

Тепер явно вивисимо φ -лу для $\partial_k^{sw} \forall k \geq 2; G = \mathbb{Z}$:

Рн. 7.4. Нехай $B^k = \varphi^k(\mathcal{D}^k)$ — k -вим. кінцева кінт. кр-лу X , $k \geq 2$. Згідно з власт. (C) у лев. 6.2., образ мені $\varphi^k(\partial \mathcal{D}^k = S^{k-1})$ під дією характеристичного відобр. φ^k цієї кінт. перетинається лише зі своїм. кількістю $(k-1)$ -вим. кінт. кр-лу.

Нехай це $B_1^{k-1}, \dots, B_m^{k-1}$. Тоді в групі $C_{k-1}^{sw}(X)$

$$\partial_k^{sw} B^k = \sum_{i=1}^m [B^k : B_i^{k-1}] B_i^{k-1}$$

де коефіцієнти інцидентності $[B^k : B_i^{k-1}]$ обчислюються наступним чином: $\forall i$ нехай $P_i: X_{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ — канонічна проєкція на $X_{k-1} / (X_{k-1} \setminus \varphi_i^{k-1}(B^{k-1}))$ (тобто, її композиція з каноніфізацією цього факторпростору $\in S^{k-1}$), де $\varphi_i^{k-1}: \mathcal{D}^{k-1} \rightarrow X_{k-1}$ — характеристичне відобр. B_i^{k-1} . Тоді

$$[B^k : B_i^{k-1}] = \deg(P_i \circ \varphi^k|_{S^{k-1}}).$$

Реш. Пусть $\varphi^k|_{S^{k-1}} : S^{k-1} \rightarrow X_{k-1}$ снова не за власт, (C), тогда
 отображена непрерывна кан. $p_i \circ \varphi^k|_{S^{k-1}} : S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ и степень вы-
 значается точно з лем. 5.9. Тогда $[S^k : S^{k-1}]^{\in \mathbb{Z}}$ кор. выначенный (не
 заменить big zero-зна на S^{k-1}), оск. $\deg(f \circ g) =$
 $= \deg f \cdot \deg g$, а $\forall$ zero-зна f $\deg f = 1$ в саму моно-
идичну інв-ти $M_{k-1} : f$ індукує із-м груп, що пере-
водить твірну y твірну. Т.ч., композиція з $\forall$ zero-зна
 не змінює степінь відображення.

► Розглянемо комутативну діаграму ($\forall i = \overline{1, m}$):

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{sing} & & \text{sing} & & \text{sing} \\
 H_k(D^k, S^{k-1}) & \xrightarrow{\delta_k} & H_{k-1}(S^{k-1}) & \xrightarrow{(p_i \circ \varphi^k|_{S^{k-1}})^{(k-1)*}} & H_{k-1}(S^{k-1}) \\
 \downarrow (\varphi^k|_{S^{k-1}})^{(k-1)*} & & \downarrow (\varphi^k|_{S^{k-1}})^{(k-1)*} & & \uparrow (q_i)^{(k-1)*} \\
 \text{sing} & & \text{sing} & & \text{sing} \\
 H_k(X_k, X_{k-1}) & \xrightarrow{\delta_k} & H_{k-1}(X_{k-1}) & \xrightarrow{d^{(k-1)*}} & H_{k-1}(X_{k-1}/X_{k-2}) \\
 \searrow \partial_k^{CW} & & \downarrow \tilde{f}^{(k-1)*} & & \nearrow \approx \leftarrow \text{Th. 6.2.} \\
 & & H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2}) & &
 \end{array}$$

Пусть "лівий верхній квадрат" - частина комут. діагр.

з точкою послідовностей кліт. пар $(\mathbb{D}^k, S^{k-1})$ (як у Ес.6.16)
 і (X_k, X_{k-1}) , а отже комутативний (Рч.1.6.). Крім того,
 з точності першої з цих посл. функ., що "верхній" ∂_k - ізо-
 морфізм (бачили це у Ес.6.16). Комутативності у "правому
 верхньому квадраті" функ. з функціональності та предст.
 відобр. ρ_i з умови у вигляді $\rho_i = \varphi_i \circ \varphi$, де $\varphi: X_{k-1} \rightarrow$
 $\rightarrow X_{k-1}/X_{k-2}$ та $\varphi_i: X_{k-1}/X_{k-2} \rightarrow X_{k-1}/(\underbrace{X_{k-1} \setminus \varphi_i^{k-1}(B^{k-1})}_{X_{k-2}})$ - каноніч-
 ні проєкції (зокр., φ_i розуміємо як канон. проєкцію на
 факторгр-р за діючого морфізму $X/Y \rightarrow X/Z$, де $Y \subset Z$,
 коректно визн. на класах екв-ст $[x]_Y \mapsto [x]_Z$, бо $x \sim_Y y \Rightarrow$
 $\Rightarrow x, y \in Y \subset Z \Rightarrow x \sim_Z y$ (за новим визн. екв.), і вона переп. як
 факторизація переп.). "Лівий нисхідний трикутник" і його
 комутативність - це просто Лем.7.2. відобр. ∂_k^{sw} Карешні,
 справа знову маємо із н. з Тн.6.2. для кліт. пар (X_{k-1}, X_{k-2}) .

Впр. 4.7. Перевірити комутативність "правого лисасово тупиктика".

