

8. Когомології

Як бачили, паралельно з класичною теорією когологій (симпл., сим., клітинні) у цьому курсі вивчалася теорія когологій через перехід до спряженого комплексу і обчислення його груп когологій. На відм. від когологій, когології задають контраваріантний функтор (з кат. симпл. гр-рів, тотал. гр-рів Top , кліт. гр-рів відм. у послідовності абелевих груп). Це визначає їх специфічні алгебраїчні властивості, про які йтиметься далі.

Деякі теорії когологій, що будуться вписаним раніше чином, становлять особливу цікавість:

Ес. 8.1. Когології Чеса відкритого покриття $\mathcal{U}$ топ. гр-ру X - це симпліційні когології

перва $N\mathcal{U}$ цього покриття (Еск. 3.3.). Задаємо, що для $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (де взаємно $U_\alpha \neq \emptyset \ \forall \alpha$) і $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ k -вн. симплекси $N\mathcal{U}$ - це набори $\{U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_k}\}$ такі, що $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k} \neq \emptyset$ (зокр., $\{U_\alpha\}$ для $\alpha \in A$ - його вершини).

Далі коротко позначатимемо такі симплекси через $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$, а нн. усіх k -вн. симплексів $N\mathcal{U}$ - через $N^k \mathcal{U}$. Згідно з деф. 3.5., k -та група свмн. ланцюгів $N\mathcal{U}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ - це

$$C_k(N\mathcal{U}) = \left\{ \sum_{(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in N^k \mathcal{U}} m_{(\alpha_0, \dots, \alpha_k)} (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \mid m_{(\alpha_0, \dots, \alpha_k)} \in \mathbb{Z}, |\{m_{(\alpha_0, \dots, \alpha_k)} \neq 0\}| < \infty \right\}$$

(з коэф. у $\mathbb{Z}$). За деф. 1.8., маємо $\forall$ ад. гр. G k -внірні ланцюги з коэф. у G - це гомоморфізми $C_k(N, \mathcal{U}) \rightarrow G$. В силу гомоморфності, кожен такий однозначно визначений своїм знач. на $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$. Більш того, групові операції групи k -вн. ланцюгів природним чином визн. операції групи відображень $N^k \mathcal{U} \rightarrow G : (f + g)(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = f(\alpha_0, \dots, \alpha_k) +$

$+ g(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ (чому?). Тому k -ту групу коциклів чеха покр. $\mathcal{U}$ з кер. y в G будемо позначити саме як групу відображень $N^k \mathcal{U} \rightarrow G$. Далі, з def. 3.5. маємо у ACK і def. 1.8. спрощеного комплексу маємо:

Сол. 8.1. В відкр. покр. $\mathcal{U}$ топ. пр-ву X (з топологіч. ел-тів), ад. гр. G і $k \in \mathbb{Z}_+$ k -та група коциклів чеха $\mathcal{U}$ з кер. y в G - це $\check{C}^k(\mathcal{U}, G) = G^{N^k \mathcal{U}} = \{f: N^k \mathcal{U} \rightarrow G\}$, а k -тий коциклісний зм-зм - це $\check{d}^k: \check{C}^k(\mathcal{U}, G) \rightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, G): f \mapsto (\check{d}^k f: (\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1}) \in N^{k+1} \mathcal{U} \mapsto \check{d}^k f(\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1}) = f(\partial_{k+1}(\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1})) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i f(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{k+1}))$

Тоді групи коциклів цього комплексу - це і є групи коциклів чеха $\{\check{H}^k(\mathcal{U}, G)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$.

Впр. 8.1. Описати явно групу $\check{H}^0(\mathcal{U}, G)$.

За Th. 3.2. бере про перв, якщо $\mathcal{U}$ добре (в топологіч. ел-ті)

