

Ех. 6.14. Нарадаємо, що букет сукупності топ. пр-ів з відміченими точками $\{(X_\gamma, x_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ — це факторпростір топологічної суми $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ за відношенням екв-сті, що отождествлює усі відм. точки x_γ (ї не відрізняє інші):

$$\bigvee_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, x_\gamma) := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma / \sim : x_\gamma \sim x_\delta \quad \forall \gamma, \delta \in \Gamma.$$

Розглянемо топ. суму куль D^n , $n \in \mathbb{N}$, що індексовані довільною множиною $\Gamma : \bigcup_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma^n$, або просто $\bigsqcup_\Gamma D^n$. З Ес. 6.7. вим., що це (н-вим.) клітинний пр-р, а $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma^{n-1} = \bigsqcup_\Gamma S^{n-1}$, де $\forall \gamma \in \Gamma \quad S_\gamma^{n-1} \subset D_\gamma^n$ станд. член, — його кліт. підпростір. При факторизації $\bigsqcup_\Gamma D^n$ за $\bigsqcup_\Gamma S^{n-1}$ усі S^{n-1} повинні отождествлятися в одну точку, тому, оск. $D^n / S^{n-1} \cong S^n$, $\bigsqcup_\Gamma D^n / \bigsqcup_\Gamma S^{n-1} \cong \bigvee_{\gamma \in \Gamma} (S_\gamma^n, x_\gamma)$, де відм. точки x_γ можуть бути обрані (з точністю до гомеоморфізму) дов. членом, тому

Будемо далі позначати цей букет $\bigvee S^n$. Зокрема, для $|\Gamma| = m \in \mathbb{N}$ це виглядає як $\underbrace{\mathbb{D}^n \sqcup \dots \sqcup \mathbb{D}^n}_m / \underbrace{S^{n-1} \sqcup \dots \sqcup S^{n-1}}_m \cong \underbrace{S^n \sqcup \dots \sqcup S^n}_m$.

Потім за Лем. 6.2. $\forall k \in \mathbb{N}$, од.ч. б $H_k(\bigvee S^n, G) \cong H_k(\bigcup \mathbb{D}^n, \bigcup S^{n-1}, G) \cong$.

Далі можна:

— або використати Воп. 6.14. $\cong \bigoplus H_k(\mathbb{D}^n, S^{n-1}, G) \cong [\text{Лем. 6.2}] \cong \bigoplus H_k(S^n, G)$, і далі рез-т Ек. 6.16.

— або побудувати для $(\bigcup \mathbb{D}^n, \bigcup S^{n-1})$ точну посл-сть пар, використати Рл. 6.7: $H_k(\bigcup \mathbb{D}^n, G) \cong \bigoplus H_k(\mathbb{D}^n, G)$, $H_k(\bigcup S^{n-1}, G) \cong \bigoplus H_k(S^{n-1}, G) \forall k$ й діяти аналогічно до Ек. 6.16, але тепер для прямих сум (перевірте). В будь-якому разі (враховуючи також лем. зв-сть і Рл. 5.2):

$$H_k(\bigvee S^n, G) \cong \begin{cases} \bigoplus G, & k=n; \\ G, & k=0; \\ 0, & k \neq 0, n. \end{cases}$$

Таким чином це випливає з наступного загального факта:

Вопр. 6.15. Нехай $\{(X_\gamma, x_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ - сукупність лін. зв'язаних клім. пр-тів з відм. точками x_γ , де $\forall \gamma \in \Gamma \{x_\gamma\}$ - 0-вм. клітина X_γ . За допомогою точної послідовності пари пока-
зати, що $\forall k \in \mathbb{N}$, аб. гр. G $H_k(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, x_\gamma), G) \simeq \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_k(X_\gamma, G)$.

Вопр. 6.16. Узагальнити Ел. 6.17. на букети сфер різної вим-стості.