Оскільки, діаграма дійсно комутативна. Позначимо через $\mathbb{Z}$ твірну групи $H_k^{\text{sing}}(\mathbb{D}^k, S^{k-1}) \cong [\text{Th. 6.2.}] \cong H_k^{\text{sing}}(\mathbb{D}^k/S^{k-1}) \cong [\text{Ex. 6.16}] \cong \mathbb{Z}$. Тоді в рівності $\partial_k^{\text{CW}} \sigma^k = \sum_{\bar{y}=1}^m [\sigma^k : \sigma_{\bar{y}}^{k-1}] \sigma_{\bar{y}}^{k-1} \stackrel{\cong}{=} S^k \sigma^k$ (оскільки з твірних групи $C_k^{\text{CW}}(X) = H_k^{\text{sing}}(X_k, X_{k-1}) \cong \bigoplus_{A_k} \mathbb{Z}^{\bar{y}}$) може бути предст. як $(\varphi^k)_{k*}^{\text{CW}}(1)$. У свою чергу, $\sigma_{\bar{y}}^{k-1}$ твірні $C_{k-1}^{\text{CW}}(X) = H_{k-1}^{\text{sing}}(X_{k-1}, X_{k-2}) \cong [\text{Th. 6.2.}] \cong H_{k-1}^{\text{sing}}(X_{k-1}/X_{k-2})$, що ототожнюються з хар. вибор. серед Y $X_{k-1}/X_{k-2} \cong \bigvee_{A_{k-1}} S^{k-1}$ (Впр. 6.19.). Оскільки $q_i : X_{k-1}/X_{k-2} \rightarrow S^{k-1}$ зберігає (при такому ототожненні за гомео-знач.) i -ту сферу, а решту переводить у точку (для $\forall \bar{y} \neq i$ $q_i \circ \varphi_{\bar{y}}^{k-1} = x$ - пост. вибор. $x \in S^{k-1}$ $\Rightarrow (q_i)_{(k-1)*} \varphi_{\bar{y}}^{k-1} = \varphi_x \Rightarrow [\varphi_x \in B_{k-1}^{\text{sing}}(S^{k-1})] \Rightarrow \Rightarrow (q_i)_{(k-1)*} (\varphi_{\bar{y}}^{k-1} + B_{k-1}^{\text{sing}}(X_{k-1}/X_{k-2})) = 0$), $(q_i)_{(k-1)*} \left(\sum_{\bar{y}=1}^m [\sigma^k : \sigma_{\bar{y}}^{k-1}] \right)$.

$$\sigma_{\bar{y}}^{k-1}) = [\sigma^k, \sigma_{\bar{y}}^{k-1}] \cdot 1, \text{ де } 1 - \text{мбизма } H_{k-1}^{\text{sing}}(S^{k-1}) \cong \mathbb{Z}.$$

$$\text{Отже, } ((\varphi_i)_{(k-1)*} \circ \partial_k^{\text{CW}} \circ (\varphi^k)_{k*}^{\text{CW}})(1) = [\sigma^k, \sigma_{\bar{y}}^{k-1}] \cdot 1.$$

(тут же ізоморфізм $H_{k-1}^{\text{sing}}(X_{k-1}, X_{k-2}) \rightarrow H_{k-1}^{\text{sing}}(X_{k-1}/X_{k-2})$ з Лем. 6.2.)

З іншого боку, за комутативністю діаграми і dim степеня, ми не втрачаємо рівності

$$((P_i \circ \varphi^k|_{S^{k-1}})_{(k-1)*} \circ \delta_k)(1) = [\delta_k - \bar{y} \cdot \pi] = (P_i \circ \varphi^k|_{S^{k-1}})_{(k-1)*}(1) = \deg(P_i \circ \varphi^k|_{S^{k-1}}) \cdot 1, \text{ що і потрібно. } \triangle$$

Лем. Якщо $G = \mathbb{Z}$ тут не є абелевою групою: значить $C_x^{\text{CW}}(X)$, легко отримати $C_x^{\text{CW}}(X, G) \forall$ аб. гр. G . Дійсно, $\forall$ ланцюг з $C_k^{\text{CW}}(X, G)$ має вигляд $\sum_{i=1}^m g_i \sigma_{\bar{y}}^k$. Погоди при $k \geq 2$ (випадок $k=1$ розглядаємо раніше у Лем. 7.3.) за

Рл. 7.4, маємо в силу лінійності ∂_k^{CW} :

$$\partial_k^{\text{CW}} \left(\sum_{i=1}^m g_i \sigma_{\bar{y}}^k \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{\bar{y}=1}^{m_i} [\sigma_{\bar{y}}^k, \sigma_{\bar{y}}^{k-1}] g_i \sigma_{\bar{y}}^{k-1},$$

де $\forall i = \overline{1, m} \quad \{\sigma_{\bar{y}}^{k-1}\}_{\bar{y}=1}^{m_i} -$ усі $(k-1)$ -век. кімнати, що

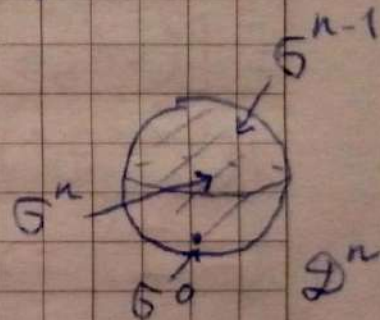
перетинаються з $\varphi_i^k(S^{k-1})$ (де φ_i^k - кан. відобр. σ_i^k),
 $[\sigma_i^k : \sigma_{i-1}^{k-1}]$ обчислюються як у л. 7.4., а $l g_i$ для $l \in \mathbb{Z}$
 означає $\underbrace{g_i + \dots + g_i}_l$ для $l > 0$, $\underbrace{(-g_i) + \dots + (-g_i)}_{-l}$ для $l < 0$ і
 0 для $l = 0$. Тим самим можна робити для симп. і симп. лану. комплексів.

Впр. 7.8. Перевірити справедливості цього твердження. По-
 будувати функтор, що переводить $C_*(X)$ у $C_*(X, G)$ у
 заг. випадку (для симп., сф., або квіт. маніфолдів). Він
 зветься функтором тензорного добутку на G і позн.
 зазвичай $\otimes G$ (цього існування забезпечується тим, що
 $C_k(X) \otimes G \in$ (лівих і правих) модулей над кільцем $\mathbb{Z}$).

Ес. 7.5. Розглянемо квіт. розбиття $\mathcal{D}^n$ з Ес. 6.7.:
 $n=1$: $\{\sigma_{-1}^0, \sigma_1^0, \sigma^1\}$, де $\sigma_{-1}^0 = \{-1\}$, $\sigma_1^0 = \{1\}$ - кінці
 відр. $\mathcal{D}^1 = \sigma^1 = [-1, 1]$. Т.ч., $C_k^{cw}(\mathcal{D}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & k=0; \\ \mathbb{Z}, & k=1; \\ 0, & k>1 \end{cases}$, $\partial_k^{cw} = 0$ при
 $k \neq 1$, і $\partial_1^{cw} \sigma^1 = \sigma_1^0 - \sigma_{-1}^0$ за Сол. 7.3. Тим же $H_1^{cw}(\mathcal{D}^1) \simeq \mathbb{Z}$