скін. перетин його ел-тів стягнений) та крім того $\mathcal{U}$ скін.
або X паракompактний (зокр. метр пр-р, зокр. многовид),
то реалізація Нерва гомот. екв-на X . Тоді з гомот. інв-
сті симп. коомологій (Впр. 6.20. або див. далі) випл.,
що $\check{H}^k(\mathcal{U}, G)$ ізоморфні (сканімо, сингулярним) коомологіям
 $H^k(X, G) \forall k, G$. У випадку мажорного многовида $M = X$
виникає природний член ізоморфізм $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ між $\check{H}^k(\mathcal{U},$
 $\mathbb{R})$, де $\mathcal{U} - \mathcal{V}$ добре $\leq$ зліч. покр. M , і групами (просторами)
коомологій де Бампа $H_{dR}^k(M)$ (див. наст. приклад) - це теорема
де Бампа-Чере. Нарешті, у загальному випадку коомології
Чеха пр-ру X (що ще зветься спектральними) визнача-
ються як прямі грані $\check{H}^k(\mathcal{U}, G)$ за подібленням покриття
 $\mathcal{U}$ (тобто ізоморфні сингулярним для пр-рів, що гомот. екв.
клітинним, зокр., знову ж для многовидів). Див. [Katcher, p. 256-
257] або детально у [Eilenberg, Steenrod, Ch. IX, §].

Інші теорії коомологій виникають як коомології з само початку:

Ек. 8.2. Нехай M — гладкий многовид (тут гладкістю називаємо ∞ -гладкість), і для $k \in \mathbb{Z}_+$ $\Omega^k(M)$ — вект. пр-р (над $\mathbb{R}$) зовнішніх k -форм на M (див. курс "Диференціальна геометрія многовидів" або книга з диф. геометрії, зокр., [Коваленко, Мотиза]. Також деталі цього прикладу (і його зв'язку з попереднім) див. у [R. Bott, L. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology]. Зокрема, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ — м. ф-ції. Як видно, зовнішній диференціал $d^k: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ є лінійною відобр., і $d^{k+1} \circ d^k = 0 \ \forall k$. Тв.ч. $\{\Omega^k(M), d^k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ — невід'ємний кокомплекс. Його нуль коомології $\{H_{dR}^k(M)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ (що також природним чином мають стр. вект. пр-рів над $\mathbb{R}$ дк-но до Сол. 4.1.) звуться нульові-

модулі де Рана M (а сам комплекс - його комплексом де Рана). Згідно з ^(і безп. пр-рат) теоремою де Рана, вони $\forall k$ ізоморфні групам симплічних коомологій $H^k(M, \mathbb{R})$.

Часто саме ког. де Рана - найбільш зручний вибір теорії (ко)омологій для м. многов. Зокр., у їх термінах вивчаються характеристичні класи - важливі топ. інваріанти (див. [1. Milnor, 1. Stasheff. Characteristic Classes]). Універсальні коефіцієнти

Рем. З'ясуємо зв'язок між групами омомологій і коомологій у зокр. випаді. Нехай $C_* = \{C_k, \partial_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ - лану. комплекс (з абелевими групами):

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+2}} C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

За def. 1.8., спрощений комплекс для групи коэф. G (абел.):
 $\dots \xleftarrow{d^{k+1}} \text{Hom}(C_{k+1}, G) \xleftarrow{d^k} \text{Hom}(C_k, G) \xleftarrow{d^{k-1}} \text{Hom}(C_{k-1}, G) \xleftarrow{d^{k-2}} \dots$

де $\forall f \in \text{Hom}(C_k, G)$ $d^k f = f \circ \partial_{k+1}$. Ця група
 (ко)гомологій - це група когологій функцій
 комплексу $\{H^k(C^*, G)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Зокр. $\forall k$ $\forall$ ел-т
 цієї групи - сувільний клас $f + B^k(C^*, G)$, де
 $f \in Z^k(C^*, G) \Leftrightarrow 0 = d^k f = f \circ \partial_{k+1} \Leftrightarrow 0 = f|_{\text{Im } \partial_{k+1}} =$
 $= f|_{B_{k+1}(C^*)}$. З іншого боку, $\forall$ ел-т $H_k(C^*)$ - це

$a + B_k(C^*)$, де $a \in Z_k(C^*) \Leftrightarrow \partial_k a = 0$. Визначимо

$\varphi: H^k(C^*, G) \rightarrow \text{Hom}(H_k(C^*), G)$:

$\varphi(f + B^k(C^*, G))(a + B_k(C^*)) := f(a) \in G$.

Коректність: по-перше, $\forall a + B_k(C^*), b + B_k(C^*) \in H_k(C^*)$
 $\varphi(f + B^k(C^*, G))((a + B_k(C^*)) + (b + B_k(C^*))) = f(a + b) = [f\text{-зв-з}] =$
 $= f(a) + f(b) = \varphi(\dots)(a + B_k(C^*)) + \varphi(\dots)(b + B_k(C^*))$, тому
 згідно $\varphi(f + B^k(C^*, G)) \in \text{Hom}(H_k(C^*), G)$ (разом з наст.).

