая этого типа задается единичным векторным полем вдоль малой окружности, составляющим с ней постоянный угол [64]. Эти геодезические замкнуты.

(iii) класс геодезических над кривыми постоянной первой кривизны k_1 (> 0), постоянной второй кривизны k_2 ($\neq 0$) и нулевой третьей кривизны $k_3 = 0$.

На T_1S^n при определенных условиях эти геодезические замкнуты. На T_1H^n замкнутых геодезических этого типа нет.

Так же как и для касательного расслоения, для T_1M и, более того, для T_1S^n, T_1H^n вопрос о вполне геодезических подмногообразиях фактически остается открытым.

В определенном смысле можно дать геометрическое описание геодезических на T_1M и в общем случае [79].

4.2. Геодезические метрики Сасаки нормального расслоения. Пусть $C(\sigma) = (x(\sigma), y(\sigma))$ — геодезическая метрики Сасаки NF^l, параметризованная длиной дуги. Здесь $x(\sigma)$ — кривая на F^l (проекция $C(\sigma)$ на базу), а $y(\sigma)$ — нормальное векторное поле на F^l вдоль $x(\sigma)$. Пусть $N_{\alpha\beta|ij}$ — тензор кривизны нормальной связности $F^l \subset M^{l+p}$, $\hat{N}^i_{j|\alpha\beta} = g^{ik}N_{\alpha\beta|kj}$ — сопряженный тензор, $D^\perp$ — ковариантное дифференцирование в нормальной связности.

Уравнения геодезических метрики Сасаки NF^l имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^i}{d\sigma^2} + \Gamma^i_{jk} \dfrac{dx^j}{d\sigma} \dfrac{dx^k}{d\sigma} = \widehat{N}^i_{j\,|\,\alpha\beta} \dfrac{dx^j}{d\sigma}\, y^\beta\, \dfrac{D^\perp y^\alpha}{d\sigma}, \\ \dfrac{(D^\perp)^2 y^\alpha}{d\sigma^2} = 0 \end{cases}$$

$$(i, j = 1, \ldots, l;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, p).$$

Здесь также имеется три естественных типа геодезических:

а) горизонтальные геодезические — параллельные в нормальной связности нормальные векторные поля вдоль геодезических базы;

б) вертикальные геодезические — прямые линии в слоях, т. е. в нормальных к поверхности подпространствах;

в) геодезические общего положения.

Так как слои нормального расслоения евклидовы, то очевидно, что слои вполне геодезичны в NF^l. Ясно также, что база вкладывается в NF^l нулевым сечением как вполне геодезическое подмногообразие. Более того, легко показать, что если y — параллельное в нормальной связности векторное поле на F^l, то $y\ (F^l)$ — образ базы в нормальном расслоении, задаваемый полем y — вполне геодезическое подмногообразие в NF^l. Дальнейших результатов в этом направлении не имеется. Заметим только, что для поверхности F^l в пространстве постоянной кривизны уравнения геодезических можно записать в более простой форме:

$$\begin{cases} x'' = -[A_y, A_{\dot y}]\, x', \\ \ddot y = 0, \end{cases}$$

где $(')$ означает ковариантную производную в связности F^l, $(\dot{})$ — ковариантную производную в нормальной связности, а $[A_y, A_{\dot y}]$ — коммутатор матриц вторых квадратичных форм относительно полей y и $\dot y$.

5. Поверхности в касательном расслоении риманова многообразия

Естественной и, как мы видели, хорошо изученной поверхностью в TM является сферическое касательное расслоение $T\rho M$.

Другим естественным типом поверхности в TM будет такая. Рассмотрим поверхность F^l в римановом пространстве M^{l+p}. Тогда ее касательное расслоение TF^l есть поверхность в римановом пространстве TM^{l+p}, снабженном метрикой Сасаки. Очевидно, что риманову метрику на TF^l можно опредлить двумя способами. С одной стороны, на TF^l можно построить метрику Сасаки, исходя из метрики F^l, а с другой стороны, рассмотреть на TF^l метрику, индуцированную метрикой Сасаки TM^{l+p}. Эти метрики, вообще говоря, не совпадают (неизометричны).

В качестве примера можно рассмотреть цилиндр F^2 в E^3. Метрика Сасаки TF^2 плоская, в то время как метрика, индуцированная из $TE^3 = E^6$ на TF^2, имеет ненулевую кривизну. Эти метрики совпадают тогда и только тогда, когда F^l вполне геодезично в M^{l+p}.

В дальнейшем мы будем рассматривать на TF^l метрику, индуцированную на TF^l метрикой Сасаки TM^{l+p}. Легко установить, что если F^l — цилиндр в евклидовом пространстве E^{l+p} с k-мерной образующей, то TF^l есть цилиндр в $E^{2(l+p)}$ с $2k$-мерной образующей. Это утверждение может быть существенно усилено.

Внешним нуль-индексом $\mu(Q)$ точки Q поверхности F^l в евклидовом пространстве E^{l+p} называется размерность максимального линейного подпространства $L_Q^{\mu} \subset T_Q F^l$, такого, что для любого $Y \in L_Q$ для матрицы A_η второй квадратичной формы $F^l \subset E^{l+p}$ относительно любой нормали η в точке Q имеет место равенство

$$A_\eta Y = 0.$$

Если $\mu(Q) \geqslant k$ для всех $Q \in F^l$, то поверхность называется *сильно k-параболической.*

Цилиндр с k-мерной образующей является сильно k-параболической поверхностью.

Т е о р е м а 5.1 [4]. *Если внешний нуль-индекс $\tilde{\mu}$ поверхности TF^l равен k, то внешний нуль-индекс μ поверхности F^l удовлетворяет неравенству $\mu \geqslant k/2$. При этом:*

а) *если $\mu = k/2$, то F^l есть цилиндр с $k/2$-мерной образующей;*

б) *если $\mu = s \leqslant k$, то F^l есть цилиндр с $(k-s)$-мерной образующей, а TF^l — цилиндр с $2(k-s)$-мерной образующей.*

Имеет место и обратная теорема.

Т е о р е м а 5.2 [4]. *Если внешний нуль-индекс μ поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ равен $k/2$, то внешний нуль-индекс $\tilde{\mu}$ поверхности TF^l удовлетворяет неравенству $k/2 \leqslant \tilde{\mu} \leqslant k$.*

Доказательство этих теорем основано на анализе вторых квадратичных форм TF^l в TM^{l+p}. Нетрудно показать, что если $n_{\beta|}$ — базис нормалей к F^l в точке Q, то базис нормалей к TF^l в TM^{l+p} в точке (Q, ξ) составят векторы

$$\{N_{\beta|} = n_{\beta|}^H,\ N_{l+\beta} = n_{\beta|}^V + (\overline{\nabla}_\xi n_{\beta|})^H\},$$

где $\overline{\nabla}$ — ковариантная производная в M^{l+p}, $\beta = 1, \ldots, p$. Пусть A_{ij}^β — компоненты вторых квадратичных форм F^l относительно ортонормированного базиса $n_{\beta|}$ в точке Q.

Л е м м а 5.1 [4]. *Матрицы $\tilde{A}^\beta$ и $\tilde{A}^{l+\beta}$ вторых квадратичных форм $TF^l \subset TM^{l+p}$ относительно базиса нормалей $\{N_{\beta|}, N_{l+\beta|}\}$ в точке (Q, ξ) имеют вид*

$$\tilde{A}^\beta = \left[\begin{array}{c|c} A_{ij}^\beta - \frac{1}{2}\left(R_{il+\alpha s}^{l+\beta} A_{jt}^\alpha + R_{j\ l+\alpha\ s}^{l+\beta} A_{it}^\alpha\right)\xi^t\xi^s & -\frac{1}{2} R_{ijt}^{l+\beta}\xi^t \\ \hline -\frac{1}{2} R_{jit}^{l+\beta}\xi^t & 0 \end{array}\right],$$

$$\tilde{A}^{l+\beta} = \Lambda_\alpha^\beta \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \nabla_\xi A_{ij}^\alpha + \frac{1}{2}\left(\left(R_{ijm}^{l+a} + R_{jim}^{l+\alpha} + \left(R_{i\ l+\gamma\ s}^k A_{mj}^\gamma + \right.\right.\right. \\ \qquad \left.\left.\left. + R_{j\ l+\gamma\ s}^k A_{mi}^\gamma\right) A_{kt}^\alpha \xi^t\xi^s\right)\xi^m \end{array} & A_{ij}^\alpha + \frac{1}{2} R_{ijs}^k A_{kt}^\alpha \xi^t\xi^s, \\ \hline A_{ji}^\alpha + \frac{1}{2} R_{jis}^k A_{kt}^\alpha \xi^t\xi^s & 0 \end{array}\right],$$

где Λ — матрица Грама подсистемы нормалей $\{N_{l+\beta|}\}$, $i, j, m, s, t, k = 1, \ldots, l$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, p$.