$\simeq [B_1^{CW}(\mathcal{D}^1) = 0] \simeq Z_1^{CW}(\mathcal{D}^1) = \mathbb{Z}$ оскільки $\partial_1^{CW} = 0$, і $B_0^{CW}(\mathcal{D}^1) = \text{Im } \partial_1^{CW} \simeq \mathbb{Z}$.
 Також дослівно так само як для сим. гомологій у Рн. 5.2. (із заміною хар. відобр. (сим. симплексів) на клітини), отримujemo $H_0^{CW}(\mathcal{D}^1) \simeq \mathbb{Z}$. В інших розмірностях k $H_k^{CW}(\mathcal{D}^1) = 0$, бо $C_k^{CW}(\mathcal{D}^1) = 0$. Точн., $H_k^{CW}(\mathcal{D}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$ як і повинно бути за гомот. л.в. для стягнутого $\mathcal{D}^1$. Зокр., $(-0+...)$ сим. хар.-ну можна обчислити як $\sum_k (-1)^k \text{char } H_k^{CW}(\mathcal{D}^1) = 1$ або як $\sum_k \text{char } C_k^{CW}(\mathcal{D}^1) = 2-1+0-... = 1$. Звичайно, кіркування $\forall$ ур. коэф. b_i тут ті самі.

Рн. 5.3. $\{b^0, b^{n-1}, b^n\}$, де $\mathcal{D}^n = b^n$ і $\partial \mathcal{D}^n = S^{n-1} = b^{n-1}$, а $\{b^{n-1}, b^0\}$ - кліт. розб. S^{n-1} як у



Ес. 6.6. Також ап-но до Ес. 4.3. $\partial_k^{CW} = 0 \quad \forall k \neq n$ (при $k > n$ - бо немає клітин цих розмірностей) для $C_k^{CW}(\mathcal{D}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, n-1, n \\ 0 & \text{у інш. вкл.} \end{cases}$
 Згадаємо також, що хар. відобр. b^n тут - це топологія

$\varphi^n: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$, тогду $\varphi^n|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} = X_{n-1}$ мене
 монотонне. Дуга єдиної $(n-1)$ -вим. клітини σ^{n-1} її хар.
 відом. $\varphi^{n-1}: \mathbb{D}^{n-1} \rightarrow X_{n-1} = S^{n-1}$ переобразить B^{n-1} у сферу
 без точки $X_{n-1} \setminus \sigma^0$ (воно описане у Ек. 6.6.), тогду
 $X_{n-1} \setminus \varphi^{n-1}(B^{n-1}) = \sigma^0$, і можна просто ототожнити
 фактор-пр-р за 1 точкою $X_{n-1}/(X_{n-1} \setminus \varphi^{n-1}(B^{n-1}))$ з $X_{n-1} =$
 S^{n-1} , а канон. пр. р вивести мене монотонним відом.
 Тогду $[\sigma^n: \sigma^{n-1}] = [\text{пр. 7.1.}] = \deg(p \circ \varphi^n|_{S^{n-1}}) = \deg \text{id}_{S^{n-1}} =$
 $= [(\text{id}_{S^{n-1}})_{(n-1)*} - \text{ізоморфізм}] = 1 \Rightarrow \exists_{\text{CW}}^n \sigma^n = \sigma^{n-1}$. Тогду
 $H_n^{\text{CW}}(\mathbb{D}^n) \simeq [B_n^{\text{CW}}(\mathbb{D}^n) = 0] \simeq \mathbb{Z}_n^{\text{CW}}(\mathbb{D}^n) = 0$, і $B_{n-1}^{\text{CW}}(\mathbb{D}^n) = \mathbb{Z}_{n-1}^{\text{CW}}(\mathbb{D}^n)$
 $(\simeq \mathbb{Z}) \Rightarrow H_{n-1}^{\text{CW}}(\mathbb{D}^n) = 0$. Лемма при описується $\underbrace{(\mathbb{C}_{n-1}^{\text{CW}}(\mathbb{D}^n))}$
 як для сфери у Ек. 7.3.: $H_k^{\text{CW}}(\mathbb{D}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$, як і певно
 бути за пом. інв-цію, Ейл. хар-ну можна описати як
 $\sum_k \underbrace{\text{rank}}_{(-1)^k} H_k^{\text{CW}}(\mathbb{D}^n) = 1 - 0 + \dots = 1$ або як $\sum_k \underbrace{\text{rank}}_{(-1)^k} C_k^{\text{CW}}(\mathbb{D}^n) = 1 - 0 + \dots + (-1)^{n-1} +$

$$+ (-1)^n + 0 + \dots = 1.$$

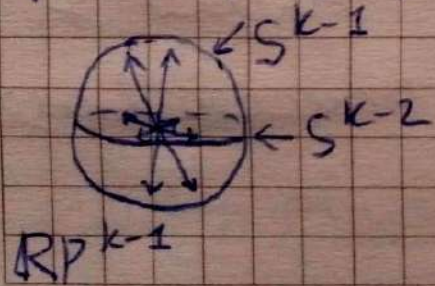
Лем. 7.6. Згідно з Лем. 6.8., $\mathbb{R}P^n$ має клітинну структуру $\{\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^n\}$, де $\forall k = \overline{0, n}$ $\sigma^k = X_k = \mathbb{R}P^k$. Задаємо, (тут $\hat{X} = \mathbb{R}P^n$)

що кан. відобр. $\varphi^k: \mathcal{D}^k \rightarrow X_k = \mathbb{R}P^k$ відбувалося як кан. проєкція на $\mathcal{D}^k / \sim \cong \mathbb{R}P^k$, а $\varphi^k|_{S^{k-1}}: S^{k-1} \rightarrow X_{k-1} = \mathbb{R}P^{k-1}$ як кан. проєкція на $S^{k-1} / \sim \cong \mathbb{R}P^{k-1}$ (тут $k = \overline{1, n}$),

де у групі виникла факторизація здійснюється ото-тенсерами грам. протилежних точок S^{k-1} . Тут $k=1$

$\partial_1^{CW} \sigma^1 = \sigma^0 - \sigma^0 = 0$ за Лем. 7.3., тому далі вивчаємо $k = \overline{2, n}$. $X_{k-2} = \mathbb{R}P^{k-2}$ вкладається у $X_{k-1} = \mathbb{R}P^{k-1}$ як