По-группе, $a + B_k(C_*) = b + B_k(C_*) \Leftrightarrow a - b \in B_k(C_*) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists c \in C_{k+1} : a - b = \partial_{k+1} c \Rightarrow \begin{bmatrix} f\text{-зам-зм}, \\ f \circ \partial_{k+1} = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f(a) -$
 $- f(b) = f(a - b) = f(\partial_{k+1} c) = 0 \Rightarrow f(a) = f(b) \left(\begin{array}{l} \forall f + B^k(C_*, G) \in \\ \in H^k(C_*, G) \end{array} \right).$

По-мреме, $f + B^k(C_*, G) = g + B^k(C_*, G) \Leftrightarrow f - g \in B^k(C_*, G) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists h \in \text{Hom}(C_{k-1}, G) : f - g = d^{k-1} h \Rightarrow \forall a + B_k(C_*) \in H_k(C_*)$
 $f(a) - g(a) = (d^{k-1} h)(a) = h(\underbrace{\partial_k a}_{=0}) = [a \in Z_k(C_*)] = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(a) = g(a).$

φ -зам-зм: $\forall$ ел-мив бигн. груп

$$\varphi \left(\underbrace{(f + B^k(C_*, G)) + (g + B^k(C_*, G))}_{(f+g) + B^k(C_*, G)} \right) (a + B_k(C_*)) = (f+g)(a) =$$

$$= f(a) + g(a) = \varphi(f + B^k(C_*, G))(\dots) + \varphi(g + B^k(C_*, G))(\dots).$$

Сол. 8.2. $\varphi : H^k(C_*, G) \rightarrow \text{Hom}(H_k(C_*), G)$ (узо бигн. гек бигнсе)-
 коректно означеннн зам-зм $\forall$ ланг. комплекса C_* , аб. гр.
 G и $k \in \mathbb{Z}$.

Виявляється, що для fibonacci адельвих груп C_k
(тобто ізоморфізм $\mathbb{Z}^{m_k} \xrightarrow{\text{до}} \underbrace{\mathbb{A}_k \oplus \mathbb{Z} \oplus \text{заг. вимір}}_{\text{саме так само}}$ $\in$ групи
ланцюгів над $(\mathbb{Z} \text{ коеф. } \mathbb{Z})$ $\mathbb{Z}$ теорії гомологій, що
ми розглядали) φ також був. Відомо того,

випн. коротка точна посл. має додаткову властивість:

лев. 8.1. Говорять, що коротка точна послідовність
абелевих груп $0 \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \rightarrow 0$ розщеплюється
(splits), якщо виконана будь-яка з 3 еквівалентних
умов:

- $\exists$ лн-зн $\chi : G \rightarrow F : \chi \circ \varphi = \text{id}_F$;
- $\exists$ лн-зн $\omega : H \rightarrow G : \psi \circ \omega = \text{id}_H$;
- $\exists$ ізоморфізм $G \rightarrow F \oplus H$ такий, що діаграма

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & F & \xrightarrow{\varphi} & G & \xrightarrow{\psi} & H \rightarrow 0 \\
 & & a \mapsto (a, 0) \searrow & & \downarrow & \nearrow (a, b) \mapsto b & \\
 & & & & F \oplus H & &
 \end{array}$$

коммутативна.

Впр. 8.2. Перевірити екв-сть цих умов.

Лем. 8.1. (про універсальні коерізиенти для комплексів).

Нехай C_* — ланцюговий комплекс, що складається з вільних абелевих груп. Нехай $\forall$ аб. гр. G , $k \in \mathbb{Z}$ коротка точна послідовність

$$0 \rightarrow \text{Кер } \varphi \rightarrow H^k(C_*, G) \xrightarrow{\varphi} \text{Кот}(H_k(C_*), G) \rightarrow 0$$

розщиплюється, а підгрупа $\text{Кер } \varphi$ однозначно визначена групами $H_{k-1}(C_*) \leq G$.

▷ [Натанс, р. 190-194]. ▴

Рез. Точн., $H^k(C_*, G) \simeq \text{Кер } \varphi \oplus \text{Кот}(H_k(C_*), G)$ однозначно визначена $H_k(C_*)$, $H_{k-1}(C_*) \leq G$. Іншими словами,

когомології S^* однозначно визн. його когології та
групою коефіцієнтів. Аналогічна теорема про універсаль-
ні коефіцієнти для когології ([Катчен, р. 261-267])
дозволяє обчислити гр. когології з довільними коеф.
за групами когології з. коеф. у $\mathbb{Z}$ ("універсальними";
пор. з Рем. після Рл. 7.1.).

