УДК 514.754

О. О. Шугайло (Харків. нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна)

АФІННА КРИВИНА ПЛОСКИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ НА АФІННИХ ГІПЕРПОВЕРХНЯХ

We establish a necessary and sufficient condition for a geodesic line on a nondegenerate hypersurface to be a plane curve. We deduce a formula for the affine curvature of a plane geodesic line on the affine hypersurface in terms of the affine fundamental form and the shape operator. We present the definition of transverse curvature and determine some of its elementary properties.

Установлено необходимое и достаточное условие того, что геодезическая на невырожденной гиперповерхности является плоской кривой. Получена формула для вычисления аффинной кривизны плоской геодезической линии на аффинной гиперповерхности в терминах аффинной фундаментальной формы и оператора Вейнгартена. Дано определение трансверсальной кривизны и получены некоторые ее свойства.

Вступ. Будемо розглядати афінні занурення гіперповерхонь за К. Номідзу, Т. Сасакі. Нехай (M^n, ∇) — афінний n-вимірний многовид зі зв'язністю ∇, а $(\mathbb{R}^{n+1}, D)$ — стандартний (арифметичний) афінний простір з плоскою зв'язністю D. Позначимо через $\mathfrak{X}(M^n)$ множину гладких дотичних векторних полів на M^n. У відповідності з [1, с. 29], занурення $f\colon (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+1}, D)$ називається афінним, якщо вздовж занурення визначено трансверсальне диференційовне векторне поле ξ таке, що в кожній точці $x \in M^n$ для будь-яких $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ має місце розклад

$$(D_{f_*(X)} f_*(Y))_x = (f_*(\nabla_X Y))_x + h_x(X, Y)\xi \tag{1}$$

на дотичну і трансверсальну компоненти, який визначає *афінну фундаментальну форму* $h(X, Y)$. Відомо, що ранг афінної фундаментальної форми не залежить від вибору трансверсального векторного поля. Гіперповерхня з невиродженою афінною фундаментальною формою називається *невиродженою* гіперповерхнею.

Для трансверсального векторного поля ξ має місце також аналогічний розклад

$$D_{f_*(X)}\xi = -f_*(SX) + \tau(X)\xi, \tag{2}$$

який визначає *оператор Вейнгартена* S і *форму трансверсальної зв'язності* τ. (Для спрощення позначень у подальшому для позначення диференціювання дотичних векторних полів у зв'язності D будемо використовувати запис $D_X Y$, маючи на увазі зовнішні координати X, Y.)

Для занурення $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ (без заданої зв'язності) вибір трансверсального векторного поля ξ визначає індуковану зв'язність ∇ з розкладу (1).

Для афінного занурення $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ із трансверсальним векторним полем ξ визначимо *індукований елемент об'єму* θ на M^n таким чином:

$$\theta(X_1, \ldots, X_n) = |f_*(X_1), \ldots, f_*(X_n), \xi|. \tag{3}$$

Для афінного занурення $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ трансверсальне векторне поле ξ називається *еквіафінним*, якщо $\nabla_X \theta = 0$ для всіх $X \in T_x(M^n)$, $x \in M^n$. Дана умова еквівалентна тому, що форма трансверсальної зв'язності є нульовою $\tau(X) \equiv 0$ [1, с. 31]. З еквіафінним векторним полем ξ ми маємо *еквіафінну структуру* (∇, θ) на M^n.

Для невиродженої гіперповерхні $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ еквіафінне трансверсальне векторне поле, для якого елемент об'єму, індукований афінною фундаментальною формою, збігається з θ, називається *афінним нормальним* векторним полем, а гіперповерхня — *гіперповерхнею Бляшке* [1, с. 40]. Дана умова на ξ є жорсткою: афінна нормаль визначається єдиним чином з точністю до знака.

Відомо [1, с. 42], що якщо для гіперповерхні Бляшке оператор Вейнгартена має вигляд $S = \lambda I$, де λ — функція, I — тотожний оператор, то $\lambda = \mathrm{const}$.

Гіперповерхня Бляшке називається *афінною гіперсферою*, якщо $S = \lambda I$. Якщо $\lambda = 0$, то це *невласна* афінна гіперсфера, а якщо ж $\lambda \neq 0$, — то *власна* афінна гіперсфера.

Має місце така теорема [1, с. 43].