факторизація екватора, тобто сфери S^{k-2} з нульовою



коорд. x^{k-1}

В основ. коорд. $\mathbb{R}P^{k-1} = \{(x^0, \dots,$

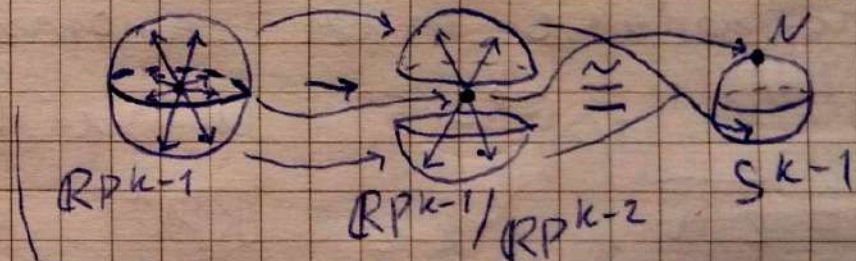
$x^{k-1}: 0 \dots 0) \in \mathbb{R}P^n \mid (x^0, \dots, x^{k-1}) \neq 0\} \subset \mathbb{R}P^{k-2} =$

$= \{(x^0, \dots, x^{k-2}: 0 \dots 0) \mid (x^0, \dots, x^{k-2}) \neq 0\}.$

у свого чергу, хар. відобр. φ^{k-1} єдині $(k-1)$ -вим. клі-
тини σ^{k-1} переводить в B^{k-1} у $\{(x^0: \dots: x^{k-1}: 0: \dots: 0) | x^{k-1} \neq 0\} =$
 $= X_{k-1} \setminus X_{k-2} = \mathbb{R}P^{k-1} \setminus \mathbb{R}P^{k-2}$. Це об'єднання верхньої
 $(x^{k-1} > 0)$ та нижньої $(x^{k-1} < 0)$ відкр. напівсфер S^{k-1} ,
 факторизоване за ототожненням діам. протилежних

точок. Тому канон. пр. $p: X_{k-1} / (X_{k-1} \setminus \varphi^{k-1}(B^{k-1})) =$
 $= \mathbb{R}P^{k-1} / \mathbb{R}P^{k-2}$ можна розуміти як канон. пр. цього фактор-
 простору, що ідентифікує S^{k-1} :

факторизую екватора S^{k-2} відкр.
 одна точка (скажімо, N), а

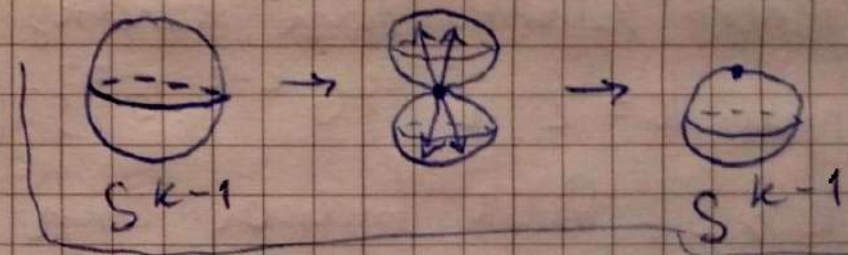


об'єднання відкр. напівсфер - півтора сфери. Згідно з
л. 7.1, $[\sigma^k: \sigma^{k-1}] = \deg(p \circ \varphi^k|_{S^{k-1}})$. За описом вище
 (див. також л. 6.8), $\forall y = (y^1, \dots, y^k) \in S^{k-1}$

$$y \xrightarrow{\varphi_k / \psi^{k-1}} \begin{pmatrix} y^1 & \dots & y^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{cases} (\varphi_N^{-1} \circ \psi)(y^1, \dots, y^{k-1}), y^k > 0; \\ (\varphi_N^{-1} \circ \psi)(-y^1, \dots, -y^{k-1}), y^k < 0; \\ N = (0, \dots, 0, 1), y^k = 0, \quad (*) \end{cases}$$

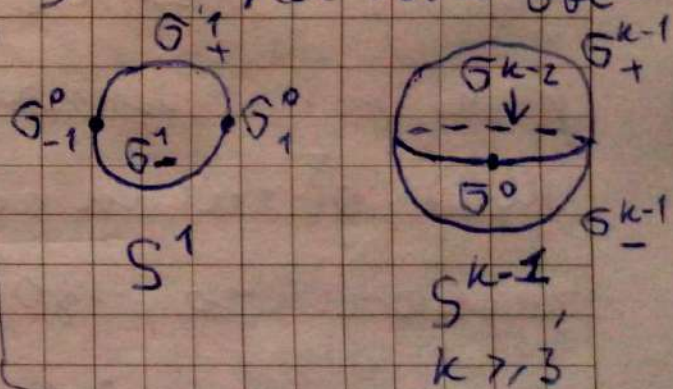
де $\psi: B^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ — гомеоморфізм з Лем. 6.6, а $\varphi_N^{-1}: \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow S^{k-1} \setminus \{N\}$ — обернена стереографічна проекція. При цьому y та ψ ми підставляємо результати ортогонального проєктування $(y^1, \dots, y^k)$ або діам. прот. $(-y^1, \dots, -y^k)$ на $y^k = 0$. В силу сказаного вище, це переп. відобр. $S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$, його можна уявляти собі як "перетягування" сфери за екватором з наступною факторизацією:

Щоб обчислити його степінь, зауважимо, що з Лем. 5.9 згідно



з Лем. 7.1 можна використати клітинні цикли замість сингулярних (просто взяти спарення з sign -ізоморфізмами, що зберігають твірні). Розглянемо