З Th. 8.1. випливає, напр., Впр. 6.20. про ізоморф-
ність sing. і sing. когомології (точніше, стає про-
стим наслідком Th. 6.4. про ізоморфізм когології) та
аналогічні твердження. У свою чергу, твердження
про гомотопічну інваріантність когомології (як Впр. 5.5.)
може виводити з інв-ті когології та наступного (го-
ведення див. у [Катчен] разом з дов. Th. 8.1.):

Соч. 8.3. Якщо морфізм ланцюгових комплексів, що скл.
з віільних абелевих груп, індуктує ізоморфізми

груп гомологій в усіх вимірностях, то він індуктує
і ізоморфізми груп коомологій в усіх вимірностях
і для $\forall$ абелевої групи коефіцієнтів G .

Реш. Як конкретно знайти $\text{Кер } \varphi$? Найпростішим
тут є випадок, коли усі C_k (а отже і $H_k(C_*)$)
і $H^k(C_*, G)$ є вект. пр-ки над полем G : тоді
 $\text{Кер } \varphi = 0$, а отже φ - (лінійний) ізоморфізм:

Сол. 8.7. Нехай $G = \mathbb{K}$ - поле, а C_* - ланцюговий комп-
лекс, що складається з вект. пр-ів над $\mathbb{K}$ та лін.
вигорохень. Тоді $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$H^k(C_*, \mathbb{K}) \stackrel{\varphi}{\cong} \text{Hom}(H_k(C_*), \mathbb{K}) = H_k(C_*)^*.$$

Зокрема, для груп (симпл., симп., кліт.) гомологій
і коомологій пр-ву X з коэф. у $\mathbb{K}$ $\forall k$

$$H^k(X, \mathbb{K}) \cong H_k(X, \mathbb{K})^*.$$

Реш. Путь, як завжди, $(\cdot)^*$ позначає спряжений про-
стір. Наприклад, у доведенні теореми де Дарма (див.
Ес. 8.2.) б'ється із-м між $H_{dR}^k(M)$ і $H_k^{\text{sing}}(M, \mathbb{R})^*$,
що т.з. ізоморфний пр-ру k -вим. синг. когомоцій.

У загальному випадку $\text{Ker } \varphi \cong \text{Ext}(H_{k-1}(C^*), G)$,
де функтор $\text{Ext}(\cdot, G)$ визн. наступним чином.

У абелевої гр. H $\exists$ т.зв. вільна (проективна)
резольвента (free projective resolution) — точна послі-
довність $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \xrightarrow{\Psi} H \rightarrow 0$, де F_1, F_0 — вільні
абелеві. Для цього можна взяти F_0 з тими ж
твірними, що H (але вільну), Ψ , що переважить
твірні у визн. твірні ма $F_1 = \text{Ker } \Psi$. Перейдемо
до спряженого комплексу (що все необхід'язково точний)

$$0 \rightarrow \text{Hom}(H, G) \rightarrow \text{Hom}(F_0, G) \rightarrow \text{Hom}(F_1, G) \rightarrow 0.$$

Почн'ємо перша (тобто у мені $\text{Hom}(F_1, G)$) згідно

когологій - це $\bar{i} \in \text{Ext}(H, G)$. Взагалі, ця група з точки до $\bar{i}$ -на не залежить від вибору вільної роздвоєнності (що може мати й більше членів). Доведення цього та інші деталі див. у [Katcher, p. 192-196], див. також книжки з гомологічної алгебри.

Інші деталі про групи симпл., сим., клітинних когологій (зокр., аксіоми та посл. Матера-Вісторіса) - див. [Katcher, p. 197-206].

V - добутки

На відміну від гомологій (насправді не зовсім, див. [Katcher]), у когологіїх над кільцями виникає додаткова структура множення. У когологіїх де Fam (Ес. 8.2.) вона індукється зовнішнім добутком форм (див. [Botz, Tu]), а, скажімо, для симпларних когологій визначається наст. чином.