Теорема. *Гіперповерхня Бляшке є афінною гіперсферою тоді і тільки тоді, коли всі її геодезичні є плоскими.*

Якщо відмовитися від умови на нормаль Бляшке і розглядати невироджені афінні занурення $f: (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+1}, D)$, то з умови, що всі ∇-геодезичні є плоскими, випливає, що оператор Вейнгартена має вигляд $S = \lambda I$, де λ — деяка функція. Нагадаємо, що такі занурення називаються *омбілічними*. Доведено [2], що якщо функція λ не дорівнює нулю у всій області визначення, то без зміни зв'язності можна вибрати $\xi = -\vec{r}$, де $\vec{r}$ — радіус-вектор, що задає занурення. Нагадаємо, що афінне занурення гіперповерхні з $\xi = -\vec{r}$ називається *центро-афінним* [1, с. 37], для нього $S = I$.

На афінній гіперсфері, центро-аффинній гіперповерхні і афінній омбілічній гіперповерхні всі геодезичні є плоскими. В роботі отримано необхідну і достатню умову того, що геодезична на невиродженій гіперповерхні є плоскою кривою.

Якщо розглядати тільки еквіафінні перетворення простору, тобто перетворення, які не змінюють об'єм, то можна говорити про афінну кривину кривої. Отримано формулу для афінної кривини плоскої геодезичної на афінній гіперповерхні з еквіафінною структурою в термінах афінної фундаментальної форми і оператора Вейнгартена.

Геодезична. Афінні кривини. Нагадаємо кілька визначень [1, с. 12]. Нехай $\vec{x}(t)$ — радіус-вектор кривої γ в афінному просторі $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $X = \vec{x}'(t)$ дотичне векторне поле γ. Крива $\vec{x}(t)$ називається *предгеодезичною*, якщо

$$\nabla_t X = \phi(t) X,$$

де $\phi(t)$ — деяка функція (∇_t означає коваріантне диференціювання в напрямку дотичного векторного поля $\vec{x}'(t)$.) З новим параметром s, який задовольняє умову

$$\frac{ds}{dt} = \exp\left(\int \phi(t) dt\right),$$

маємо $\nabla_s X = 0$. Параметр s називається *афінним параметром*; він визначається однозначно з точністю до афінного перетворення $s \mapsto as + b$, $a \neq 0$. Крива, параметризована афінним параметром; називається *геодезичною*.

Потрібно зауважити, що в афінному випадку, на відміну від евклідова, *афінний параметр* і *афінний натуральний параметр* — це різні параметри.

Гладка крива $\vec{x}(t)$ в афінному просторі $\mathbb{R}^n$ називається *невиродженою* [3, с. 170], якщо для будь-якого t

$$\det\left(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \ldots, \vec{x}^{(n)}(t)\right) \neq 0.$$

Афінний натуральний параметр (афінна довжина дуги) визначається таким чином:

$$\sigma(t) = \int \det\left(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \ldots, \vec{x}^{(n)}(t)\right)^{2/n(n+1)} dt,$$

тобто

$$\det\left(\vec{x}'(\sigma), \vec{x}''(\sigma), \ldots, \vec{x}^{(n)}(\sigma)\right) \equiv 1.$$

Здиференціювавши останню тотожність по σ, отримаємо

$$\det\left(\vec{x}'(\sigma), \vec{x}''(\sigma), \ldots, \vec{x}^{(n+1)}(\sigma)\right) \equiv 0.$$

Таким чином, маємо наступне означення [с. 171]. Нехай гладка невироджена крива $\vec{x}(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$ параметризована афінним натуральним параметром, тоді *афінні кривини* кривої $\vec{x}(\sigma)$ визначаються рівністю

$$\vec{x}^{(n+1)}(\sigma) = -k_1(\sigma)\vec{x}'(\sigma) - k_2(\sigma)\vec{x}''(\sigma) - \ldots - k_{n-1}(\sigma)\vec{x}^{(n-1)}(\sigma).$$

Зауважимо, що афінна довжина дуги і афінна кривина інваріантні при еквіафінному перетворенні простору: якщо $\vec{r}(\sigma)$ — крива з афінною довжиною дуги σ, то для будь-якого еквіафінного перетворення A крива $\vec{\rho}(\sigma) = A(\vec{r}(\sigma))$ є невиродженою кривою, афінна довжина дуги якої є σ. Крім того, афінна кривина $\vec{\rho}(\sigma)$ дорівнює афінній кривині $\vec{r}(\sigma)$ для кожного значення σ.