Из этой леммы немедленно следует, что если F^l вполне геодезична в M^{l+p} $(A_{ij}^\beta \equiv 0)$ то TF^l вполне геодезична в TM^{l+p}. Верно и обратное.

Т е о р е м а 5.3 [4]. *TF^l вполне геодезично в TM^{l+p} тогда и только тогда, когда F^l вполне геодезично в M^{l+p}.*

На самом деле эта теорема с одним дополнительным условием верна для всех римановых субмерсий с вполне геодезическими слоями [52]. Для касательного расслоения это условие выполняется автоматически.

Пусть теперь M и N — римановы многообразия. Отображение $f\colon M \to N$ индуцирует отображение $f_*\colon TM \to TN$. Тогда отображение $F\colon TM \to TN$, задаваемое формулой $F(x, \xi) = (f(x), f_*(\xi))$, есть естественное отображение между касательными расслоениями TM и TN как дифференцируемыми многообразиями. Естественно, возникает задача о сравнении свойств f и F.

Отображение $f\colon M \to N$ называется *геодезическим*, если каждая геодезическая M под действием f переходит в геодезическую N.

Отображение $f\colon M \to N$ называется *гармоническим*, если отображение f_*, рассматриваемое как 1-форма на M, имеет нулевую дивергенцию.

Если $\dim M < \dim N$, то в первом случае $f(M)$ есть вполне геодезическое подмногообразие в N, во втором — $f(M)$ есть минимальное подмногообразие в N.

Введем на TM и TN метрику Сасаки.

Теорема 5.4 [91]. *Для того чтобы $F\colon TM \to TN$ было вполне геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы $f\colon M \to N$ было вполне геодезическим.*

Теорема 5.5 [91]. *Если $f\colon M \to N$ — гармоническое отображение и N плоско, то $F\colon TM \to TN$ — гармоническое отображение.*

Пусть D — ковариантный дифференциал в связности Леви-Чивита M, R^N — тензор кривизны N.

Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированный базис на M.

Теорема 5.6 [91]. *Пусть $f\colon M \to N$ — гармоническое отображение. Отображение $F\colon TM \to TN$ касательных расслоений с метриками Сасаки гармонично тогда и только тогда, когда для каждой точки $(Q, \xi) \in TM$ выполняются условия*

$$\begin{cases} R^N(Df_*(\xi, e_i), f_*\xi) f_* e_i = 0, \\ \operatorname{div}(Df_*) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что если $\dim M < \dim N$, то вторая квадратичная форма погружения f есть $Df_*(X, Y)$.

Таким образом, для погружения $f\colon M \to N$ справедливо утверждение: $F\colon TM \to TN$ гармонично тогда и только тогда, когда $f\colon M \to M \to N$ вполне геодезично. Иначе говоря, если $M \subset N$, то TM в TN минимально тогда и только тогда, когда M вполне геодезично в N.

Пусть теперь $f\colon M \to N$ — изометрическое погружение. Рассмотрим $F_1\colon T_1M \to T_1N$ — отображение сферических касательных расслоений с метрикой Сасаки. F_1 есть ограничение на T_1M определенного выше отображения $F\colon TM \to TN$. Справедлива

Теорема 5.7 [92]. *Если $f\colon M \to N$ — изометрическое погружение M в пространство N постоянной кривизны c, то $F_1\colon TM \to TN$ гармоническое тогда и только тогда, когда:*

а) *либо $f(M)$ эйнштейново минимальное подмногообразие в N и $c = 0$;*

б) *либо $f(M)$ — вполне омбилическое подмногообразие в N и $c = \dim M$.*

Попутно в [92] показано, что T_1M в TM является гиперповерхностью постоянной средней кривизны. А именно в каждой точке $(Q, \xi) \in T_1M$ вектор ξ^V есть единичный вектор нормали к T_1M в TM.

Теорема 5.8 [92]. *Вектор средней кривизны H гиперповерхности T_1M в TM равен*

$$H = -\frac{n-1}{2n-1}\xi^V, \quad n = \dim M.$$

Еще одним естественным типом поверхности в TM является образ базы, задаваемый гладким векторным полем на M. В локальных координатах это вложение выглядит так. Пусть $(y^1, \ldots, y^n; \xi^1, \ldots, \xi^n)$ — естественные индуцированные координаты TM. Тогда $y^i = x^i$, $\xi^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n)$ задает естественное вложение M в касательное расслоение. Обозначим через $\xi(M)$ это подмногообразие.

Если TM снабжено метрикой Сасаки, то идуцированная метрика $\tilde{G}$ на $\xi(M)$ имеет компоненты

$$\tilde{G}_{ij} = g_{ij} + g_{st}\nabla_i\xi^t\nabla_j\xi^s,$$

где g_{ij}, ∇_i — метрика и ковариантное дифференцирование на M.

Если рассматриваемое векторное поле $\xi(x)$ единичное, то $\xi(M)$ есть n-мерное подмногообразие в T_1M. *Объемом векторного поля* называется объем этого подмногообразия, вычисленный в метрике Сасаки T_1M. Он может быть выражен по формуле [55]

$$\mathrm{Vol}(\xi(M)) = \int\limits_M \sqrt{\det(E + (\nabla\xi)^t(\nabla\xi)}\, d\,\mathrm{Vol}_M,$$

где ковариантная производная $\nabla\xi$ интерпретируется как матрица линейного преобразования касательного пространства на себя, ${}^t(\nabla\xi)$ — ее транспонированная.

Г. Глюк и В. Циллер [55] показали, что единичным векторным полем минимального объема на S^3 является в точности единичное векторное поле на S^3, касательное к слоям расслоения Хопфа $S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$.

Подмногообразия вида $\xi(M)$ вполне геодезичны в TM, если ξ параллельно на M [102].

Рассматривая векторное поле ξ как отображение $M \to TM$, Исихара [62] рассмотрел вопрос о гармоничности этого отображения и установил, что если M компактно, то ξ гармонично тогда и только тогда, когда ξ ковариантно постоянно, т. е. параллельно. Сопоставляя это утверждение с результатом Вольчака [102], можно сказать, что $\xi(M)$ в TM минимально, если $\xi(M)$ вполне геодезично.

6. О некоторых геометрических приложениях метрики Сасаки

Кроме самостоятельного геометрического интереса, метрика Сасаки касательного и нормального расслоения имеет важные приложения.

А. Вейнстейну (см. [103]) принадлежит доказательство теоремы об объемах многообразий с замкнутыми геодезическими. Многообразие (M, g) называется *C_l-многообразием*, если все геодезические метрики g замкнуты и имеют одинаковую длину l.

Теорема 6.1. *Если (M, g) есть n-мерное C_l-многообразие, то отношение* $\dfrac{\mathrm{Vol}(M, g)}{\mathrm{Vol}(S^n)}\left(\dfrac{2\pi}{l}\right)^n$ *есть целое число (число Вейнстейна).*

Принципиальным моментом в доказательстве этой теоремы является возможность вычислить объем T_1M, когда на T_1M введена метрика Сасаки. А именно верна формула

$$\mathrm{Vol}(T_1M, T_1g) = \mathrm{Vol}(M, g)\cdot\mathrm{Vol}(S^{n-1}).$$

Метрика Сасаки на нормальном расслоении подмногообразия применяется для изучения геометрии самого подмногообразия в римановом пространстве [89].

Рассмотрим, например, сильно параболические поверхности. Пусть $F^l \subset M^{l+p}$ — l-мерная поверхность в $(l+p)$-мерном римановом многообразии. *Внешним нуль-индексом* точки $Q \in F^l$ называется размерность максимального линейного пространства $L_Q \subset T_Q F^l$, такого, что для $Y \in L_Q$ и любых $X \in T_Q F^l$ и $\xi \in N_Q F^l$, $A_\xi (X, Y) = 0$, где A_ξ — матрица оператора второй квадратичной формы относительно нормали ξ.