$\forall k \in \mathbb{Z}_+$ група $C_k(X)$ сим. k -вим. ланцюгів топ. пр-ру X
 з коэф. у $\mathbb{Z}$ складається зі сим. сум $\sum_{\varphi \in C(\sigma^k, X)} m_\varphi \cdot \varphi$, де
 $m_\varphi \in \mathbb{Z}$. Тому (ан-по до Ех. 8.1.) $\forall k$ -вим. коциента
 $f \in C^k(X, G) = \text{Hom}(C_k(X), G)$ ($\forall$ аб. гр. G) однозначно
 визн. і може бути ототожнений з відобр. з множини
 усіх k -вим. сим. симплексів $C(\sigma^k, X)$ у G .

def. 8.2. Нехай $G = R$ - кільце, $k, l \in \mathbb{Z}_+$. $\vee$ - добутком
 (cup product) k -вим. сим. коциента $f: C(\sigma^k, X) \rightarrow R$ і
 l -вим. сим. коциента $g: C(\sigma^l, X) \rightarrow R$ на топ. пр-рі X
 з коэф. у R зветься $(k+l)$ -вим. сим. коциент $f \vee g$
 на X з коэф. у R , що визначений φ -омо
 $f \vee g: C(\sigma^{k+l}, X) \rightarrow R: \varphi \mapsto f(\varphi|_{x^{k+1}=\dots=x^{k+l}=0}) \cdot$
 $\cdot g(\varphi|_{x^0=\dots=x^{k-1}=0})$.

Рем. Таким образом — у кильози R . $\forall (k+l)$ -виз. сир. сир. $\varphi \in C(\mathcal{G}^{k+l}, X)$ $\varphi|_{x^{k+1}=\dots=x^{k+l}=0} : (x^0, \dots, x^k) \xrightarrow{\in \mathcal{G}^k} \mapsto \varphi(x^0, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$ та $\varphi|_{x^0=\dots=x^{k-1}=0} : (x^0, \dots, x^l) \xrightarrow{\in \mathcal{G}^l} \mapsto \varphi(0, \dots, 0, x^0, \dots, x^l)$ — k - та l -виз. сир. сир. сир. сир. φ та $\vee : C^k(X, R) \times C^l(X, R) \rightarrow C^{k+l}(X, R)$ коректно визначене (і за побудовою має власт. густинистості, тобто R -дильності для R -модулів). (див. далі def. 8.5).

Рл. 8.1. Для функцій $f \in C^k(X, R)$, $g \in C^l(X, R)$

$$d^{k+l}(f \vee g) = d^k f \vee g + (-1)^k f \vee d^l g.$$

Звіди випливає, що

$$(f + \mathcal{B}^k(X, R)) \vee (g + \mathcal{B}^l(X, R)) := f \vee g + \mathcal{B}^{k+l}(X, R)$$

коректно задає відображення

$$\vee : H^k(X, R) \times H^l(X, R) \rightarrow H^{k+l}(X, R)$$

в групі сир. коомологій X з кер. R .

Діємо, $\forall (k+l)^{\overline{+1}}$ -вим сирм. сирм. $\varphi \in C(\mathcal{B}^{k+l+1}, R)$

$$(d^k f \vee g)(\varphi) = ((f \circ \partial_{k+1}) \vee g)(\varphi) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i f(\varphi|_{x^i = x^{k+2} = \dots = x^{k+l+1} = 0}).$$

$$\cdot g(\varphi|_{x^0 = \dots = x^k = 0}),$$

$$(f \vee d^l g)(\varphi) = (f \vee (g \circ \partial_{l+1}))(\varphi) = \sum_{j=0}^{l+1} (-1)^j f(\varphi|_{x^{k+1} = \dots = x^{k+l+1} = 0}).$$

$$\cdot g(\varphi|_{x^0 = \dots = x^{k-1} = x^{k+j} = 0}).$$

Погля в сирм $(d^k f \vee g + (-1)^k f \vee d^l g)(\varphi)$ мена, що
вирн. $i = k+1$ у першій сирм та $j = 0$ у другій, сир-
появля, а решта часть $d^{k+l}(f \vee g)(\varphi) = (f \vee g)(\partial_{k+l+1}\varphi)$
за означенням, що й потрібно.