Плоскі геодезичні. Аналогічно евклідовому випадку в афінному також можна дати означення ліній кривини. Визначення для двовимірних афінних гіперповерхонь можна знайти в [4, с. 171].

Лінія на афінній гіперповерхні називається *лінією кривини*, якщо в кожній точці її дотичний вектор X є власним вектором оператора Вейнгартена, тобто $SX = \lambda X$, де λ — деяка функція точки.

Теорема 1. *Нехай $f\colon (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+1}, D)$ — афінна невироджена гіперповерхня. Якщо ∇-геодезична є плоскою невиродженою кривою, то вона є лінією кривини, якщо ж ∇-геодезична є лінією кривини, то вона є плоскою кривою.*

Доведення. Нехай $\vec{\rho}(t) = f(u(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ — плоска ∇-геодезична, $f_*(X) = \vec{\rho}'$ — дотичне векторне поле вздовж геодезичної, тобто $\nabla_X X = 0$. Використовуючи розклади (1), (2), отримуємо

$$\begin{gathered}\vec{\rho}'' = D_X X = h(X,X)\xi, \\ \vec{\rho}''' = D_X(D_X X) = D_X(h(X,X)\xi) = X(h(X,X))\xi + h(X,X)D_X\xi =\end{gathered} \tag{4}$$

$$= X(h(X,X))\xi + h(X,X)(-f_*(SX) + \tau(X)\xi).$$

Оскільки $\vec{\rho}(t)$ — плоска геодезична, то $\operatorname{rank}[\vec{\rho}', \vec{\rho}'', \vec{\rho}'''] < 3$, а оскільки крива невироджена, то $\operatorname{rank}[\vec{\rho}', \vec{\rho}''] = \operatorname{rank}[f_*(X), h(X,X)\xi] = 2$, тобто $h(X,X) \neq 0$. Таким чином,

$$\operatorname{rank}[\vec{\rho}', \vec{\rho}'', \vec{\rho}'''] = \operatorname{rank}[f_*(X), h(X,X)\xi, X(h(X,X))\xi + h(X,X)(-f_*(SX) + \tau(X)\xi)] =$$

$$= \operatorname{rank}[f_*(X), \xi, f_*(SX)] = 2.$$

Отже, $SX = \lambda X$, де λ — деяка функція, тобто дана геодезична є лінією кривини.

Нехай тепер $\vec{\rho}(t) = f(u(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ — ∇-геодезична, яка є лінією кривини, тобто $\nabla_X X = 0$ та $SX = \lambda X$, де λ — деяка функція, $f_*(X) = \vec{\rho}'$. З (4) у випадку, коли $h(X,X) \neq 0$ в кожній точці, випливає, що

$$\operatorname{rank}\left[\vec{\rho}', \vec{\rho}'', \vec{\rho}'''\right] = \operatorname{rank}[f_*(X), h(X,X)\xi, X(h(X,X))\xi + h(X,X)(-f_*(\lambda X) + \tau(X)\xi)] =$$

$$= \operatorname{rank}[f_*(X), \xi] = 2.$$

Таким чином, в кожній точці крива $\vec{\rho}(t)$ лежить у площині векторів $f_*(X)$, ξ, але з розкладів Гаусса $D_X X = h(X,X)\xi$ і Вейнгартена $D_X \xi = -f_*(\lambda X) + \tau(X)\xi$ випливає, що ця площина D-паралельна в $\mathbb{R}^{n+1}$, тобто $\vec{\rho}(t)$ — плоска крива.

Якщо ж $h(X,X) = 0$ в кожній точці, то геодезична є асимптотичною лінією, а отже, прямолінійною твірною. В афінній геометрії пряма — це вироджена крива. Якщо $h(X,X) = 0$ в деяких точках, то лінія $\vec{\rho}(t)$ буде плоскою кривою з особливими точками.

Теорема 2. *Невироджена афінна гіперповерхня $f\colon (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+1}, D)$ є афінною омбілічною гіперповерхнею тоді і тільки тоді, коли всі її ∇-геодезичні є плоскими.*

Доведення. На омбілічній гіперповерхні всі лінії є лініями кривини, отже, за теоремою 1 всі геодезичні є плоскими.