настільки клім. стр-ру на S^{k-1} . Нехай $\varphi_{\pm}^{k-1}(\text{sign}, \varphi_{\pm}^{k-1}) : \mathbb{D}^{k-1} \rightarrow S^{k-1} : (y^1, \dots, y^{k-1}) \mapsto (y^1, \dots, y^{k-1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{k-1} (y^i)^2})$.
 Воно перен. і переводить $\mathbb{D}^{k-1}$ у $\underbrace{y^{(na)}}$ замкнену верхню (sign, $(**)$
 півсферу S^{k-1} , а B^{k-1} гомеоморфно відобр. на
 sign. відкриту півсферу, причому $\varphi_{\pm}^{k-1}(S^{k-2}) = \left[\sum_{i=1}^{k-1} (y^i)^2 = 1 \right.$
 $\left. \text{в точках } S^{k-2} \right] = \{(y^1, \dots, y^{k-1}, 0)\} = 2\varphi_{\pm}^{k-1}(B^{k-1})$ - екватор S^{k-1} ,
 тобто S^{k-2} . Тл.ч. $\sigma_{\pm}^{k-1} := \varphi_{\pm}^{k-1}(\mathbb{D}^{k-1})$ - клітини з sign.
 кар. відобр. на спільним образом менш S^{k-2} . На них вве-
 демо клім. стр. станд. чинки: $\{\sigma_{-1}^0, \sigma_1^0\}$
 при $k=2$ і $\{\sigma_{-1}^{k-2}, \sigma_1^0\}$ (за Ек.6.6.) - при
 $k \geq 3$. Для такої стр. $C_{k-1}^{sw}(S^{k-1}) =$
 $= \{m_+ \sigma_+^{k-1} + m_- \sigma_-^{k-1} \mid m_+, m_- \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}^2$, і



при $k=2$: за Сол.4.3, якщо параметризувати дуги $\sigma_{\pm}^1$ з
 початком у σ_{-1}^0 та кінцем у σ_1^0 ,

(мыт для S^1)

$\downarrow \partial_1^{CW} (m_+ \sigma_+^1 + m_- \sigma_-^1) = m_+ (\sigma_1^0 - \sigma_{-1}^0) + m_- (\sigma_1^0 - \sigma_{-1}^0) = (m_+ + m_-) \sigma_1^0 - (m_+ + m_-) \sigma_{-1}^0$. Оск. $\sigma_{-1}^0, \sigma_1^0 \in \text{мбврннх}$ у $C_0^{CW}(S^1) \cong \mathbb{Z}^2$, збигса маемо $Z_1^{CW}(S^1) = \text{Кер } \partial_1^{CW} = \{m(\sigma_+^1 - \sigma_-^1) \mid m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$, моџмо $\sigma_+^1 - \sigma_-^1$ - мбврнн у $Z_1^{CW}(S^1) \cong [B_1^{CW}(S^1) = 0] \cong H_1^{CW}(S^1)$ (моџнне, формално це сумннскн клас за $B_1^{CW}(S^1) = 0$).

при $k \geq 3$: ан-но го Ес. 7.5, знасоднмо кер. индентности $[\sigma_{\pm}^{k-1} : \sigma_{\pm}^{k-2}] = 1$ (ак степнн топологско вкрџн; гув. моџнн практнх; для нас мыт ваекнво лнне, цго $[\sigma_+^{k-1} : \sigma_{-}^{k-2}] = [\sigma_-^{k-1} : \sigma_+^{k-2}]$, оск. $\varphi_+^{k-1}|_{S^{k-2}} = \varphi_-^{k-1}|_{S^{k-2}}$, ак бачннн). Тлнху (мыт для S^{k-1})

$\downarrow \partial_{k-1}^{CW} (m_+ \sigma_+^{k-1} + m_- \sigma_-^{k-1}) = (m_+ + m_-) \sigma^{k-2}$ за Рн. 4.4.
Омнне (ан-но $k=2$) $Z_{k-1}^{CW}(S^{k-1}) = \text{Кер } \partial_{k-1}^{CW} = \{m(\sigma_+^{k-1} - \sigma_-^{k-1}) \mid m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$; $\sigma_+^{k-1} - \sigma_-^{k-1}$ - мбврнн у $Z_{k-1}^{CW}(S^{k-1}) \cong H_{k-1}^{CW}(S^{k-1})$.

Повернемося до $\mathbb{R}P^n$. Знайдене вище означає, що, обчислюючи $\deg(p \circ \varphi^k |_{S^{k-1}})$ за дов. клім. покриттям, можна взяти $\sigma_+^{k-1} - \sigma_-^{k-1}$ (можливо, сумісний клас за $B_{k-1}^{CW}(S^{k-1}) = 0$, що буде позн. так само) як твірну M_{k-1}^{CW} для області вищ. S^{k-1} . Разом з тим, для обл. значень S^{k-1} заданого "звичайного" клім. стр-ру з Ек. 6.6. та твірну $\sigma^{k-1} \leftarrow \leftarrow_{\text{(тип для } S^{k-1})}$ згідно з Ек. 7.3. (знову те, сум. клас за $B_{k-1}^{CW}(S^{k-1}) = 0$). При цьому згідно з фр-лами вище для $y = (y^1, \dots, y^{k-1}) \in \mathbb{D}^{k-1}$

$$(p \circ \varphi^k |_{S^{k-1} \circ \varphi_+^{k-1}})(y) = \begin{cases} (\varphi_N^{-1} \circ \psi)(y), & y \in B^{k-1}; \\ N, & y \in S^{k-2} \end{cases} = \varphi^{k-1}(y),$$

де φ^{k-1} - кан. відобр. σ^{k-1} згідно з Ек. 6.6. Аж-но,

$$(p \circ \varphi^k |_{S^{k-1} \circ \varphi_-^{k-1}})(y) = \begin{cases} (\varphi_N^{-1} \circ \psi)(y), & y \in B^{k-1}; \\ N, & y \in S^{k-2} \end{cases} = \varphi^{k-1}(-y) =$$

$$= (\beta \circ \varphi^{k-1})(y), \text{ де } \beta: S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}: (y^1, \dots, y^{k-1}, y^k) \mapsto$$

$$\mapsto (-y^1, \dots, -y^{k-1}, y^k) - \text{симетрія відносно осі } Oy^k. \text{ Отж.}$$

рівність випливає з того, що Ψ непарне ($\Psi(-y) = -\Psi(y)$ $\forall y$), і $\Phi_N \circ \mathcal{S} = -\Phi_N$ за побудовою. З побудови індукованих відобр. γ

Лем. 7.3, випливає, що, як-небудь самі, гомології,

$$\begin{aligned} (p \circ \Phi^k|_{S^{k-1}})_{(k-1)*}^{cw} (\sigma_+^{k-1} - \sigma_-^{k-1}) &= p \circ \Phi^k|_{S^{k-1} \circ \Phi_+^{k-1}} - p \circ \Phi^k|_{S^{k-1} \circ \Phi_-^{k-1}} = \\ &= \Phi^{k-1} - \mathcal{S} \circ \Phi^{k-1} = (\text{id}_{S^{k-1}})_{(k-1)*}^{cw} \sigma^{k-1} - \mathcal{S}_{(k-1)*}^{cw} \sigma^{k-1} = (\deg \\ &\text{id}_{S^{k-1}} - \deg \mathcal{S}) \sigma^{k-1} \Rightarrow \deg(p \circ \Phi^k|_{S^{k-1}}) = \deg \text{id}_{S^{k-1}} - \deg \mathcal{S}, \end{aligned}$$