Если $k = \dim L_Q$ не зависит от точки поверхности, то поверхность называется *сильно k-параболической поверхностью.*

Известно, что сильно k-параболические поверхности в пространствах постоянной кривизны расслаиваются на k-мерные вполне геодезические подмногообразия, вдоль которых нормальное пространство стационарно.

Для k-параболических поверхностей (т. е. при $k \neq \mathrm{const}$) через каждую точку такой поверхности проходит вполне геодезическое подмногообразие объемлющего пространства размерности k, вдоль которого нормаль стационарна [3*, 4*].

Эти утверждения справедливы также для различных классов поверхностей в симметрическом пространстве ранга 1 [5*, 6*].

Теорема о строении сильно параболических поверхностей справедлива и для поверхностей в римановом пространстве M^n, если в точках поверхности риманов тензор R объемлющего пространства удовлетворяет условию $\langle R (X, Y)\xi, Z\rangle = 0$, где $X, Y, Z \in T_Q F^l$, ξ — произвольная нормаль к поверхности [9*].

Мы покажем, как применяется метрика Сасаки нормального расслоения в доказательстве теоремы о строении параболических поверхностей в римановом пространстве.

Для получения содержательного результата кроме k-параболичности поверхности необходимо потребовать, чтобы в точках поверхности тензор кривизны объемлющего пространства удовлетворял условию:

$$\text{(A)} \qquad R (X, Y)\xi = 0$$

для любых $X, Y \in TF^l$, $\xi \in NF^l$. В дальнейшем будем предполагать условие (A) выполненым.

Заметим, что поверхность F^l в римановом пространстве M^n будет k-параболической, если вторая квадратичная форма поверхности относительно каждой нормали после приведения к диагональному виду имеет не менее k нулевых коэффициентов. Другими словами, ранг второй квадратичной формы поверхности $r (Q) = \max\limits_{\xi \in N_Q} r (Q, \xi)$, где N_Q — нормальное пространство в точке Q, $r (Q, \xi)$ — ранг второй квадратичной формы поверхности относительно нормали ξ в точке Q, удовлетворяет в каждой точке неравенству $r (Q) \leqslant l - k$ [3*].

Пусть $r^* (Q, \xi)$ — максимальный ранг для близких к Q точек и близких к ξ нормалей. Будем считать, что поверхности принадлежат классу C^3, а риманово пространство — классу C^4. Нормаль ξ к поверхности $F^l \subset M^n$ называется *стационарной* вдоль подмногообразия $R^k \subset F^l$, если при параллельном переносе в объемлющем пространстве вдоль любого пути R^k она остается нормалью к поверхности F^l. Имеет место

Теорема 6.2. *Пусть F^l есть l-мерная поверхность в римановом пространстве M^n, в окрестности точки $Q_0 \in F^l$ ранг второй квадратичной формы постоянен $r (Q) = r (Q_0) = l - k$, ξ — нормаль в точке Q_0, для которой $r (Q, \xi) = r (Q_0) = l - k$. Если в точках поверхности выполняется условие* (A), *то через точку Q_0 проходит вполне геодезическое k-мерное подмногообразие $R^k (Q_0, \xi)$ объемлющего пространства, которое принадлежит поверхности. Вдоль подмногообразия $R^k (Q_0, \xi)$ нормаль ξ стационарна, $r (Q, \xi) = r (Q_0, \xi)$ для точек $Q \in R^k (Q_0, \xi)$, $r^* (Q, \xi) \geqslant r (Q_0, \xi)$ для гра-*

ничных точек $R^k(Q_0, \xi)$. *Если поверхность полная и*

$$r(Q_0, \xi) = r_0 = \max_{Q \in F^l} r(Q),$$

то $R^k(Q_0, \xi)$ *является полным римановым многообразием.*

Рассмотрим расслоение нормальных векторов поверхности F^l в римановом пространстве M^n и введем на нем метрику.

Условимся, что в дальнейшем изложении индексы пробегают следующие значения: $i, j, k, m, s, t = 1, \ldots, l$; $a, b, c, d = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \tau, \mu, \nu, \sigma, \lambda = 1, \ldots, p = n - l$.

Пусть ξ — нормаль в точке Q, для которой ранг $r(Q, \xi) = r(Q) = l - k$. Тогда он постоянен для нормалей, близких к ξ. Для нормали ξ рассмотрим нулевое подпространство ее второй квадратичной формы. Оно удовлетворяет уравнениям

$$(*) \qquad \sum_\alpha \xi^\alpha A_{ij}^\alpha X^i = 0,$$

где A_{ij}^α — коэффициенты вторых квадратичных форм относительно базисных нормалей $n_{\alpha|}$. Так как ранг системы (*) постоянен, то пространство решений $L^k(Q, \xi)$ регулярно зависит от точки и от нормали. Осуществим горизонтальное поднятие k-мерных $L^k(Q, \xi)$ в точки $\tilde{Q} = (Q, \xi)$ нормального расслоения. Горизонтальное поднятие плоскостей $L^k(Q, \xi)$ в окрестности точки $\tilde{Q}$ есть дифференцируемое распределение $\mathscr{L}^k(\tilde{Q})$.

Доказательство теоремы 6.2 сводится к изучению распределения $\mathscr{L}^k(\tilde{Q})$. Справедлива

Теорема 6.2′. *Дифференцируемое горизонтальное распределение* $\mathscr{L}^k(\tilde{Q})$ *на нормальном расслоении k-параболической поверхности* F^l *в римановом пространстве* M^n *голономно, если в точках поверхности тензор кривизны* M^n *удовлетворяет условию* (A).

Слой $\tilde{R}^k(Q_0)$, *касающийся* $\mathscr{L}^k(\tilde{Q}_0)$, *является вполне геодезическим подмногообразием нормального расслоения с метрикой Сасаки. Если* $\tilde{Q}$ *есть граничная точка* $\tilde{R}^k(\tilde{Q}_0)$, *то* $r^*(Q, \xi) \geqslant r(Q_0, \xi)$. *Если поверхность полная и* $r(Q_0, \xi) = r_0 = \max_{Q \in F^l} r(Q)$, *то* $\tilde{R}^k(\tilde{Q})$ *является полным римановым многообразием.*

Доказательство теорем 6.2 и 6.2′.

а) Докажем голономность введенного нами ранее дифференцируемого распределения $\mathscr{L}^k(\tilde{Q})$ на нормальном расслоении NF^l. Пусть X, Y — регулярные векторные поля на NF^l, такие, что $X(\tilde{Q})$, $Y(\tilde{Q}) \subset \mathscr{L}^k(\tilde{Q})$; $X(\tilde{Q})$, $Y(\tilde{Q}) \subset L^k(\tilde{Q})$. В силу горизонтальности распределения $\mathscr{L}^k(\tilde{Q})$ векторные поля X, Y горизонтальные. Поэтому $X = (\pi_* X)^H$, $Y = (\pi_* Y)^H$. Так как $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial u^i} + X^{l+\alpha} \dfrac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$, то

$$(1) \qquad \pi_* X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Горизонтальное поднятие вектора $a \in T_Q F^l$ с координатами a^i есть вектор

$$(2) \qquad a^H = \{a^1, \ldots, a^l; -\mu_{1\tau|i} \xi^\tau a^i, \ldots, -\mu_{p\tau|i} \xi^\tau a^i\}.$$

Из (1), (2) следует, что

$$(3) \qquad \begin{cases} X = \{X^1(u, \xi), \ldots, X^l(u, \xi); & -\mu_{1\tau|i} \xi^\tau X^i, \ldots, -\mu_{p\tau|i} \xi^\tau X^i\}, \\ Y = \{Y^1(u, \xi), \ldots, Y^l(u, \xi); & -\mu_{1\tau|i} \xi^\tau Y^i, \ldots, -\mu_{p\tau|i} \xi^\tau Y^i\}. \end{cases}$$

Скобка Ли векторных полей X, Y равна

$$[X, Y] = \left(\frac{\partial X^a}{\partial v^b} Y^b - \frac{\partial Y^a}{\partial v^b} X^b\right) \frac{\partial}{\partial v^a}, \tag{4}$$