Нехай тепер $f\colon (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+1}, D)$ — невироджена афінна гіперповерхня, у якої всі ∇-геодезичні є плоскими. З доведеного вище випливає, що $SX = \lambda X$, де λ — деяка функція, що залежить від точки та векторного поля X. Зафіксуємо довільну точку на гіперповерхні. Розглянемо дві геодезичні, які проходять через дану точку і дотикаються лінійно незалежних напрямків X_1, X_2, які не є асимптотичними, при цьому $SX_1 = \lambda_1 X_1$, $SX_2 = \lambda_2 X_2$ в даній точці. Розглянемо геодезичну з дотичним вектором $X_3 = \alpha X_1 + \beta X_2$ (α, β — довільні дійсні числа), для неї $SX_3 = \lambda_3 X_3$. З лінійності оператора Вейнгартена випливає, що

$$S(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha S X_1 + \beta S X_2 = \alpha\lambda_1 X_1 + \beta\lambda_2 X_2 =$$

$$= \lambda_3(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha\lambda_3 X_1 + \beta\lambda_3 X_2.$$

Оскільки α, β є довільними, а X_1, X_2 — лінійно незалежними, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ не залежить від напрямку. Тобто оператор Вейнгартена має вигляд $S = \lambda I$, де λ — деяка функція точки.

Наступна теорема є аналогом відомої теореми [1, с. 42] для гіперповерхні Бляшке, оператор Вейнгартена якої має вигляд $S = \lambda I$. Доведення також аналогічне.

Теорема 3. *Для афінного омбілічного занурення з еквіафінною структурою оператор Вейнгартена* $S = \lambda I$, *де* $\lambda = \mathrm{const}$.

Доведення. Для афінного омбілічного занурення з еквіафінною структурою виконуються такі співвідношення: $S = \lambda I$, де λ — деяка функція точки, $\tau \equiv 0$. В даному випадку рівняння Кодацці для S [1, с. 33]

$$(\nabla_X S)Y - \tau(X)SY = (\nabla_Y S)X - \tau(Y)SX$$

набирає вигляду

$$\nabla_X(SY) - S(\nabla_X Y) = \nabla_Y(SX) - S(\nabla_Y X),$$

$$\nabla_X(\lambda Y) - \lambda\nabla_X Y = \nabla_Y(\lambda X) - \lambda\nabla_Y X,$$

$$\lambda(X)Y = \lambda(Y)X.$$

Оскільки ця рівність виконується для довільних лінійно незалежних векторних полів X, Y, то $X(\lambda) = 0$ для будь-якого X, отже, $\lambda = \mathrm{const}$.

Обчислення афінної кривини плоскої кривої в довільній параметризації. Для невиродженої плоскої кривої $\vec{r} = \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ афінна довжина дуги σ та афінна кривина $k(\sigma)$ визначаються таким чином:

$$\sigma = \int \left|\vec{r_t}'\,\vec{r_t}''\right|^{\frac{1}{3}} dt, \quad \vec{r_\sigma}''' = -k(\sigma)\vec{r_\sigma}'.$$

Формулу для обчислення афінної кривини в довільній параметризації за допомогою детермінантів можна знайти в [4, с. 71; 3, с. 150]. Отримаємо цю формулу в дещо іншій формі, яка є більш зручною для подальших досліджень.

Мають місце співвідношення:

$$\vec{r_t}' = \vec{r_\sigma}'\sigma_t',$$

$$\vec{r_t}'' = \vec{r_\sigma}''\left(\sigma_t'\right)^2 + \vec{r_\sigma}'\sigma_t'',$$

$$\vec{r_t}''' = \vec{r_\sigma}'''\left(\sigma_t'\right)^3 + 3\vec{r_\sigma}''\sigma_t'\sigma_t'' + \vec{r_\sigma}'\sigma_t'''.$$