Сол. 6.3. Нехай $\{B_\alpha^n\}_{\alpha \in A_n}$ - сукупність усіх n -вм. клітин клітинного простору X , де $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді $\forall$ аб. гр. G , $k \in \mathbb{Z}_+$

$$H_k(X_n, X_{n-1}, G) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in A_n} G, & k=n; \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Реш. При $n=0$ вважаємо $X_{-1} := \mathbb{Q}$. Групи синг. ланцюгів (а отже й гр. гом-гм) простору нульові, тому $\forall$ топ. пр-ту X , аб. гр. G $C_*(X, \mathbb{Q}, G) = C_*(X, G) / C_*(0, G)$, от. чинем ізоморфизм $C_*(X, G)$, а отже й $H_k(X, \mathbb{Q}, G) \simeq H_k(X, G) \forall k \in \mathbb{Z}_+$. Тому тут розуміємо $H_k(X_0, X_{-1}, G) = H_k(X_0, G)$.

$\Rightarrow$ Зауважимо, що ^{при $n \in \mathbb{N}$} доведена у Ес. 6.13. правість і для зб.
 кількості клітин: $X_n/X_{n-1} \cong \bigvee_{A_n} S^n$. Тому $\forall G, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 H_k(X_n, X_{n-1}, G) &\cong [\text{Тл. 6.2.}] \cong H_k(X_n/X_{n-1}, G) \cong [\text{Ес. 6.13.}] \cong \\
 &\cong H_k\left(\bigvee_{A_n} S^n, G\right) \cong [\text{Ес. 6.17.}] \cong \begin{cases} \bigoplus_{A_n} G, & k=n, \\ 0, & 0 \leq k < n, k > n. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$H_0(X_n, X_{n-1}, G) = 0$ для $n \in \mathbb{N}$ при лін. зб. X_n бачн. з Впр. 6.13.,
 бо $X_{n-1} \supset X_0 \neq \emptyset$. У заг. випадку це випливає з лін. зб'-
 ґного і Впр. 6.14.: якщо $X_n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_n} X_{n\gamma}$ - розбиття у
 об'єднання компонент лін. зб'яності, то кожна з них
 містить (принаймні одну) компоненту лін. зб-сті X_{n-1}
 (неперервно) за умовою (C) лем. 6.2., тому

$$H_0(X_n, X_{n-1}, G) \cong \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_n} H_0(X_{n\gamma}, X_{n-1\gamma}, G) = 0, \text{ де } X_{(n-1)\gamma} -$$

об'єднання усіх кожн. лін. зб. X_{n-1} , що входять до $X_{n\gamma}$.
 Нарешті, при $n=0$ (див. поперед. Лем.) $H_k(X_0, G) \cong \begin{cases} \bigoplus_{A_0} G, & k=0, \\ 0, & k>0 \end{cases}$

VG за очевидним узагальненням Ес.5.1. $\triangle$

Рем. У загальному випадку Тл.6.2. справедлива для топологічних пар (X, Y) , де Y — непорожня замкнена підпространа X , що є деформативним ретрактом деякого свого відкритого околу.

Впр.6.14. Перевірити, що клітинні пари мають таку властивість (див. [Катцен, р.523]).

Це загальне формулювання Тл.6.2., у свою чергу, випливає з теорем, що тепер зветься теоремою про вирізання:

Тл.6.3. Нехай Y, Z — підпростори топологічного пр-гу X , причому $\bar{Z} \subset \text{Int } Y$. Тоді $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, аб. гр. G

$$H_k(X, Y, G) \cong H_k(X \setminus Z, Y \setminus Z, G)$$

Рем. Більш точно, встановлення пар $(X \setminus Z, Y \setminus Z) \rightarrow (X, Y)$ індукуює ізоморфізми відносноє сингулярних гомологій

$\forall k$ (як зазначено в еб-стві у Рн.6.4.). Якщо позначити $W := X \setminus Z$, то $Y \setminus Z = W \cap Y$ і $\text{Int } Y, \text{Int } W$ покривають X (бо $X \setminus \text{Int } W = \bar{Z} \subset \text{Int } Y$), звідки отримують еквівалентне формулювання: якщо $\{\text{Int } Y, \text{Int } W\}$ -фігур. покр. X , то $\forall k, G$

$$H_k(X, Y, G) \cong H_k(W, W \cap Y, G).$$

► Ця теорема також доводиться за гол. Тарнентерівське підоззіння (Рн.6.6.). Див. [Катчен, р.119-124], і також на р.124 введена узагальнені Тн.6.2. $\triangle$