где $\frac{\partial}{\partial v^i} = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\frac{\partial}{\partial v^{l+\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$. Подставив (3) в (4), получим

$$[X, Y]^i = \frac{\partial X^i}{\partial u^j} Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial u^j} X^j - \mu_{\alpha\tau|j}\left(Y^j \frac{\partial X^i}{\partial \xi^\alpha} - X^j \frac{\partial Y^i}{\partial \xi^\alpha}\right), \tag{5}$$

$$[X, Y]^{l+\beta} = -Y^k \frac{\partial}{\partial u^k}(\mu_{\beta\tau|j}\xi^\tau X^j) + X^k \frac{\partial}{\partial u^k}(\mu_{\beta\tau|j}\xi^\tau Y^j) + (\mu_{\alpha\tau|k}\xi^\tau Y^k)\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}(\mu_{\beta\tau|j}\xi^\tau X^j) - (\mu_{\alpha\tau|k}\xi^\tau X^k)\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}(\mu_{\beta\tau|j}\xi^\tau Y^j). \tag{6}$$

Так как в точке Q_0, $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$, то в точке Q_0 (5), (6) примут вид

$$[X, Y]^i = \frac{\partial X^i}{\partial u^j} Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial u^j} X^j, \tag{7}$$

$$[X, Y]^{l+\beta} = (Y^j X^k - X^j Y^k)\,\xi^\tau \frac{\partial \mu_{\beta\tau|i}}{\partial u^k}. \tag{8}$$

На поверхности F^l локальные координаты выбраны так, что в точке Q_0 подпространство $\mathscr{L}(Q_0, \xi)$ натянуто на первые k базисных векторов и векторы

$$\pi_*(X(\tilde{Q}_0)) = (1, 0, \ldots, 0),\quad \pi_*(Y(\tilde{Q}_0)) = (0, 1, 0, \ldots, 0).$$

Из (2) следует, что $X(\tilde{Q}_0) = \{1, 0, \ldots, 0\}$, $Y(\tilde{Q}_0) = \{0, 1, 0, \ldots, 0\}$. Пусть нормальный вектор ξ совпадает с базисным вектором $n_{1|}$. Тогда $\xi = \{1, 0, \ldots, 0\}$. С учетом конкретизации координат равенство (8) имеет вид

$$[X, Y]^{l+\beta} = \frac{\partial \mu_{\beta 1|2}}{\partial u^1} - \frac{\partial \mu_{\beta 1|1}}{\partial u^2}. \tag{9}$$

Уравнения Риччи для погружения поверхности в риманово пространство M^n в локальных координатах $v^a = v^a(u^1, \ldots, u^l)$ имеют вид

$$\mu_{\tau\sigma|j,k} - \mu_{\tau\sigma|k,j} + \sum_\rho (\mu_{\rho\tau|j}\mu_{\rho\sigma|k} - \mu_{\rho\tau|k}\mu_{\rho\sigma|j}) + g^{lh}(A^\tau_{lj}A^\sigma_{hk} - A^\tau_{lk}A^\sigma_{hj}) + R^d_{abc} v^b_j v^c_k n^a_{\sigma|} n_{\tau|d}. \tag{10}$$

Так как вдоль поверхности $g^{\perp}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ в точке Q_0 $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$, $\Gamma^k_{ij} = 0$ и по условию теоремы в точках поверхности выполняется равенство (A), то для $\sigma = 1$, $\tau = \beta$, $j = 2$, $k = 1$ уравнения Риччи в точке Q_0 перепишутся следующим образом:

$$\frac{\partial \mu_{\beta 1|2}}{\partial u^1} - \frac{\partial \mu_{\beta 1|1}}{\partial u^2} + g^{sh}(A^\beta_{s2}A^1_{h1} - A^\beta_{s1}A^1_{h2}). \tag{11}$$

Ввиду специального выбора системы координат в точке Q_0 и параболичности поверхности $A^1_{s1} = A^1_{s2} = 0$. Поэтому уравнения (11) приведутся к виду

$$\frac{\partial \mu_{\beta 1|2}}{\partial u^1} - \frac{\partial \mu_{\beta 1|1}}{\partial u^2} = 0. \tag{12}$$

Из (9), (12) следует, что

$$[X, Y]^{l+\beta} = 0. \tag{13}$$

Уравнения Кодацци для поверхностей риманова пространства имеют вид

$$(14)\qquad A^{\sigma}_{ij,\,k} - A^{\sigma}_{ik,\,j} = \sum_{\tau} (\mu_{\tau\sigma|k} A^{\tau}_{ij} - \mu_{\tau\sigma|j} A^{\tau}_{ik}) + R_{abcd} v^a_i v^c_j v^d_k n^b_{\sigma|}.$$

В точке Q_0 в силу условия (А) и $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$ уравнения Кодацци перепишутся следующим образом:

$$(15)\qquad \frac{\partial A^{\alpha}_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial A^{\alpha}_{ik}}{\partial u^j} = 0.$$

Условие (А) дает такой же вид уравнений Риччи и уравнений Кодацци, как для поверхностей в евклидовом пространстве.

По определению распределения $\mathcal{L}^k(\tilde{Q})$ проекции векторных полей X, Y на базу F^l удовлетворяют условию

$$(16)\qquad \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} A^{\alpha}_{ij} X^i = 0; \quad \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} A^{\alpha}_{ij} Y^i = 0.$$

Продифференцируем (16) по u^k, умножим на Y^k и просуммируем по k. Тогда получим, что в точке Q_0

$$(17)\qquad \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} A^{\alpha}_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial u^k} Y^k = - \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} \frac{\partial A^{\alpha}_{ij}}{\partial u^k} X^i Y^k.$$

Из уравнений (15), (16) и (17) следует, что

$$(18)\qquad \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} A^{\alpha}_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial u^k} Y^k = \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} A^{\alpha}_{ik} Y^k \frac{\partial X^i}{\partial u^j} = 0.$$

Аналогично

$$(19)\qquad \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} A^{\alpha}_{ij} \frac{\partial Y^i}{\partial u^k} X^k = 0.$$

Поэтому

$$(20)\qquad \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} A^{\alpha}_{ij} \left(\frac{\partial X^i}{\partial u^k} Y^k - \frac{\partial Y^i}{\partial u^k} X^k \right) = 0.$$

Это означает, что $\pi_* [X, Y] \subset L^k (Q_0, \xi)$. Из (13) следует, что $[X, Y]$ — горизонтальный вектор. Поэтому из (7) следует, что $[X, Y] \subset \mathcal{L}^k(\tilde{Q}_0)$. Но так как Q_0 — произвольная точка поверхности, то $[X, Y] \subset \mathcal{L}^k(\tilde{Q})$. Так как выполняется условие теоремы Фробениуса, то распределение $\mathcal{L}^k(\tilde{Q})$ голономно, т. е. через каждую точку $\tilde{Q} \in NF^l$ проходит единственное k-мерное многообразие $R^k(\tilde{Q}_0)$, касательные пространства к которому совпадают с плоскостями распределения $\mathcal{L}^k(\tilde{Q})$.

б) Проекция слоя $R^k(\tilde{Q}_0)$ на базу F^l есть регулярное подмногообразие $R^k(Q_0, \xi)$ поверхности F^l. Докажем вполне геодезичность слоя $R^k(\tilde{Q}_0)$ в нормальном расслоении с метрикой Сасаки и $R^k(Q_0, \xi)$ в объемлющем римановом пространстве M^n. Выберем на F^l локальные координаты так, чтобы $R^k(Q_0, \xi)$ была координатной поверхностью $u^1, \ldots, u^k$. Тогда слой $R^k(\tilde{Q}_0)$ имеет следующее параметрическое задание: $v^1 = u^1, \ldots, v^k = u^k$; $v^{k+1} = 0, \ldots, v^l = 0, v^{l+\alpha} = \xi^{\alpha}(u^1, \ldots, u^k)$. Касательное пространство к $R^k(\tilde{Q}_0)$ натянуто на векторы:

$$(21)\qquad V_s = \left(0, \ldots, \underset{s}{1}, \ldots, 0, \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial u^s}\right) \quad (s = 1, \ldots, k).$$

С другой стороны, эти векторы являются горизонтальным поднятием касательных векторов $\dfrac{\partial}{\partial u^s}$ к подмногообразию $R^k(Q_0, \xi)$

$$\frac{\partial}{\partial u^s} = \{0, \ldots, \underset{s}{1}, 0, \ldots, 0\}.$$

Из (2) следует, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^s}\right)^H = \{0, \ldots, \underset{s}{1}, \ldots, 0; -\mu_{1\tau|s}\xi^\tau, \ldots, -\mu_{p\tau|s}\xi^\tau\}. \tag{22}$$