Оскільки вектори $\vec{r_t}'$, $\vec{r_t}''$ лінійно незалежні та утворюють базис площини, якій належить крива, то $\vec{r_t}''' = \lambda_1\vec{r_t}' + \lambda_2\vec{r_t}''$. Враховуючи, що $\vec{r}_\sigma''' = -k\cdot\vec{r}_\sigma'$, маємо:

$$\lambda_1\left(\vec{r_\sigma}'\sigma_t'\right) + \lambda_2\left(\vec{r_\sigma}''(\sigma_t')^2 + \vec{r_\sigma}'\sigma_t''\right) = -k\cdot\vec{r}_\sigma'\left(\sigma_t'\right)^3 + 3\vec{r_\sigma}''\sigma_t'\sigma_t'' + \vec{r_\sigma}'\sigma_t'''.$$

Таким чином, збираючи коефіцієнти при $\vec{r_\sigma}'$ і $\vec{r_\sigma}''$, отримуємо систему

$$\lambda_1\sigma_t' + \lambda_2\sigma_t'' + k\left(\sigma_t'\right)^3 - \sigma_t''' = 0,$$

$$\lambda_2\left(\sigma_t'\right)^2 - 3\sigma_t'\sigma_t'' = 0.$$

Отже, формула для обчислення афінної кривини має вигляд

$$k(t) = \frac{1}{(\sigma_t')^3}\left(\sigma_t''' - \lambda_1\sigma_t' - \lambda_2\sigma_t''\right), \tag{5}$$

де $\vec{r_t}''' = \lambda_1\vec{r_t}' + \lambda_2\vec{r_t}''$, $\sigma_t' = \left|\vec{r_t}'\vec{r_t}''\right|^{\frac{1}{3}}$, $\lambda_2 = \dfrac{3\sigma_t''}{\sigma_t'}$.

Афінна кривина плоскої геодезичної. Нехай $\vec{\rho}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ — плоска геодезична на афінній невиродженій гіперповерхні $f\colon (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+1}, D)$ з еквіафінною структурою. Позначимо через $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2\}$ базис площини α в $\mathbb{R}^{n+1}$, в якій лежить дана геодезична, тобто $\vec{\rho}(t) = \rho^1(t)\vec{t}_1 + \rho^2(t)\vec{t}_2$, а через $\vec{n}$ позначимо сталий мультивектор $\vec{n} = \{\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_{n-1}\}$, $\vec{n}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, який задовольняє умову

$$|\vec{t}_1,\ \vec{t}_2,\ \vec{n}| = 1.$$

Таким чином, для векторів $\vec{a} = a^1\vec{t}_1 + a^2\vec{t}_2$, $\vec{b} = b^1\vec{t}_1 + b^2\vec{t}_2$, які лежать у площині α, ми можемо визначити індукований елемент об'єму таким чином:

$$|\vec{a},\ \vec{b}|_\alpha = |\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{n}|. \tag{6}$$

Для обчислення афінної кривини геодезичної лінії скористаємося формулою (5). Оскільки ξ — еквіафінне векторне поле, то $\tau = 0$. З доведеного вище твердження випливає, що $D_X\xi = -\lambda f_*(X)$. Таким чином,

$$\vec{\rho_t}' = f_*(X),\ \vec{\rho_t}'' = D_X X = h(X,X)\xi,$$
$$\vec{\rho_t}''' = D_X(h(X,X)\xi) = X(h(X,X))\xi + h(X,X)(-\lambda f_*(X)).$$

Отже,

$$\lambda_1 = -\lambda h(X,X), \quad \lambda_2 = \frac{X(h(X,X))}{h(X,X)}.$$

Далі маємо

$$\sigma_t' = \left|\vec{\rho_t}',\ \vec{\rho_t}''\right|_\alpha^{1/3} = \left|\vec{\rho_t}',\ \vec{\rho_t}'',\ \vec{n}\right|^{1/3} = |f_*(X),\ h(X,X)\xi,\ \vec{n}|^{1/3} =$$
$$= h(X,X)^{1/3}\,|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|^{1/3}.$$

Оскільки $X\left(|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|\right) = 0$, то

$$\sigma_t'' = \frac{1}{3}\,h^{-2/3}(X,X)X(h(X,X))\,|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|^{1/3},$$
$$\sigma_t''' = -\frac{2}{9}\,h^{-5/3}(X,X)(X(h(X,X)))^2\,|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|^{1/3} +$$
$$+\frac{1}{3}\,h^{-2/3}(X,X)\partial_X^2(h(X,X))\,|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|^{1/3}.$$