$\forall f + B^k(X, R) \in H^k(X, R), g + B^l(X, R) \in H^l(X, R)$
 $f \in Z^k(X, R), g \in Z^l(X, R)$, маю $d^{k+l}(f \vee g) = d^k f \vee$
 $\vee g + (-1)^k f \vee d^l g \stackrel{0}{=} 0 \Rightarrow f \vee g \in Z^{k+l}(X, R)$. Конкретно:
(закриття диференціала)
 $f + B^k(X, R) = h + B^k(X, R) \Leftrightarrow f - h \in B^k(X, R) \Leftrightarrow f - h =$
(при $k > 0$, при $k = 0$ $f - h = 0$)

$$= d^{k-1}e, e \in C^{k-1}(X, R) \Rightarrow \forall f + B^l(X, R) \in H^l(X, R)$$

$$f \cup g - h \cup g = [\text{гукунд.}] = (f - h) \cup g = d^{k-1}e \cup g =$$

$$= d^{k+l-1}(e \cup g) - (-1)^l e \cup d^l g = [g \in Z^l(X, R)] = d^{k+l-1}$$

$$(e \cup g) \in B^{k+l}(X, R) \Rightarrow f \cup g + B^{k+l}(X, R) = h \cup g + B^{k+l}(X, R).$$

Ан-но перевіряється коректність за другим директом. Δ

def. 8.3. Визначене у Рп. 8.1. відобр. $\cup$ зветься $\cup$ -добуток

(cup product) у симпларних комплексах X з коеф. у R .

Рем. $\cup$ -добуток у симпл. та клін. комплексах визн.

так само, і ці означення узгоджені (визн. одне одного

при їх-мис з Лм. 6.4 і Лм. 7.1.).

Рп. 8.2. Добуток $\cup: H^k(X, R) \times H^l(X, R) \rightarrow H^{k+l}(X, R) \forall X,$

кілеса $R, k, l \in \mathbb{Z}_+$

- гомоморфизм (точніше, R -лінійний);

— якщо R — з одиницею 1 , то має (ліву і праву)
одиницю $1 + B^0(X, R) \in H^0(X, R)$, де $1: C^0(X, R) \rightarrow 1$ постійне:

— якщо R асоціативне, то асоціативний;

— якщо R комутативне, то комутативний:

$$\alpha \vee \beta = (-1)^{kl} \beta \vee \alpha \quad \forall \alpha \in H^k(X, R), \beta \in H^l(X, R).$$

Помітимо $\vee$ перетворює $H^*(X, R) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k(X, R)$ на градування кільця (точніше, градування R -алгебри):
 $\mathbb{Z} \cdot 1$, якщо $R \mathbb{Z} \cdot 1$; асоц., якщо R асоц.; косоасоц., якщо R комут.

Дві перші властивості легко випливають з означень, асоц. і косоасоц. - доводяться у [Катцен, р. 206-217]. Впр. 8.3. Перевірити асоціативність (спочатку показати, що $\vee$ асоціативний у коалгебрах).

Градуїроване кільце - це таке, що представляється у вигляді $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ (як пряма сума абелевих груп), де $\forall \alpha \in A_k, \beta \in A_e \Rightarrow \alpha\beta \in A_{k+e}$. Очевидно, що якщо $\forall$ скінч. сум масів $\sum_k \alpha_k$, де $\alpha_k \in H^k(X, R)$ і $\sum_e \beta_e$, де $\beta_e \in H^e(X, R)$ визначити добуток "за дистрибутивністю"

$$\left(\sum_k \alpha_k \right) \cup \left(\sum_e \beta_e \right) := \sum_{k,e} \alpha_k \cup \beta_e,$$

це і даєсть на $H^*(X, R) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} H^k(X, R)$ потрібну структуру. 

def. 8.1. $H^*(X, R) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} H^k(X, R)$ ($\forall$ пр-гу X та кільця R)

зветься кільцем когомологій X з коеф. у R (зі структурою, що описана у Рл 8.2.).

Рем. Як було зазначено, це R -алгебра (з 1, асоц. і асоц. у зв'язності $\forall$ власн. R), зокрема

векторний пр-р над R зі стр. ас. косом. граду-
юваною алгеброю з 1, якщо R -поле. Кільце ко-
мологій є зомом. інваріантом (в силу інваріан-
тності $H^k(X, R)$ і $\cup$ -дуб. [Natchen, p. 210] про його
взаємодію з інд. ізоморфізмами) і часто дозволяє
"експансивно" описати коомології простору.