Из (21), (22) следует, что вдоль слоя $R^k(\tilde{Q}_0)$

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^s} + \mu_{\alpha\tau|s}\xi^\tau = 0. \tag{23}$$

То есть нормальное векторное поле $\xi(u^1, \ldots, u^k)$, которое соответствует слою $R^k(\tilde{Q}_0)$, параллельно в нормальной связности поверхности F^l вдоль подмногообразия $R^k(Q_0, \xi)$. Выберем нормальное векторное поле $n_{1|}$ так, чтобы в точках $R^k(Q_0, \xi)$ оно совпадало с полем $\xi(u^1, \ldots, u^k)$. Тогда вдоль $R^k(Q_0, \xi)$

$$\mu_{\alpha 1|s} = 0 \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{24}$$

В новых координатах $R^k(\tilde{Q}_0)$ имеет следующее параметрическое задание:

$$v^s = u^s, \ v^{k+1} = \ldots = v^l = 0; \ \xi^1 = 1, \ldots, \xi^p = 0.$$

При этом векторные поля X, Y имеют отличными от нуля только первые k координат. Пусть $\tilde{\nabla}$ — ковариантная производная в метрике нормального расслоения. Тогда в точке $\tilde{Q}_0$

$$[\tilde{\nabla}_X Y]^i = \frac{\partial Y^i}{\partial u^k} X^k + \tilde{\Gamma}^i_{js} X^j Y^s;$$

$$[\tilde{\nabla}_X Y]^{l+\alpha} = \tilde{\Gamma}^{l+\alpha}_{js} X^j Y^s.$$

Из леммы 1.6 следует

$$\begin{cases} [\tilde{\nabla}_X Y]^i = \dfrac{\partial Y^i}{\partial u^k} X^k, \\ [\tilde{\nabla}_X Y]^{l+\alpha} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mu_{\alpha 1|j}}{\partial u^s} + \dfrac{\partial \mu_{\alpha 1|s}}{\partial u^j}\right) X^j Y^s. \end{cases} \tag{25}$$

Из (24), (25) следует

$$[\tilde{\nabla}_X Y]^{l+\alpha} = 0, \tag{26}$$

и векторное поле $\tilde{\nabla}_X Y$ горизонтальное. Из (19), (25), (26) получаем, что

$$\tilde{\nabla}_X Y \subset \mathcal{L}^k(\tilde{Q}_0). \tag{27}$$

Но $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + A(X, Y)$, где ∇ — ковариантная производная в метрике слоя $R^k(\tilde{Q}_0)$, $A(X, Y)$ — вектор второй квадратичной формы слоя, перпендикулярный к слою. Из (27) следует, что $\tilde{\nabla}_X Y$ — вектор, касательный к слою. Поэтому $A(X, Y) = 0$, и слой $R^k(\tilde{Q}_0)$ — вполне геодезическое подмногообразие.

Аналогично доказывается вполне геодезичность слоя $R^k(Q_0, \xi)$ в метрике поверхности F^l.

Известно, что если F^l — k-параболическая поверхность в римановом пространстве, ξ — нормаль в точке Q, для которой ранг второй квадратичной формы максимален $r(Q, \xi) = l - k$, то ограничение вторых квадратичных форм поверхности на плоскость $L^k(Q, \xi) \subset T_Q F^l$ есть нулевые формы [3*].

Поэтому слой $R^k(Q_0, \xi)$ является вполне геодезической поверхностью в объемлющем римановом многообразии M^n.

с) Пусть Q — граничная точка $R^k(Q_0, \xi)$. Соединим точку Q геодезической $\gamma \subset R^k(Q_0, \xi)$ с внутренней точкой слоя. Не ограничивая общности, будем считать, что это и есть точка Q_0. Вдоль геодезической γ направим координатную линию u^1 и введем на поверхности координаты так, чтобы вдоль γ $\Gamma^k_{ij} = 0$, и выберем нормальные векторные поля $n_{\alpha|}$ так, чтобы $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$. При этом слой остается координатной поверхностью $u^1, \ldots, u^k$. Пусть A^1_{ij} — вторая квадратичная форма поверхности F^l, отвечающая нормали $n_{\alpha|} = \xi$. Тогда из параболичности поверхности следует, что $A^1_{1j} = 0$. Поэтому из (14), (18) следует, что вдоль геодезической уравнения Кодацци для формы A^1_{1j} имеют вид $\frac{\partial A^1_{1j}}{\partial u^1} = 0$. Пусть X — вектор в точке Q, такой, что $X \subset L(Q, \xi)$, т. е. $A^1_{ij}X^i = 0$. Параллельно перенесем вектор X вдоль геодезической в точку Q_0, вдоль геодезической получим векторное поле $X(u^1)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial u^1}(A^1_{ij}X^i(u^1)) = \frac{\partial A^1_{ij}}{\partial u^1} X^i(u^1) = 0.$$

То есть $X(Q_0) \subset L^k(Q_0, \xi)$. Отсюда следует, что ранг второй квадратичной формы поверхности относительно нормального поля ξ в точках граничного слоя $R^k(Q_0, \xi)$ не может уменьшаться. То есть $r^*(Q, \xi) \geqslant r(Q_0, \xi)$. Пусть $r(Q_0, \xi) = r_0 = \max\limits_{Q \in F^l} r(Q)$ и поверхность F^l — полная. Тогда $r(Q, \xi) = r_0$. Через точку Q также проходит слой, для которого Q является внутренней точкой. В силу единственности слоя он является продолжением слоя $R^k(Q_0, \xi)$. То есть геодезические слои $R^k(Q_0, \xi)$ неограниченно продолжаются. Из теоремы Хопфа — Ринова следует полнота слоя как риманова многообразия.

Из определения метрики Ng на нормальном расслоении и параллельности в нормальной связности поверхности нормального векторного поля ξ вдоль $R^k(Q_0, \xi)$ следует, что отображение проекции π: $R^k(\tilde{Q}_0) \to R^k(Q_0, \xi)$ является изометрией. Поэтому граничные точки $R^k(\tilde{Q})$ и $R^k(Q_0, \xi)$ соответствуют друг другу, и из полноты $R^k(Q_0, \xi)$ следует полнота $R^k(\tilde{Q}_0)$. Доказательство закончено.

Примечание. В метрическом пространстве возникает трудность при определении расслоения между направлениями и касательными элементами в разных точках пространства. Эта трудность преодолевается с помощью нерегулярного аналога метрики Сасаки [8*].

7. Раздел вопросов и задач

В этом разделе мы сформулируем ряд нерешенных задач, представляющих, на наш взгляд, определенный интерес.

1. В работах [95] и [96] дана классификация геодезических в TM и T_1M в случае, когда M есть многообразие постоянной кривизны $+1$, -1, 0. TM и T_1M являются пространствами римановой субмерсии с вполне геодезическими слоями. Слои содержат геодезические вертикального типа.

База M, вложенная в TM нулевым сечением, также вполне геодезична.

Задача (Борисенко А. А.). *Дать исчерпывающую классификацию вполне геодезических подмногообразий в TM и T_1M в случае, когда M имеет постоянную секционную кривизну.*

2. Пусть (M, g) — риманово многообразие. Метрика g называется *сильно q-сферической*, если в каждой точке $Q \in M$ найдется линейное подпространство $L_Q \subset T_QM$ размерности q, такое, что как только $Y \in L_Q$, то для любых X, $Z \in T_QM$ тензор кривизны M удовлетворяет условию

$$R(X, Y)Z = K(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y),$$

q называется *индексом сферичности*, K — *величиной сферичности*. Если $K \equiv 0$, то это определение есть определение сильно q-параболичности метрики M.

Описание сильно параболической метрики Сасаки на TM дано в [4]. Если $\dim M = 2$, то возможны следующие варианты:

а) если M не является многообразием постоянной кривизны, то $q = 0$;

б) если M имеет постоянную кривизну $K_0 \neq 1$, то $q = 1$ и $K = K_0^2/4$;

в) если M стандартная двумерная сфера, то $q = 3$, $K = 1/4$.

Для более высоких размерностей известно только, что для T_1S^n $(n \geqslant 3)$ $q = 1$ и $K = 1/4$.

Задача (Борисенко А. А., Ямпольский А. Л.). *Доказать, что индекс сферичности q для T_1M при $\dim M \geqslant 3$ равен:*

а) $q = 1$, если $M = S^n$, причем $K = 1/4$,

б) $q = 0$ в остальных случаях.