Отже, за формулою (5) отримуємо

$$k = \frac{1}{(\sigma_t')^3}\left(\sigma_t''' - \lambda_1\sigma_t' - \lambda_2\sigma_t''\right) = \frac{|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|^{1/3}}{h(X,X)|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|}\times$$

$$\times\left(-\frac{2}{9}\,h^{-5/3}(X,X)(X(h(X,X)))^2+\frac{1}{3}\,h^{-2/3}(X,X)\partial_X^2(h(X,X))+\right.$$

$$\left.+\lambda\,h^{4/3}(X,X)-\frac{1}{3}\,\frac{X(h(X,X))}{h(X,X)}\,h^{-2/3}(X,X)\,X(h(X,X))\right)=$$

$$=\frac{1}{h(X,X)|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|^{2/3}}\left(-\frac{5}{9}\,h^{-5/3}(X,X)(X(h(X,X)))^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\,h^{-2/3}(X,X)\partial_X^2(h(X,X))+\lambda h^{4/3}(X,X)\right).$$

Таким чином, справедливим є таке твердження.

Твердження. *Формула для обчислення афінної кривини плоскої геодезичної лінії на афінній гіперповерхні з еквіафінною структурою в термінах афінної фундаментальної форми і оператора Вейнгартена має вигляд*

$$k=\frac{-5(X(h(X,X)))^2+3h(X,X)\partial_X^2(h(X,X))+9\lambda h^3(X,X)}{9h^{8/3}(X,X)|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|^{2/3}}. \tag{7}$$

Недоліком формули (7) є те, що для обчислень необхідно перейти до зовнішніх координат і знайти зображення плоскої кривої $\vec{\rho}(t)\in\mathbb{R}^{n+1}$ у вигляді $\vec{\rho}(t)=\rho_1(t)\vec{t_1}+\rho_2(t)\vec{t_2}$. В такому випадку простіше безпосередньо скористатися формулою (5) з індукованим елементом об'єму (6). Але оскільки $|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|=\mathrm{const}$, то ми маємо можливість оцінювати афінну кривину плоских геодезичних з точністю до додатного сталого множника, не переходячи до зовнішніх координат.

Приклад. Обчислити афінну кривину геодезичної, яка визначається дотичним вектором $X=(a,0)$, на центро-афінній гіперповерхні

$$\vec{r}(u,v)=(\operatorname{ch}u\cos v,\operatorname{ch}u\sin v,\operatorname{sh}u).$$

Це однопорожнинний гіперболоїд, ми розглядаємо його як центро-афінну гіперповерхню, тобто

$$\xi=(-\operatorname{ch}u\cos v,-\operatorname{ch}u\sin v,-\operatorname{sh}u)=-\vec{r}(u,v),\quad S=I,$$

$$\vec{r}'_u=(\operatorname{sh}u\cos v,\operatorname{sh}u\sin v,\operatorname{ch}u),\quad \vec{r}'_v=(-\operatorname{ch}u\sin v,\operatorname{ch}u\cos v,0).$$

Запишемо розклад Гаусса:

$$\vec{r}''_{uu}=(\operatorname{ch}u\cos v,\operatorname{ch}u\sin v,\operatorname{sh}u)=-\xi,$$

$$\vec{r}''_{uv}=(-\operatorname{sh}u\sin v,\operatorname{sh}u\cos v,0)=\frac{\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u}\,\vec{r}'_v,$$

$$\vec{r}''_{vv}=(-\operatorname{ch}u\cos v,-\operatorname{ch}u\sin v,0)=\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u\vec{r}'_u+\operatorname{ch}^2u\cdot\xi.$$

Отже, афінна фундаментальна форма має вигляд

$$h=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \operatorname{ch}^2u\end{pmatrix}.$$

Скористаємося формулою (7). У даному випадку маємо

$$h(X,X) = \begin{pmatrix} a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}^2 u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = -a^2,$$

$$X(h(X,X)) = \partial_X^2(h(X,X)) = 0, \quad \lambda = 1.$$

Отже,

$$k = \frac{-a^{2/3}}{|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|^{2/3}}.$$

Залишилося обчислити $|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}|$. Для цього знайдемо зовнішнє рівняння геодезичної. Її внутрішнє рівняння $u = at,\ v = c$. Отже, зовнішнє рівняння

$$\vec{r}(t) = (\mathrm{ch}(at)\cos c, \mathrm{ch}(at)\sin c, \mathrm{sh}(at)).$$