Ес. 8.3. У Ес. 7.6. ми встановили, що усі керр. інду-
кції у клім. комплексі $C_*^{CW}(RP^n)$ для клім.
розбиття $\{b^0, \dots, b^n\}$ дор. 0 або $\mathbb{Z}$. Поді, дивачи як
у Рем. після Рм. 7.1., нескладно показати, що
 $\partial_k^{CW} = 0 \quad \forall k$ у $C_*^{CW}(RP^n, \mathbb{Z}_2)$, отже усі $B_k^{CW}(RP^n, \mathbb{Z}_2) = 0$, і
 $H_k^{CW}(RP^n, \mathbb{Z}_2) \simeq Z_k^{CW}(RP^n, \mathbb{Z}_2) = C_k^{CW}(RP^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k = \overline{0, n}; \\ 0, & k > n. \end{cases}$

Поді за Сол. 8.4., оск. $\mathbb{Z}_2$ -поле, $\forall k$ група (клім.)
коомологій $H^k(RP^n, \mathbb{Z}_2) \simeq H_k(RP^n, \mathbb{Z}_2)^* \simeq H_k(RP^n, \mathbb{Z}_2)$,

Бо це 1-фун. гр-р над $\mathbb{Z}_2$ або 0: $H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k=0, n; \\ 0, & k > n. \end{cases}$

У [Katcher, p. 212-215] (див. там все розділ комплексного і кватерніонного випадків) показано, що при такому ото-
 топненні $\cup$ завжди як звичайний добуток у $\mathbb{Z}_2$,
 "зрізаний" за розмірністю: для $\alpha \in H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$, $\beta \in H^l(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$
 $\alpha \cup \beta = \begin{cases} \alpha\beta \in H^{k+l}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2), & k+l \leq n; \\ 0, & k+l > n. \end{cases}$ (зауважимо, що у
 $\mathbb{Z}_2$ $-1=1$, тому це не суперечить асоціативності). Ото-
 топлення з $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{k=0}^n H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ кожна k -та
 група з $\{0, t^k\}$, отримуючи т.ч. ізоморфізм мис-
 лям кільцем (алгеброю над $\mathbb{Z}_2$) на кільцем поліномів
 $\mathbb{Z}_2[t]$, де ми прирівнюємо усі поліноми степеня $> n+1$
 до 0, подібно факторизуючи за головним ідеалом
 (t^{n+1}) , що породжений t^{n+1} : $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[t] / (t^{n+1})$.
 Аби-но (починаючи з Ex. 7.4.) доводиться $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[t^2] / (t^{2n+2})$.

Кільця кільцевої манери дають можливість знаходити кільцеві правіс добутків у багатьох випадках.

def. 8.5. Нехай R -комутативне кільце ^{асоц.} ^{з 1}, A і B - (ліві і праві) R -модулі, тобто абелеві групи такі, що визн.
 $R \times A \rightarrow A : (\gamma, a) \mapsto \gamma a$, $R \times B \rightarrow B : (\gamma, b) \mapsto \gamma b$ з власн.
 (γ вар-ті для A ; для B так само)

$$\left. \begin{aligned} - (\gamma + \delta)a &= \gamma a + \delta a; \\ - \gamma(a+b) &= \gamma a + \gamma b; \\ - (\gamma\delta)a &= \gamma(\delta a); \\ - 1a &= a. \end{aligned} \right\} \forall \gamma, \delta \in R, a, b \in A.$$

Поти тензорний добуток A і B над R - це група, що задана твірними та співвідношеннями (з оп. +):

$$A \otimes_R B := \langle a \otimes b, a \in A, b \in B \mid \underbrace{a \otimes b + c \otimes d = c \otimes d + a \otimes b}_{\text{асоциативність}} \rangle,$$

$$(a+c) \otimes b = a \otimes b + c \otimes b, \quad a \otimes (b+d) = a \otimes b + a \otimes d, \quad \gamma a \otimes b =$$

$= a \otimes \gamma b$, $a, c \in A$, $b, d \in B$, $\gamma \in R$. Усе т.ч. абелева група
у нулі $0 \otimes 0 = a \otimes 0 = 0 \otimes b$ ($\forall a \in A, b \in B$) і обернені
(для твірних) $-a \otimes b = (-a) \otimes b = a \otimes (-b)$. Крім того,
 γ - модуль: $\gamma(a \otimes b) := \gamma a \otimes b = a \otimes \gamma b$.