3. Пусть F^l — поверхность в евклидовом пространстве E^{l+p}. Тогда TF^l есть поверхность в TE^{l+p}. На TF^l можно рассмотреть метрику Сасаки (т. е. внутренним образом определенную метрику) и метрику, индуцированную из $TE^{l+p} = E^{2(l+p)}$. Эти метрики не изометричны.

Задача (Борисенко А. А.). *В евклидово пространство какой минимальной размерности метрика Сасаки вкладывается (погружается) изометрически?*

4. Кривизна метрики Сасаки $T\rho(M^n, K)$ $(n \geqslant 3)$ неотрицательна, если $0 \leqslant \rho^2 K \leqslant 4/3$, т. е. при $\rho^2 \leqslant 4/3K$. Эта оценка является точной. Если M^n локально симметрично и имеет положительную кривизну, то при достаточно малых ρ кривизна метрики Сасаки $T\rho M^n$ неотрицательна.

Задача (Борисенко А. А.). *Найти точную оценку для ρ, при которых секционная кривизна метрики Сасаки $T\rho\mathbb{C}P^n$, $T\rho\mathbb{H}P^n$ неотрицательна.*

5. Пусть M^n — псевдориманово многообразие с метрикой типа (p, q). На TM^n можно определить метрику Сасаки типа $(2p, 2q)$. Пусть $T\rho M^n$ — подрасслоение в TM^n, образованное касательными векторами постоянной длины ρ (>0 или <0). Рассмотрим псевдориманову сферу $S^{1,1}$ кривизны -1. Тогда при $\rho = -1$ метрика Сасаки $T\rho S^{1,1}$ имеет постоянную кривизну, равную $1/4$. (Аналог теоремы из [64]).

Задача 1 (Ямпольский А. Л.). *Найти пределы изменения секционной кривизны метрики Сасаки $T\rho S^{p,q}$.*

Задача 2 (Ямпольский А. Л.). *Дать классификацию геодезических на $TS^{p,q}$ и $T\rho S^{p,q}$. Рассмотреть вопрос о вполне геодезических подмногообразиях в этих пространствах.*

6. В большом классе задач римановой геометрии используются утверждения относительно некоторого k-мерного распределения на данном римановом многообразии.

Задача (Борисенко А. А.). *Перенести определение метрики Сасаки на грассманово расслоение данного риманова многообразия и исследовать свойства полученной метрики для различных типов грассмановых расслоений.*

7. Представляет интерес изучение геометрии нормального и сферического нормального расслоения с метрикой Сасаки для различных классов поверхностей. Так, если $V^2 \subset S^4$ — двумерная поверхность Веронезе, то при определенном ρ многообразие $N\rho V^2$ имеет постоянную секционную кривизну.

Задача 1 (Борисенко А. А.). *Доказать, что V^2 есть единственная компактная поверхность в S^4, для которой существует ρ, при котором $N\rho V^2$ есть многообразие постоянной кривизны.*

Задача 2 (Борисенко А. А.). *Изучить сферическое нормальное расслоение многомерной поверхности Веронезе.*

8. Аналогично определению сильной k-параболичности, можно дать определение сильной k-дефектности нормальной связности подмногообразия.

Задача 1 (Борисенко А. А.). *Изучить строение нормального расслоения подмногообразия с метрикой Сасаки, если подмногообразие имеет постоянный индекс нормальной дефектности.*

Задача 2 (Борисенко А. А.). *Пусть метрика Сасаки NF^l сильно k-параболична. Что можно сказать об F^l и его вложении (погружении) в данное риманово многообразие?*

9. В связи с тензором кривизны метрики Сасаки NF^l возникает и такая задача.

Задача (Ямпольский А. Л.). *Дать описание подмногообразий (например, в E^n), имеющих локально симметрический тензор кривизны нормальной связности.*

Такими поверхностями являются, например, поверхности с параллельной второй квадратичной формой в E^n. Существуют ли другие примеры?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Башкене А. Л. К теории поверхностей в касательном расслоении TE^n // Лит. мат. сб.— 1981.— Т. 21, № 1.— С. 25—28.

[2] Башкене А. Л. Вопросы теории гиперповерхностей касательного расслоения двумерного риманова многообразия // Лит. мат. сб.— 1982, № 22, № 1.— С. 25—39.

[3] Борисенко А. А., Ямпольский А. Л. Секционная кривизна метрики Сасаки T_1M^n // Укр. геом. сб.— 1987, № 30.— С. 10—17.

[4] Борисенко А. А., Ямпольский А. Л. О строении касательных расслоений многообразий с сильно параболической метрикой и сильно параболических поверхностей // Укр. геом. сб.— 1986.— Вып. 29.— С. 12—32.

[5] Борисенко А. А., Ямпольский А. Л. О метрике Сасаки касательного и нормального расслоения. // Докл. АН СССР.— Сер. математика.— 1987.— Т. 294, № 1.— С. 19—22.

[6] Борисенко А. А., Ямпольский А. Л. О метрике Сасаки нормального расслоения подмногообразия в римановом пространстве // Мат. сб.— 1987.— Т. 134 (176), № 2 (10).— С. 158—176.

[7] Ибрагимов Р. Х. Движение в касательном расслоении со специальной метрикой // Диф. геом. (Саратов.)— 1985.— № 8.— С. 17—22.

[8] Каган Ф. Римановы метрики в касательном расслоении над римановым многообразием. // Изв. вузов. Математика.— 1973.— № 6.— С. 42—51.

[9] Каминская Д., Талантова Н. В., Широков А. П. Об одном классе римановых метрик в касательном расслоении пространств постоянной кривизны // Диф. геом. (Саратов).— 1983.— № 7.— С. 27—34.

[10] Константиновский М. Д. Об одном обобщении синектическо й метрики / Рук. деп. в УкрНИИТИ, 26.01.84, № 112, Ук-Д84.

[11] Константиновский М. Д. О движении в касательном расслоении / Одесский пед. ин-т, Одесса, 1986.— 45 с. Рук. деп. УкрНИИТИ 8.01.86, № 201-УК.

[12] Маренич В. В. Метрика неотрицательной секционной кривизны на касательном расслоении к двумерной сфере // Сиб. мат. журнал.— 1986.— Т. 27, № 2.— С. 127—138.

[13] Назарова Е. К геометрии касательных расслоений групп Ли / Рук. де ВИНИТИ, 30.03.81, № 1428-81 ДЕП.

[14] Нусь С. К геометрии касательных расслоений пространств постоянной кривизны / Рук. деп. ВИНИТИ, 7.12.83, № 6623-83 ДЕП, Казань, Каз. ун-т.

[15] Пелипосян В. А. О геодезическом отображении касательных расслоений // Труды геом. семин. (Казань).— 1988.— № 18.— С. 57—59.

[16] Пелипосян В. А. О геодезическом отображении касательных расслоений римановых многообразий с метрикой полного лифта. // Изв. вузов.— 1987.— № 6.— С. 85—87.

[17] Пелипосян В. А. Геодезические отображения касательных расслоений римановых многообразий с метрикой Сасаки // Дифференциальная геометрия. Обобщенные пространства и их прилож.— Саратов, 1988.— С. 60—65.

[18] Подольский В. Г. Инфинитезимальные преобразования в касательном расслоении с метрикой полного лифта и метрикой Сасаки // Изв. вузов.— 1976.— № 9. № 9.— С. 128—132.

[19] Подольский В. Г. Бесконечно малые преобразования в пространствах (TV_2, g^c) и (TV_3, g^c) // Гравитация и теория относительности.— Казань.— 1981.— № 18.— С. 93—98.

[20] Подольский В. Г. Связь между бесконечно малыми преобразованиями и тензорными полями на базе (V_n, g) и бесконечно малыми преобразованиями в пространстве (TV_n, g^c) // Гравитация и теория относительности.— Казань.— 1981.— № 18.— С. 98—104.

[21] Соловьев А. Ф. О классах Понтрягина вполне геодезических подрасслоений // Сиб. мат. журнал.— 1988.— Т. 29, № 3.— С. 216—218.

[22] Султанов А. Я. О лифтах тензорных полей в расслоение линейных реперов // Рук. деп. ВИНИТИ, 18.11.87, № 7822-Д. Пенз. пед. ин-т.— Пенза, 1986.— 13 с.