Ес.6.18. У груповому формулюванні Тн.6.3. (губ. покр. Рем.) покладемо $X = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ для $\forall x \in \mathbb{R}^n$ і $W = \emptyset$ фігур. підмн. $\mathbb{R}^n$, що $\exists x$. Тоді, $\forall k, G$

$$H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}, G) \cong H_k(W, W \setminus \{x\}, G)$$

$\forall$ фігур. $W \neq \emptyset$ і $x \in W$. Тоді посл. назв. $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ для $k \geq 2$ має власт.

$$\dots \rightarrow H_k(\mathbb{R}^n, G) \xrightarrow{\text{связность}} H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}, G) \xrightarrow{\text{связность}} H_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}, G) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{R}^n, G) \rightarrow \dots$$

Отсюда за точностью $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}, G) \simeq H_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}, G) \simeq$
 $\simeq \left[\begin{array}{l} \text{гомот. экв.} \\ \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \sim S^{n-1} \end{array} \right] \simeq H_{k-1}(S^{n-1}, G) \simeq \left[\text{Ex. 6.16} \right] \simeq \left[\begin{array}{l} G, k=n, \\ 0, k \neq n \end{array} \right] \quad (n \geq 2).$

ii) конец:

$$\dots \rightarrow H_1(\mathbb{R}^n, G) \xrightarrow{\text{связность}} H_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}, G) \xrightarrow{\delta_1} H_0(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}, G) \xrightarrow{i_{0*}} H_0(\mathbb{R}^n, G) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}, G) \rightarrow 0$$

$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xleftarrow{\text{Pr. 5.2}} & \mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} G, n > 1 \\ G^2, n = 1 \end{array} \right] & & G \end{array}$

$\mathbb{Z} \xleftarrow{\text{Pr. 6.13}} 0$

За точностью, δ_1 — изг. При $n=1$ ак-но го банажна $n=1$
 у Ex. 6.16 отсюда, что $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{x\}, G) \simeq \text{Im } \delta_1 = \text{Ker } i_{0*} \simeq G$,
 а при $n > 1$ — ак-но $n > 1$ там же, что $H_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}, G) \simeq$
 $\simeq \text{Im } \delta_1 = \text{Ker } i_{0*} = 0$. И.т.т.,

$$H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}, G) \simeq \begin{cases} G, & k=n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Зокрема, при $n \neq m$ $H_n(W, W \setminus \{x\}, G) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}, G) \cong$
 $\cong G \neq 0 = H_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{y\}, G) = H_n(U, U \setminus \{y\}, G) \quad (\forall G \neq 0)$
 для $\forall$ фікр. $U \neq \emptyset \subset \mathbb{R}^m : \forall y \in U$. Якщо $\delta U \subset W$
 функції δ гомеоморфізми, то їх гомеоморфізм $f: W \rightarrow U$
 задавав би гомео-зм (зокр. топот. екв.) пар $(W, W \setminus \{x\})$ і
 $(U, U \setminus \{f(x)\})$, а отже індукував би ізоморфізм вкр.
 сит. груп гомологій $H_n(W, W \setminus \{x\}, G) \rightarrow H_n(U, U \setminus \{f(x)\}, G)$ за

Рл. 6.1. $\downarrow$ Тл. ч., довели наступне:

Сол. 6.1. Якщо відкриті непорожні $U \subset \mathbb{R}^m : W \subset \mathbb{R}^n$
 гомеоморфні, то $m = n$.

Вар. 6.18. Вивести з цього топологічну інваріантність
 вимірності: якщо многовиди (у заг. випадку лок.
 евклідові простори) M і N гомеоморфні, то $\dim M =$
 $= \dim N$.