Впр. 8.1. Показати універсальну властивість тензорного добутку: $\forall$ R -лінійного $\varphi: A \times B \rightarrow C$ (тобто A, B, C R -модулі, $\varphi(a+c, b) = \varphi(a, b) + \varphi(c, b)$, $\varphi(a, b+d) = \varphi(a, b) + \varphi(a, d)$, $\varphi(\chi a, b) = \varphi(a, \chi b) = \chi \varphi(a, b) \forall a, c \in A, b, d \in B, \chi \in R$) $\exists!$ R -лінійне $\psi: A \otimes B \rightarrow C$ таке, що $a \otimes b \mapsto \varphi(a, b) \forall a \in A, b \in B$ (R -ліній. знову не буває. Як у окр. випадку вект. пр-тів: $\psi(e+f) = \psi(e) + \psi(f)$;
 $\psi(\chi e) = \chi \psi(e) \forall e, f \in A \otimes B, \chi \in R$).

Лем. $\forall$ топ. пр-тів X, Y канон. проєкції $p_X : X \times Y \rightarrow X$:

$(x, y) \mapsto x$ та $p_Y : X \times Y \rightarrow Y : (x, y) \mapsto y$ непер., а отже

$\forall k \in \mathbb{N}_+$ індукують гом-зми γ (синг.) коомологій $\forall G$

$$(p_X)_k^* : H^k(X, G) \rightarrow H^k(X \times Y, G), (p_Y)_k^* : H^k(Y, G) \rightarrow H^k(X \times Y, G).$$

Для кільця $G = R$ це може можна визначити на синг

уих груп, подібно на кільцях, побудувавши од. мор

$$p_X^* : H^*(X, R) \rightarrow H^*(X \times Y, R), p_Y^* : H^*(Y, R) \rightarrow H^*(X \times Y, R).$$

Вопр. 8.5 Описати детально p_X^*, p_Y^* і показати, що це

гом-зми кільця (насправді так визначений гом-зм

$$f^* : H^*(Y, R) \rightarrow H^*(X, R) \quad \forall \text{ непер. } f : X \rightarrow Y \text{ та кільця } R).$$

Лем. 8.6 Зовнішнім добутком γ ^(синг.) коомологій топ. пр-тів

X та Y над кільцем R (γ керр. γR) зветься

$$\chi : H^*(X, R) \times H^*(Y, R) \rightarrow H^*(X \times Y, R) : (\alpha, \beta) \mapsto$$

$\mapsto p_X^*(\alpha) \cup p_Y^*(\beta)$. Оск. R -білінійне (чому?), для
дсоз. ком. кільця $R \geq 1$ в силу універсальності (Вопр. 8.4.)

однозначно вычислена Higobranse (R-minime)

$$H^*(X, R) \otimes_R H^*(Y, R) \rightarrow H^*(X \times Y, R)$$

также, что $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \times \beta \quad \forall \alpha \in H^*(X, R), \beta \in H^*(Y, R)$.

Вопрос также является Higobranse (тензорный).

Тл. 8.2. (Формула Крюппера). Нехай X та Y - компактні
пр-ри, R - асоц. ком. кільце з 1, і нехай $\forall k \in \mathbb{Z}_+$
 $H^k(Y, R)$ - вільний скінченно породжений R -модуль (зо-
крема для R -модуля це означає, що $\dim H^k(Y, R) < \infty$ як
 R -векторного пр-ру). Тоді зовнішній добуток

$$H^*(X, R) \otimes_R H^*(Y, R) \rightarrow H^*(X \times Y, R)$$

є ізоморфізмом R -модулів (тобто R -лінійним та
біективним).

Реш. Тл. ч., в умовах Тл. 8.2. можна описати кою-

гомоїї $X \times Y$ через кон. X та Y . Доведемо,
 ільш детальні ф-ли та приклади гв. y [Katcher,
 p. 218-230]; там же на p. 268-280 гв. варіант для
 гоомії. Опис ф-ли Кроннема в термінах зовніш-
 нх форм на м. многовидах (у гооміях де Рамі)
 гв. y [Bott, Tu].

Дуальність Пуанкаре

Детальне обговорення тем, що пов'язані з г. П., гв. y [Katcher, p. 230-260]. Тут наведемо лише саму
 теорему:

Тн. 8.3. (Дуальність Пуанкаре). $\forall$ компактного орієнтовного
 n -вимірного многовида $M \forall k \in \overline{0, n}$

$$H^k(M) \cong H_{n-k}(M).$$

Рем. Орієнтовність м. многовидів - гв. курс "Диф. геом. мн.", y
 заг. випадку - гв. [Katcher]. Впр. 8.6. Знайти приклади
 справедливості та несправедливості г. П. y обчислену раніше.