[23] Султанов А. Я. О продолжении римановой метрики из многообразия в расслоение линейных реперов / Рук. деп. ВИНИТИ, 27.06.88, № 5104-В88. Пенз. пед. ин-т.— Пенза, 1988.

[24] Султанов А. Я. Горизонтальные лифты тензорных полей в расслоение линейных реперов / Рук. деп. ВИНИТИ, 27.06.88, № 5106-В88. Пенз. пед. ин-т, Пенза, 1988.

[25] Талантова Н. В., Широков А. П. Замечания об одной метрике в касательном расслоении. // Изв. вузов. Математика.— 1975.— № 6.— С. 143—146.

[26] Шадыев Х. Ш. Об инфинитезимальных гомотетиях в касательном расслоении риманова многообразия // Изв. вузов. Математика.— 1984.— № 9.— С. 77—79.

[27] Шадыев Х. Ш. Об инфинитезимальных гомотетиях в касательном расслоении риманова многообразия / Вопросы многомерной дифференциальной геометрии и ее приложения.— Самарканд, 1988.— С. 12—26.

[28] Широков А. П. О касательном расслоении и линейной геометрии неевклидовых пространств // Труды геом. сем. Казанского ун-та.— 1981.— № 13.— С. 101—108.

[29] Ямпольский А. Л. К геометрии сферических касательных расслоений римановых многообразий // Укр. геом. сб.— 1981.— Вып. 24.— С. 129—132.

[30] Ямпольский А. Л. Кривизна метрики Сасаки сферических касательных расслоений // Укр. геом. сб.— 1985.— Вып. 28.— С. 132—145.

[31] Ямпольский А. Л. Тензор кривизны метрики Сасаки нормального расслоения / Рук. деп. УкрНИИТИ, 17.09.85, № 2181 Ук-85 ДЕП.
[32] Ямпольский А. Л. Экстремальные значения секционной кривизны метрики Сасаки $T_1(M^n, K)$ // Укр. геом. сб.— 1988.— Вып. 32.— С. 127—137.
[33] Avez A., Buzzanka C. Flusso geodedico sul fibrato unitario tangenre di una superficie // Rend. Circ. Math. Palermo.— 1976.— ser. II.— V. 25.— P. 176—182.
[34] Azo K. Notes on some properties of the sectional curvature of the tangent bundle // Iokohama Math. Journ.— 1981.— V. 29, № 1.— P. 1—5.
[35] Azo K. On the structure of tangent bundles // Исикава когё кото сэммон гако киё // Mem. Ishikava Tech. Coll.— 1980.— v. 12.— p. 171—175.
[36] Azo K. On the immersion of a Killing vector field to the tangent bundles // Исикава коге кото сэммон гако киё. Mem. Ishikava Techn. Coll.— 1988.— № 20.— P. 57—62.
[37] Beem I., Chicone C., Ehrlich P. The geodesic flow and sectional curvature of pseudo-Riemannian manifolds // Geom. Dedic.— 1982.— V. 12, N 2.— P. 111—118.
[38] Bergery L., Bourguignone J.-P. Laplasian and Riemannian submersion with totally geodesic fibers // Lect. Notes in Math.— 1981.— V. 838.— P. 30—35.
[39] Buzzanka C. Actions de R et curbature de Ricci du fibre unitari tangente // Rend. Circ. Math. Palermo.— 1986.— V. 35, № 2.— P. 244—260.
[40] Buzzanka C. Curbature de Ricci et geometre conforme // Ann. mat. pura et appl.— 1987.— № 147.— P. 1—19.
[41] Chicone C. Tangent bundle connections and geodesic flow // Rocky Mount Journ. Math.— 1981.— V. 11, № 2.— P. 305—317.
[42] Cordero L., de Leon F. Prolongations of linear connections to the frame bundle // Bull. Austr. Math. Soc.— 1983.— V. 22, № 3.— P. 367—381.
[43] Cordero L., de Leon M. Tensor fields and connections of cross sections in the frame bundle of a parallelizable manifold // Rev. Math. Univ. Parma.— 1983.— № 9.— P. 433—445.
[44] Cordero L., de Leon M. Lifts of tensor fields to the frame bundle // Rend. Circ. Math. Palermo.— 1983.— V. 32, № 2.— P. 263—271.
[45] Cordero L., de Leon M. Horizontal lifts of connections to the frame bundle // Boll. Union mat. Ital.— 1984.— B3, № 1.— P. 223—240.
[46] Cordero L., de Leon M. On the differential geometry of frame bundle // Rev. Roum. Math. Pures et appl.— 1986.— V. 31, № 1.— P.9—27.
[47] Cordero L., de Leon M. Curvature of induced Riemannian metric on the frame bundle of a Riemannian manifold // Journ. math. pure et appl.— 1986.— V. 65.— 81—91.
[48] Deaconu V. Asupra fibratului en repere al unei superalete compacte orientabile // Stud. sci cerc. math.— 1983.— V. 35, № 5,— P. 347—355.
[49] Dicu C., Udriste K. Properties of the pseudo — Riemannian manifold $(TM, G = g^c - g^D - g^v)$, constructed over the Riemannian manifold (M, g). I // Mat. rev. anal. numer et theor. appox.— 1979.— V. 21, № 1.— P. 33—41; II // Bull. Inst. politech. Gh. Gheorghui-Dej. Ser. chim.-mat.— 1979.— V. 41, № 2.— P. 3—8.
[50] Dombrowski P. On the geometry of tangent bundle // Journ. reine angew. Math.— 1962.— Bd. 210, № 1—2.— S. 73—88.
[51] Escobales R. Submersions from spheres // Bull. Amer. Math. Soc.— 1973.— V. 79, № 1.— P. 71—74.
[52] Escobales R. Riemannian submersions with totally geodesic fibers // Journ. Diff. Geom.— 1975.— V. 10.— P. 253—276.
[53] Escobales R. Riemannian submersions from complex projective space // Journ. Diff. Geom.— 1978.— V. 13, № 1.— P. 93—107.

[54] F i s h e r R., L e e K. Isometry groups of orthonormal frame bundle // Geom. Dedic.— 1987.— V. 21, № 2.— P. 181—186.

[55] G l u c k H., Z i l l e r W. On the volume of a unit vector field on the three-sphere // Comm. Math. Helv.— 1986.— V. 61, № 2.— P. 177—192.

[56] G o l d b e r g S., I s h i h a r a T. Riemannian submersion commuting with Laplasian // Journ. Diff. Geom.— 1978.— V. 13.— P. 139—144.

[57] G r a y A. Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions // Journ. Math. and Mech.— 1967.— V. 16, № 7.— P. 715—737.

[58] G r i m a l d i R. Curvatura di Ricci e propertieta spetrali del fibrato sferica tangente // Rend. Semin. mat. Univ. e politechn. Iorino.— 1982.— V. 40, № 2,— P. 167—174.

[59] G r o m o v M., B r i n M. On the ergodicity of frame flows // Invent. math.— 1980.— V. 60, № 1.— P. 1—7.

[60] I a n u s S. Some submanifolds of the tangent bundle // Proc. nat. semin. on Finsler spaces Brasov.— 1980.— P. 69—75.

[61] I k u t a K. A Riemannian submersions with 2 dimensional base space // TRU Math.— 1982.— V. 18, № 2.— P. 89—105.

[62] I s h i h a r a T. Harmonic sections of tangent bundles // Journ. Math. Tokushima Univ.— 1979.— V. 13.— P. 23—27.

[63] I s h i k a v a S. On Riemannian metrics of tangent bundles of order 2 on Riemannian manifold // Tensor.— 1980.— V. 34, № 2.— P. 173—178.

[64] K l i g e n b e r g W., S a s a k i S. Tangent sphere bundle of a 2 — sphere // Tohôku Math. Journ.— 1975.— V. 27.— P. 45—57.

[65] K o w a l s k i O. On the curvature of induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold // Journ. reine angew. Math.— 1971.— Bd 250.— S. 124—129.

[66] de L e o n M., S a l g a n o K. G-structures on the frame bundle of second order // Riv. mat. Univ. Parma.— 1985.— № 11.— P. 161—179.

[67] L i u M.-S. Totally geodesic fiber maps // Bull. Amer. Math. Soc.— 1973.— V. 79, № 1.

[68] L i u M.-S. Affine maps on tangent bundle with Sasaki metric // Tensor.— 1974.— V. 28, № 1.— P. 34—42.