Дана геодезична лежить у площині α, яка визначається векторами $\vec{t_1} = (\cos c, \sin c, 0)$, $\vec{t_2} = (0,0,1)$. Знайдемо вектор $\vec{n}$ такий, що $|\vec{t_1},\ \vec{t_2},\ \vec{n}| = 1$. Візьмемо $\vec{n} = (\sin c, -\cos c, 0)$. Оскільки $f_*(X) = f_*((a,0)) = a(\mathrm{sh}(at)\cos c, \mathrm{sh}(at)\sin c, \mathrm{ch}(at))$, $\xi = -\vec{r}(t)$, обчислимо

$$|f_*(X),\ \xi,\ \vec{n}| = a \left\| \begin{matrix} \mathrm{sh}(at)\cos c & -\mathrm{ch}(at)\cos c & \sin c \\ \mathrm{sh}(at)\sin c & -\mathrm{ch}(at)\sin c & -\cos c \\ \mathrm{ch}(at) & -\mathrm{sh}(at) & 0 \end{matrix} \right\| = a\left(\mathrm{ch}^2(at) - \mathrm{sh}^2(at)\right) = a.$$

Отже, кривина даної геодезичної $k = \dfrac{-a^{2/3}}{a^{2/3}} = -1$. Це повністю відповідає тому, що афінна кривина гіперболи $\vec{\rho}(t) = \mathrm{ch}(at)\vec{t_1} + \mathrm{sh}(at)\vec{t_2}$ дорівнює -1.

Трансверсальна кривина. У випадку занурення евклідової гіперповерхні нормальна кривина в напрямку X, $|X| = 1$ визначається як ортогональна проекція AX (A — оператор Вейнгартена) на X. Наведемо аналогічне означення для афінного занурення гіперповерхні.

Нехай $X, Y \in T_x(M^n)$. Спочатку визначимо проекцію Y на X уздовж підпростору $T_x(M^n)$, який задається мультивектором $\vec{n}$. Нехай $\vec{n}$ — трансверсальний до X мультивектор, такий, що $\theta(X,\ \vec{n}) \neq 0$, тоді $Y = \alpha X + \beta\vec{n}$ і

$$\alpha = \frac{\theta(Y,\ \vec{n})}{\theta(X,\ \vec{n})}, \quad \mathrm{pr}_X^{\vec{n}} Y = \frac{\theta(Y,\ \vec{n})}{\theta(X,\ \vec{n})}\, X.$$

Наведемо афінний аналог ортогонального підпростору, тобто правило, за яким визначається мультивектор $\vec{n}$. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — координатний базис $T_x(M^n)$, позначимо

$$\theta(e_1, e_2, \ldots, e_n) = |f_*(e_1), \ldots, f_*(e_n), \xi| = \omega.$$

Нехай у цьому базисі вектор X має розклад $\sum_{k=1}^{n} x^k e_k$. Оскільки вектор X ненульовий, то існує $x^i \neq 0$. Визначимо мультивектор $\vec{n}$ таким чином:

$$\vec{n} = \left\{ e_1 - \frac{x^1}{x^i}\, e_i, e_2 - \frac{x^2}{x^i}\, e_i, \ldots, e_{i-1} - \frac{x^{i-1}}{x^i}\, e_i, e_{i+1} - \frac{x^{i+1}}{x^i}\, e_i, e_n - \frac{x^1}{x^i}\, e_n \right\}. \tag{8}$$

Обчислимо

$$\theta(Y,\ \vec{n}) = \theta\left(Y,\ e_1 - \frac{x^1}{x^i}\,e_i, e_2 - \frac{x^2}{x^i}\,e_i, \ldots, e_{i-1} - \frac{x^{i-1}}{x^i}\,e_i, e_{i+1} - \frac{x^{i+1}}{x^i}\,e_i, e_n - \frac{x^1}{x^i}\,e_n\right) =$$

$$= (-1)^{i-1}\theta\Bigg(e_1 - \frac{x^1}{x^i}\,e_i, e_2 - \frac{x^2}{x^i}\,e_i, \ldots, e_{i-1} - \frac{x^{i-1}}{x^i}\,e_i,$$

$$\sum_{k=1}^{n} y^k e_k, e_{i+1} - \frac{x^{i+1}}{x^i}\,e_i, e_n - \frac{x^1}{x^i}\,e_n\Bigg) =$$