в силу одн. степеня. Оскільки $\deg \text{id}_{S^{k-1}} = 1$ і $\deg \mathcal{S} = (-1)^{k-1}$ (за рез-татами з курсу "Основи алг. топ." і гомотопічний степінь дорівнює гомотопічному за Вопр. 5.4; тут використовуємо, що $\mathcal{S}$ - конт. $k-1$ симетриї відн. коорд. інертності, кожна з яких має степінь -1 ; або

Вопр. 7.9 Перевірити безпосередньо (у сфер. або кінт. гомологіях), що степінь симетриї відн. $\forall$ коорд. інертності дор. -1 , а отже $\deg \mathcal{S} = (-1)^{k-1}$ (див. [Katcher, p. 134]).

$$[\zeta^k : \zeta^{k-1}] = \deg(p \circ \varphi^k|_{\zeta^{k-1}}) = 1 + (-1)^k.$$

Іншим способом це довести — помітивши, що $p \circ \varphi^k|_{\zeta^{k-1}}$ маже в силу φ -л (*) використати ці φ -ли та опис степеня м. відобр. (напр., у [М. Kirsch, Differential topology, p. 122]).

Ця φ -ла фірна і для $k=1$: $\partial_k^{CW} \zeta^k = (1 + (-1)^k) \zeta^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Тл.ч.,

$$C_k^{cw}(RP^n) = \begin{cases} \{m \cdot 5^k \mid m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}, & k = \overline{0, n}; \\ 0, & k > n; \end{cases}$$

$$Z_k^{cw}(RP^n) = \begin{cases} C_k^{cw}(RP^n) \cong \mathbb{Z}, & k = 0, k = \overline{1, n} \text{ не парне}; \\ 0, & k = \overline{2, n} \text{ не парне}, k > n; \end{cases}$$

$$B_k^{CW}(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \{2m \sigma^k \mid m \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}, & k = \overline{1, n-1} \text{ нечетные;} \\ 0, & k = \overline{0, n} \text{ четные, } k \geq n. \end{cases}$$

Получим

$$H_k^{CW}(\mathbb{R}P^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, k=n \text{ нечетные;} \\ \mathbb{Z}_2, & k = \overline{1, n-1} \text{ нечетные;} \\ 0, & k = \overline{2, n} \text{ четные, } k > n. \end{cases}$$

Оск. $\text{rank } \mathbb{Z}_2 = 0$ (верно?), едн. харак-ка $\chi(\mathbb{R}P^n) = \sum_k (-1)^k \text{rank } H_k^{CW}(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 1-0+\dots+(-1)^n = 1, & n \text{ нечетное;} \\ 1-0+\dots+(-1)^n = 0, & n \text{ четное} \end{cases} = \frac{1}{2}(1+(-1)^n)$; не не same как M_g^2 - компак. зб. по-ки $g \in \mathbb{N}$

$$\sum_k (-1)^k \text{rank } C_k^{CW}(\mathbb{R}P^n) = 1-1+1-\dots+(-1)^n + \dots$$

Ex. 7.7. Для крив. разбиения $\{\sigma^0, \sigma_{a_1}^1, \sigma_{a_2}^1, \dots, \sigma_{a_g}^1, \sigma_{b_1}^1, \dots, \sigma_{b_g}^1, \sigma^2\}$

Ex. 6.9 можно $C_k^{CW}(M_g^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, 2; \\ \mathbb{Z}^{2g}, & k=1; \\ 0, & k > 2, \end{cases} \quad \partial_k^{CW} = 0 \text{ при}$

$k \neq 1, 2$. Оск. 1-век. климат $\sigma_{a_i}^1, \sigma_{b_i}^1, i = \overline{1, g}$ начинаются и заканчиваются у σ^0 , для каждой i мы имеем за Сол. 4.3. $\partial_{CW}^1 \sigma_{a_i}^1 = \partial_{CW}^1 \sigma_{b_i}^1 = \sigma^0 - \sigma^0 = 0$. Т.ч., $\partial_{CW}^1 = 0$. Значит,

що хар. відобр. $\varphi^2: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2 = M_g^2$ тут можна описати

як канон. проєкцію $\mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 / \sim \cong M_g^2$,

що задається розгорткою поверхні (тут ототожнено $\mathbb{D}^2$ з гомеоморфним до нього $4g$ -кутником розгортки). Зокр., $\varphi^2|_{S^1}: S^1 \rightarrow$

$X_1 = \mathbb{B}_{a_1}^1 \cup \dots \cup \mathbb{B}_{b_g}^1$ - канон. пр. S^1 на його

факторгр-р - букет $2g$ кіл. $\forall i = \overline{1, g}$ хар. відобр. $\varphi_{a_i}^1$

(відт., $\varphi_{b_i}^1$) клітини $\mathbb{B}_{a_i}^1$ ($\mathbb{B}_{b_i}^1$) - це парамет-

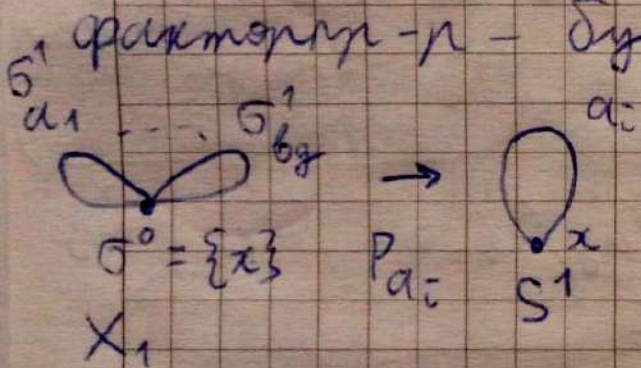
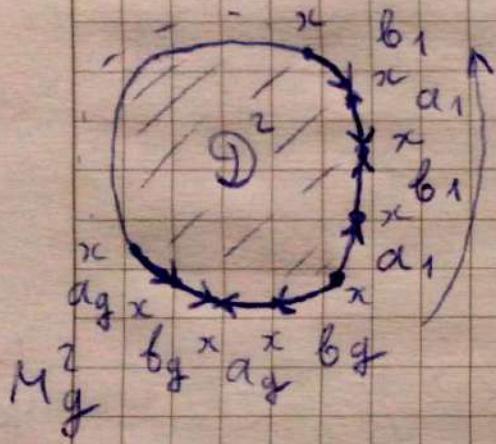
ризація відт. петлі, тому $X_1 \setminus \varphi_{a_i}^1(B^1)$ -

