

Питання до іспиту з диференціальної геометрії многовидів

2025/26, зима

1. Многовиди. Карти та атласи. Гладкі многовиди та гладкі структури. Приклади гладких многовидів. Гладкі відображення. Дифеоморфізми.
2. Дотичні вектори та дотичний простір гладкого многовиду. Дотичний простір підмноговиду в евклідовому просторі. Дотичний вектор як диференціювання.
3. Дотичний вектор кривої. Диференціал відображення. Приклади. Базис простору, що спряжений до дотичного.
4. Тензори у точці гладкого многовиду. Приклади. Тензорний добуток. Компоненти тензора та їх перетворення при заміні координат.
5. Тензорні розшарування (зокрема дотичне). Побудова структури гладкого многовиду на них. Тензорні поля та їх гладкість.
6. Векторні поля. Векторне поле як диференціювання. Дужка Лі та її властивості. Інтегрування векторних полів.
7. Форми на многовиді. Форми як відображення від векторних полів. Кодиференціал і його властивості.
8. Симетричні та зовнішні форми у точці та на многовиді. Симетричний та зовнішній добуток та їхні властивості. Перетворення зовнішньої форми максимального рангу при заміні координат.
9. Орієнтовність гладких многовидів. Орієнтації. Дезорієнтуючі шляхи та неорієнтовні многовиди. Приклади.
10. Інтегрування форм на орієнтованому многовиді (без доведень).
11. Ріманова метрика, рімановий многовид. Занурення, вкладення, підмноговиди та перша фундаментальна форма. Існування ріманових метрик. Приклади.
12. Гладкі криві, що задані на довільному проміжку, та їхня еквівалентність. Довжина кусково гладкого шляху на рімановому многовиді та її властивості.
13. Натурально параметризовані криві. Кут між кривими. Форма об'єму і об'єм області.
14. Сума ріманових метрик. Ізометрії. Їхні критерії та приклади. Локальний випадок.
15. Функціонал довжини на топологічному просторі. Внутрішня метрика. Зв'язок між вихідною та метричною топологіями. Приклади.
16. Компоненти скінченності та досяжності. Внутрішня метрика, що породжена рімановою метрикою, та її властивості.
17. Індукована метрика. Фінслерова метрика. Гладкі розподіли. Інтегровність і теорема Фробеніуса (без доведення). Субріманова метрика.

18. Найкоротші. Повнота внутрішньої метрики. Приклади. Ізометрії внутрішньої метрики.
19. Афінна зв'язність. Коваріантне диференціювання уздовж кривої. Паралельні поля. Геодезичні.
20. Скрут афінної зв'язності. Узгодженість з метрикою. Ріманова зв'язність (Леві – Чівіта). Формула Кошуля, існування і єдиність ріманової зв'язності.
21. Збереження довжини паралельного поля у рімановому випадку. Ріманові геодезичні. Приклади.
22. Варіаційна задача на многовиді. Рівняння Ейлера – Лагранжа. Приклади. Опис регулярних найкоротших на рімановому многовиді.
23. Експоненційне відображення в точці ріманового многовиду. Нормальні околиці та нормальні координати. Напівгеодезичні координати та лема Гаусса (без доведення). Опис кусково гладких найкоротших на рімановому многовиді.
24. Функціонал довжини кривої у метричному просторі та його властивості. Випадок простору з внутрішньою метрикою.
25. Натуральна параметризація у загальному випадку. Опис спрямних найкоротших на рімановому многовиді. Границя послідовності найкоротших. Теорема Арцела – Асколі для шляхів (без доведення). Існування найкоротших у компактному випадку.
26. Обмежена компактність та існування найкоротших. Теорема Хопфа – Рінова – Кон-Фоссена. Випадок ріманового многовиду. Геодезична повнота.
27. Тензор кривини та його симетрії.
28. Тензор Річчі. Тензор Рімана. Секційна кривина, кривина Річчі та скалярна кривина. Ейнштейнові многовиди.
29. Многовиди постійної секційної кривини. Модельні простори постійної кривини. Теорема Шура.
30. Варіації, формула першої варіації довжини шляху. Існування варіацій. Доведення леми Гаусса.
31. Формула другої варіації довжини шляху.
32. Теорема Майєрса. Теорема Бонне. Ріманові накриття та наслідки теореми Майєрса. Інші теореми про кривину, що обмежена знизу (без доведень).
33. Геодезичні варіації, поля Якобі та їхні властивості. Спряжені точки. Випадок многовиду постійної секційної кривини.
34. Поля Якобі та експоненційне відображення. Теорема Якобі (без доведення). Теорема Рімана.
35. Теорема Картана – Кіллінга (ідея доведення).
36. Простори Адамара. Теорема Картана – Адамара. Інші теореми про кривину, що обмежена зверху (без доведень).
37. Теореми порівняння трикутників (без доведень). Простори з внутрішньою метрикою обмеженої кривини.

38. Метричні простори Адамара та Александрова. Узагальнення теорем Картана – Адамара та Бонне (ідеї доведень).