$$= (-1)^{i-1}\left(\frac{x^1y^1}{x^i} + \frac{x^2y^2}{x^i} + \ldots + \frac{x^{i-1}y^{i-1}}{x^i} + y^i + \frac{x^{i+1}y^{i+1}}{x^i} + \ldots + \frac{x^1y^1}{x^i}\right)\omega =$$

$$= \frac{(-1)^{i-1}}{x^i}\sum_{k=1}^{n} x^k y^k \omega.$$

Таким чином, для вектора X маємо

$$\theta(X, \vec{n}) = \frac{(-1)^{i-1}}{x^i}\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2\omega.$$

Отже, формула для обчислення проекції вектора Y на напрямок вектора X уздовж підпростору $T_x(M^n)$, який задається мультивектором $\vec{n}$ (8), має вигляд

$$\mathrm{pr}_X^{\vec{n}} Y = \frac{\theta(Y,\ \vec{n})}{\theta(X,\ \vec{n})}\,X = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x^k y^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x^k)^2}\,X. \tag{9}$$

Трансверсальною кривиною гіперповерхні $f\colon (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+1}, D)$ з трансверсальним векторним полем ξ в точці $x \in f(M^n)$ у напрямку $X \in T_x M^n$ називається число

$$\lambda_\xi(x,\ X) = \frac{\theta(SX,\ \vec{n})|_x}{\theta(X,\ \vec{n})|_x}, \tag{10}$$

де мультивектор $\vec{n}_x$ визначається за правилом (8).

Очевидно, що $\lambda_\xi(x,\ aX) = \lambda_\xi(x,\ X)$ для будь-якого $0 \neq a \in \mathbb{R}$.

Звичайно, трансверсальна кривина (10) залежить від визначення напрямку проектування $\vec{n}$. Ми пропонуємо визначати $\vec{n}$ за правилом (8), оскільки в даному випадку формула для проекції (9) має простий і природний вигляд.

Теорема 4. *Трансверсальна кривина має такі властивості:*

1. *Якщо X є власним вектором оператора Вейнгартена $SX = \lambda X$, то трансверсальна кривина $\lambda_\xi(X)$ збігається з власним значенням оператора Вейнгартена λ.*

2. *Якщо трансверсальна кривина тотожно дорівнює нулю, то оператор Вейнгартена нульовий і гіперповерхня афінно еквівалентна зануренню графіка деякої функції.*

3. *Якщо трансверсальна кривина гіперповерхні з еквіафінною структурою не залежить від напрямку, то вона не залежить і від точки. Така гіперповерхня є омбілічною.*

4. *Якщо для плоскої геодезичної афінний параметр збігається з афінним натуральним параметром, то її трансверсальна кривина збігається з афінною кривиною.*

Доведення.

1. Ця властивість є безпосереднім наслідком означення.

2. Випливає з означення і відомої теореми про афінне занурення гіперповерхні з нульовим оператором Вейнгартена [1, c. 40].

3. Випливає з означення і теореми 3.

4. Нехай X — дотичне векторне поле плоскої геодезичної, тоді з теореми 1 випливає, що $SX = \lambda X$. Отже, $\lambda_\xi(X) = \lambda$. Якщо афінний параметр збігається з афінним натуральним параметром ($\sigma_t' = 1,\ X(h(X,\ X)) = 0$), то, оскільки афінний параметр визначається з точністю до афінного перетворення, можна вважати, що $h(X,\ X) \equiv 1$. Тоді з формули (7) випливає, що афінна кривина геодезичної дорівнює $k = \lambda = \lambda_\xi(X)$.

Література

1. *Nomizu K., Sasaki T.* Nomizu K. Affine differential geometry. — Cambridge: Univ. Press, 1994. – 264 p.
2. *Шугайло Е. А.* Об аффинных омбилических погружениях высокой коразмерности // Proc. Int. Geom. Center. – 2013. – **6**, № 3. – P. 26 – 39.
3. *Guggenheimer H. W.* Differential geometry. – New York: Dover Publ., 1977. – 378 p.
4. *Широков П. А. Широков А. П.* Аффинная дифференциальная геометрия. – М.: Физматгиз, 1959. – 320 с.

Одержано 30.06.16