однорідна $\mathbb{B}_{a_1}^1 \cup \dots \cup \mathbb{B}_{a_i}^1 \cup \dots \cup \mathbb{B}_{b_g}^1$ (і анало для b_i);

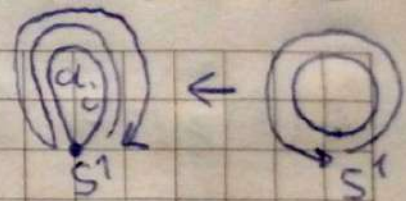
нехай $\rho_{a_i}: X_1 \rightarrow X_1 / (X_1 \setminus \varphi_{a_i}^1(B^1))$ - проєкція на факторгр-р,

що відт. петлі a_i й гомеоморфний S^1 ; анало, канон. пр.

$\rho_{b_i}: X_1 \rightarrow X_1 / (X_1 \setminus \varphi_{b_i}^1(B^1))$. Згідно з розгорткою, маємо



$P_{a_i} \circ \varphi^2|_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ — це відображення



послідовною повною проєкцією кола у двох протилежних напрямках (їого можна формально описати, напр., як

$$z = e^{2\pi i t} \rightarrow \begin{cases} e^{4\pi i t} = z^2, & t \in [0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow \text{Im } z > 0; \\ e^{4\pi i (1-t)} = z^{-2}, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \Leftrightarrow \text{Im } z \leq 0. \end{cases}$$

(для $S^1 \subset \mathbb{C}$)

Оскільки таке відобр. індукує нульовий гом-ом і функ. числа (чому?), в силу Лем. 5.4. його ступінь = 0. Але ж для b_i тому

за Лем. 4.7.

$$\partial_{CW}^2 \bar{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^g ([\bar{\sigma}^2 : \bar{\sigma}_{a_i}^1] \bar{\sigma}_{a_i}^1 + [\bar{\sigma}^2 : \bar{\sigma}_{b_i}^1] \bar{\sigma}_{b_i}^1) = \sum_{i=1}^g (\deg(P_{a_i} \circ \varphi^2|_{S^1}) \cdot \bar{\sigma}_{a_i}^1 + \deg(P_{b_i} \circ \varphi^2|_{S^1}) \cdot \bar{\sigma}_{b_i}^1) = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{a_i}^1 + \deg(P_{b_i} \circ \varphi^2|_{S^1}) \cdot \bar{\sigma}_{b_i}^1 = 0,$$

тобто $\partial_{CW}^2 = 0$. Тому усі $\partial_k^{CW} = 0$, і $B_k^{CW}(M_g^2) = 0 \Rightarrow$

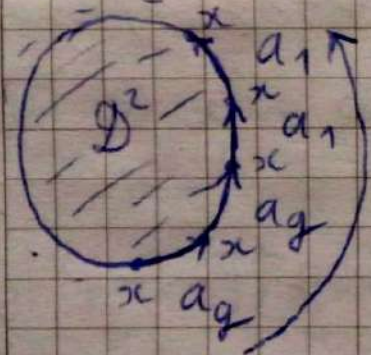
$$\Rightarrow H_k^{CW}(M_g^2) \simeq Z_k^{CW}(M_g^2) = C_k^{CW}(M_g^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0,2; \\ \mathbb{Z}^{2g}, & k=1; \\ 0, & k \geq 2. \end{cases}$$

$$\text{rang } H_k^{CW}(M_g^2) = \text{rang } C_k^{CW}(M_g^2) = \begin{cases} 1, & k=0,2; \\ 2g, & k=1; \\ 0, & k \geq 2. \end{cases}$$

Числа Бетті!
Ейлерова хар-ка

$\chi(M_g^2) = 1 - 2g + 1 - 0 + \dots = 2 - 2g$ (раніше в курсі топології ми отримували її за допомогою триангуляції, подібно як симпліційну, за ф-лою $V - E + F$).

Ех. 7.8 Для кожн. зв. неорієнт. поф-ті N_g^2 роду $g \in \mathbb{N}$ існує як у попер. прикладі з використанням клім. розбиття $\{\sigma^0, \sigma_{a_1}^1, \dots, \sigma_{a_g}^1, \sigma^2\}$ з Ех. 6.10. Тоді само $C_k^{CW}(N_g^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, 2; \\ \mathbb{Z}^g, & k=1; \\ 0, & k>2 \end{cases}$



$\partial_k^{CW} = 0$ при $k \neq 2$ (зокр. при $k=1$ - з Сол. 7.3).

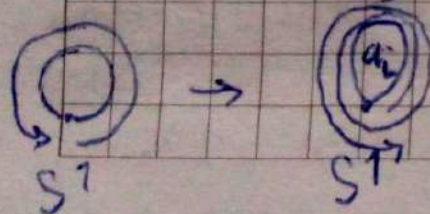
Хар. відобр. φ^2 клітини σ^2 і канон. проєкція

$$Pa_i : \begin{matrix} X_1 \\ \parallel \\ \sigma_{a_1}^1 \cup \dots \cup \sigma_{a_g}^1 \end{matrix} \rightarrow X_1 / (X_1 \setminus \varphi_{a_i}^1(B^1)) \simeq S^1 \text{ вказ.} \\ \underbrace{\quad}_{i=1, g}$$

(тут $X = N_g^2$)

додатково так само. Але тепер згідно з розгорнутою

$Pa_i \circ \varphi|_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ - це прохоронена коло фвікі у напрямі
напряму ($z \mapsto z^2$ для $S^1 = \{z \mid |z|=1\} \subset \mathbb{C}$). З гомотопічним міркуванням (див.