[69] L i z a k R. О чебышевских поверхностях в римановых субмерсиях // Demonstr. Math.— 1984.— V. 17, № 3.— P. 733—738.

[70] M a g i d M. Submersions from anti — de — Sitter space with totally geodesic fibers // Journ. Diff. Geom.— 1981.— V. 16, № 2.— P. 323—331.

[71] M a t s u z a w a I. Einstein metrics and fibred Riemannian structures // Kodai Math. Journ.— 1983.— V. 6, № 3.— P. 340—345.

[72] M o k K.-P., P a t t e r s o n E. M., W o n g I. C. Structure of symmetric tensors of type (0.2) and tensors of type (1.1) on the tangent bundle // Trans. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 234, № 1.— P. 253—278.

[73] M o k K.-P. On the differential geometry of frame bundles of a Riemannian manifolds // Journ. reine angew. Math.— 1978.— Bd 302.— S. 16—31.

[74] M o k K.-P. Complete lifts of tensor fields and connections to the frame bundle // Proc. London Math. Soc.— 1979.— V. 32, № 3.— P. 72—88.

[75] N a g y P. On the tangent sphere bundle of a Riemannian 2 — manifold // Tohôku Math. Journ.— 1977.— V. 29.— P. 203—208.

[76] N a g y P. Geodesics on the tangent sphere bundle of a Riemannian manifold // Geom. Dedic.— 1978.— V. 7, № 2.— P. 233—244.

[77] N a g y P. On the orthonormal frame bundle of a Riemannian manifold // Publ. Math.— 1979.— V. 26, № 3—4.—P. 275—280.

[78] N a g y P. On bundle-like conform deformation of a Riemannian submersion // Acta math. Acad. sci. Hung.—1982.— V. 39.— P. 155—161.

[79] N a g y P. Non-horizontal geodesics of a Riemannian submersion // Acta sci. math. / 1983.— V. 45, № 1—4.— P. 347—355.

[80] N a r i t a F. Riemannian submersions and locally symmetric submanifolds // Res. Repts. Akiba Techn. Coll.— 1985.— V. 20.— P. 98—101.

[81] N a r i t a F. The integrability tensor of Riemannian submersion and submanifolds // Res. Repts. Akita Techn. Coll.— 1987.— V. 22.— P. 66—74.

[82] O k u b o T. On the differential geometry of frame bundles $F(X_n)$, $n = 2m$ // Mem. Defence. Acad.— 1965.— V. 5.— P. 1—17.

[83] O k u b o T. On the differential geometry of frame bundle // Ann. mat. pura et appl.— 1966.— V. 72, № 4.— P. 29—41.

[84] O'N e i l l B. The fundamental equations of a submersion // Michigan Math. Journ.— 1966.— V. 13,—P. 459—469.

[85] O'N e i l l B. Submersions and geodesics // Duke Math. Juorn.— 1967.— V. 34, № 2.— P. 363—374.

[86] P o p F. An example of vertical and horizontal convex function on the tangent bundle of Riemannian manifold // Bull. Inst. politech. Iasi.— 1985.— Supl. I, Sec. 1.— P. 17—81.

[87] R a n j a n A. Riemannian submersions of spheres with totally geodesic fibers // Osaka Journ. Math.— 1985.— V. 22, № 2.— P. 243—260.

[88] R a n j a n A. Riemannian submersions of compact simple Gie groups with connected totally geodesic fibers // Math. Z.— 1986.— Bd 191, № 2.— S. 239—246.

[89] R e c k z i e g e l H. On the eigenvalues of the Shape operator of an isometric immersion into a space of constant curvature // Math. Ann.— 1979.— V. 243.— P. 71—82.

[90] R e c k z i e g e l H. Horizontal lifts of isometric immersions into the bundle space of pseudo-Riemannian submersion // Lect. Notes in Math.— 1985.— V. 1156.— P. 264—279.

[91] S a n i n i A. Applicazioni armoniche tra i fibrati tangente di varieta riemanniane // Boll. U. M. I.— 1983.— V. 2 — A, № 1,— P. 55—63.

[92] S a n i n i A. Applicazioni armoniche tra i fibrata tangenti unitari // Rend. semin. mat. Univ. e politechn. Torino.— 1985.— V. 43, № 1.— P. 159—170.

[93] S a s a k i S. On the differential geometry of tangent bundle of a Riemannian manifold I // Tohôku Math. Journ.— 1958.— V. 10.— P. 338—354.

[94] S a s a k i S. On the differential geometry of tangent bundle of a Riemannian manifold // Tohôku Math. Journ.— 1962.— V. 14.— P. 145—155.

[95] S a s a k i S. Geodesics on the tangent sphere bundle over space form // Journ. reine angew. Math.— 1976.— Bd 288.— S. 106—120.

[96] S a t o K. Geodesics on the tangent bundles over space forms // Tensor.— 1978.— V. 32.— P. 5—10.

[97] S a t o K. Infinitesimal affine transformations of the tangent bundle with Sasaki metric // Tohôku Math. Journ.— 1974.— V. 26, № 3.— P. 353—361.

[98] T a n n o S. Orthonormal frames on 3-dimensional Riemannian manifold // Juorn. Diff. Geometry.— 1976.— V. 11, № 3.— P. 467—474.

[99] T a n n o S. Killing vectors and geodesic flow vectors on tangent bundle // Journ. reine angew. Math.— 1976.— Bd. 282.— S. 162—171.

[100] U d r i s t e K. On the metric II + III in the tangent bundle of Riemannian manifold // Rev. Roum. mat. pura et appl.— 1977.— V. 22, № 9.— P. 1309—1320.

[101] V i l m s J. Connections of tangent bundles // Journ. Diff. Geom.— 1967.— № 1.— P. 234—243.

[102] W a l c z a k P. On totally geodesic submanifolds of tangent bundles with Sasaki metric // Bull. Acad. pol. sci., Ser. sci. math.— 1980. V. 28, № 3—4.— P. 161—165.

[103] W e i n s t e i n A. On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed // Journ. Diff. Geom.— 1974.— V. 9.— P. 513—517.

[104] Yano K., Okuba T. On the tangent bundles with Sasaki metrics of Finsler and Riemannian manifolds // Ann. mat. pura et appl.— 1970.— V. 87.— P. 137—162.

[105] Yano K., Ishihara S. Tangent and cotangent bundles. Differential geometry.— M.: Dekker, 1973.— 420 p.

[106] Iamaguchi K. On infinitesimal projective and infinitesimal transformations in tangent bundle of Riemannian mani — folds // Кагосима дайгаку рика хохоку. Sci. Repts. Kagoshima Univ.— 1987.— № 36.— P. 21—33.

[107] Yamaguchi S., Kawabata N. On Sasakian structure of the tangent sphere bundle // TRU Math.— 1985.— V. 21, № 1.— P. 117—126.

[108] Yorozu S. Behaviour of geodesics in foliated manifold with bundle-like metrics // Journ. Math. Soc. Japan.— 1983.— V. 35, № 2.— P. 251—272.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ПО РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

[1*] Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими.— М.: Мир, 1981,— 325 с.

[2*] Бессе А. Многообразия Эйнштейна.— М.: Мир, 1990.— Т. 1, 2.

[3*] Борисенко А. А. О строении l-мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в n-мерном евклидовом пространстве // Укр. геом. сб.— 1979.— Вып. 13.— С. 18—27.

[4*] Борисенко А. А. О полных поверхностях в пространстве постоянной кривизны // Укр. геом. сб.— 1974.— Вып. 15.— С. 8—15.

[5*] Борисенко А. А. О поверхностях неположительной внешней кривизны в пространствах постоянной кривизны // Мат. сб., — 1981. — Т. 114 (156). — С. 339—354.

[6] Борисенко А. А. О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // Мат. сб.— 1981.— Т. 116 (158).— С. 440—457.

[7] Громолл Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом.— М.; Мир, 1971,— 347 с.

[8*] Николаев И. Г. Синтетическое описание классических римановых пространранств // Институт математики СО АН СССР.— Новосибирск, препринт № 41, 1988.

[9*] Hartman P. On isometric immersions in Eucliadian space of manifolds with non-negative sectional curvature // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970.— V. 147.— P. 529—540.

[10*] Maltz P. The nullity space of curvature — like tensors // Journ. Diff. Geom.— 1972.— V. 7, № 3—4.— P. 519—525.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 25 марта 1991 г.