курс "Осн. алг. мон." и Вопр. 5.7. того степеня $= 2$, тому за

Рм. 7.1. $\partial_{CW}^2 \sigma^2 = \sum_{i=1}^g [\sigma^2, \sigma_{\alpha_i}^1] \sigma_{\alpha_i}^1 = \sum_{i=1}^{g'} \deg(\rho_{\alpha_i} \circ \varphi^2 / s^1) \sigma_{\alpha_i}^1 =$

$= 2 \left(\sum_{i=1}^g \sigma_{\alpha_i}^1 \right)$. Тому $Z_2^{CW}(N_g^2) = 0 \Rightarrow H_2^{CW}(N_g^2) = 0$, і

$B_1^{CW}(N_g^2) = \{ 2m(\sigma_{\alpha_1}^1 + \dots + \sigma_{\alpha_g}^1) \mid m \in \mathbb{Z} \} \simeq \mathbb{Z}$. Оск. Відобн $\partial_1^{CW} = 0$,

$Z_1^{CW}(N_g^2) = C_1^{CW}(N_g^2) = \{ m_1 \sigma_{\alpha_1}^1 + \dots + m_g \sigma_{\alpha_g}^1 \mid m_1, \dots, m_g \in \mathbb{Z} \} \simeq \mathbb{Z}^g$. Також

з факт. очевидно ізоморфізна має

$H_1^{CW}(N_g^2) = Z_1^{CW}(N_g^2) / B_1^{CW}(N_g^2) \simeq \mathbb{Z}^g / \{ (2m, \dots, 2m) \mid m \in \mathbb{Z} \}$.

Покажемо, що ця факторгрупа ізоморфна $\mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2$ (або, що те ж саме, $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$). Дійсно, визначимо

$\Psi: \mathbb{Z}^g / \underbrace{\{ (2m, \dots, 2m) \}}_{=: H} \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2: (m_1, \dots, m_g) + H \mapsto (m_1 - m_g, \dots,$

$\dots, m_{g-1} - m_g, m_g \bmod 2)$, де звачаємо $m_g \bmod 2 = 0$

або 1 ел-мент $\mathbb{Z}_2$. Коректність:

$(m_1, \dots, m_g) + H = (m'_1, \dots, m'_g) + H \Leftrightarrow (m_1 - m'_1, \dots, m_g - m'_g) \in$

$\in H \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : m_1 - m'_1 = \dots = m_g - m'_g = 2m \Rightarrow$
 $(m_1 - m_g) - (m'_1 - m'_g) = \dots = (m_{g-1} - m_g) - (m'_{g-1} - m'_g) = 0,$
 $m_g \bmod 2 = m'_g \bmod 2 \Leftrightarrow (m_1 - m_g, \dots, m_{g-1} - m_g, m_g \bmod 2) =$
 $= (m'_1 - m'_g, \dots, m'_{g-1} - m'_g, m'_g \bmod 2)$ Будем мечо, биро $\bar{u}$
 $\Leftrightarrow$ дуго $m_{\bar{u}} - m_g = m'_u - m'_g, \bar{u} = 1, g-1, \bar{u} m_g$ на m'_g
мало одрасло парниц, мо погнано $m := \frac{1}{2}(m_g - m'_g) \in \mathbb{Z},$
моги $\bar{u} \forall \bar{u} = 1, g-1 \quad (m_{\bar{u}} - m'_u) - (m_g - m'_g) = (m_{\bar{u}} - m_g) - (m'_u -$
 $- m'_g) = 0 \Rightarrow m_{\bar{u}} - m'_u = m_g - m'_g = 2m$. Тл.ч., говеру корек-
тно на ин'ектно.

Ψ - 2m-2m, до $\Psi(((m_1, \dots, m_g) + H) + ((m'_1, \dots, m'_g) + H)) =$
 $= \Psi((m_1 + m'_1, \dots, m_g + m'_g) + H) = ((m_1 + m'_1) - (m_g + m'_g), \dots, (m_{g-1} + m'_{g-1}) -$
 $- (m_g + m'_g), (m_g + m'_g) \bmod 2) = (m_1 - m_g, \dots, m_{g-1} - m_g, m_g \bmod 2) +$
 $+ (m'_1 - m'_g, \dots, m'_{g-1} - m'_g, m'_g \bmod 2) = \Psi((m_1, \dots, m_g) + H) +$
 $+ \Psi((m'_1, \dots, m'_g) + H)$.

Нарешити, Ψ -функ, до $\forall m_1, \dots, m_{g-1} \in \mathbb{Z}$ $(m_1, \dots, m_{g-1}, 0) =$
 $= \Psi((m_1, \dots, m_{g-1}, 0) + H) \cap (m_1, \dots, m_{g-1}, 1) = \Psi((m_1 + 1, \dots,$
 $\dots, m_{g-1} + 1, 1) + H).$

$H_0^{CW}(N_g^2) \cong Z_0^{CW}(N_g^2) = C_0^{CW}(N_g^2) \cong \mathbb{Z}$, до $B_0^{CW}(N_g^2) = 0$, і
 решта $H_k^{CW}(N_g^2) = 0$, до $C_k^{CW}(N_g^2) = 0$ м.ч.:

$H_k^{CW}(N_g^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0; \\ \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2, & k=1; \\ 0, & k>1. \end{cases}$ (при $g=1$ $N_g^2 = \mathbb{R}P^2$, зр. з Ex. 7.6.)
 Оск. гомології $\mathbb{Z}_2$ не вживає

на ранг (чому?), числа Бетті ранк $H_k^{CW}(N_g^2) = \begin{cases} 1, & k=0; \\ g-1, & k=1; \\ 0, & k>1. \end{cases}$
 $\chi(N_g^2) = 1 - (g-1) + 0 - \dots = 2-g$. А до: $\chi(N_g^2) = \sum_k (-1)^k \text{rank } C_k^{CW}(N_g^2) =$
 $= 1 - g + 1 - 0 + \dots = 2-g$ (тутеж отримане з триангуляції).

Прпр. 7.10. Ал-но до двох поперед. прикладів обчислити $H_k^{CW}(M)$ для кожн.
 зв'язної пов-ки M , що вист. розерткою за дов. словом w (напр.,
 $w = abab^{-1}$ для $K^2 \cong N_2^2$). Виготовити (з точністю до змеш-зміа)
 M за $H_1^{CW}(M)$, показавши, що це повний інваріант.

Реш. Інші приклади (зокр., лінійні простори) зр. у [Katcher, p. 142-146].