Тепер доведемо давно анонсований результат:

Лем. 6.4. Нехай X - симплексний простір. Для $k \in \mathbb{Z}_+$, аб. гр. G позначимо через H_k^Δ і H_k^{sing} його симплексні та сингулярні гомології відповідно. Тоді $\forall k, G$

$$H_k^\Delta(X, G) \cong H_k^{\text{sing}}(X, G).$$

► $\forall k, G$ позначимо $f_k: C_k^\Delta(X, G) \rightarrow C_k^{\text{sing}}(X, G)$ (в оч. позн. для симп. і симп. ланцюгів відповідно.) відображення, що переводить $\sum_\alpha g_\alpha \sigma_\alpha^k$ у $\sum_\alpha g_\alpha \varphi_\alpha^k$, де $\varphi_\alpha^k: \sigma_\alpha^k \rightarrow X$ - характеристичне відобр. симплекса $\sigma_\alpha^k \forall \alpha$. За побудовою, це гом-зм; за побудовою упр. гом-змів у цих комплексах, відобр. f_k з ними комутує (Вар.), тому $\{f_k\}$ - морфізм $C_*^\Delta(X, G) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(X, G)$. Також немо, що $\forall k$ індукований гом-зм $f_{k*}: H_k^\Delta(X, G) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X, G)$ є ізоморфізмом. Для цього індукцією за $n(\geq k)$ покажемо, що це так $\forall$ кінця X_n ($\{f_k\}: C_k^\Delta(X_n, G) \rightarrow C_k^{\text{sing}}(X_n, G)$ варт. дослівно так само для $k \leq n$ як

обменення $\{f_k\}$ для X і індуктивно $f_{k*}: H_k^\Delta(X_n, G) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X_n, G)$; при $k > n$ це 0 за побудовою). (можливо
сигнелесу)

$n=0$. Якщо $\{\sigma_\alpha^0 = \{x_\alpha\}\}_{\alpha \in A_0}$ — 0-фам. нм. X , то
 $f_{0*}: H_0^\Delta(X_0, G) \rightarrow H_0^{\text{sing}}(X_0, G): \sum_\alpha g_\alpha \sigma_\alpha^0 + B_0^\Delta(X_0, G) \mapsto \sum_\alpha g_\alpha \varphi_{x_\alpha} + B_0^{\text{sing}}(X_0, G)$ (для оч. позн. груп границь) — ізоморфізм,
 наприклад, за узагальненнями Ес. 2.3. і Ех. 5.4. на дов.

кільк. точок. При $k > 0$: $f_{k*}: H_k^\Delta(X_0, G) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X_0, G)$ — трив. із-м.

$n \mapsto n+1$. Оск. $C_*^\Delta(X_n, G) \subset C_*^\Delta(X_{n+1}, G)$, $C_*^{\text{sing}}(X_n, G) \subset C_*^{\text{sing}}(X_{n+1}, G)$ — підкомплексн і $\forall k \{f_k\}: C_*^\Delta(X_{n+1}, G) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(X_{n+1}, G)$
 індукце морфізм $\{f_k|_{C_k^\Delta(X_n, G)}\}: C_*^\Delta(X_n, G) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(X_n, G)$,

за Рл. 1.6. вимакетий морфізм відносно комплексів

$\{f_k\}: C_*^\Delta(X_{n+1}, X_n, G) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G)$. Згадаємо, що $\forall k$

$$f_k: \underbrace{C_k^\Delta(X_{n+1}, G) / C_k^\Delta(X_n, G)}_{C_k^{\Delta''}(X_{n+1}, X_n, G)} \rightarrow \underbrace{C_k^{\text{sing}}(X_{n+1}, G) / C_k^{\text{sing}}(X_n, G)}_{C_k^{\text{sing}''}(X_{n+1}, X_n, G)}: \alpha + C_k^\Delta(X_n, G) \mapsto$$

$\mapsto f_k a + C_k^{\text{sing}}(X_n, G)$. Тому визначені індуковані ком-зми
 $f_{k*} : H_k^{\Delta}(X_{n+1}, X_n, G) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G) : (a + C_k^{\Delta}(X_n, G)) +$
 $+ B_k^{\Delta}(X_{n+1}, X_n, G) \rightarrow (f_k a + C_k^{\text{sing}}(X_n, G)) + B_k^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G) \quad \forall k$, а
 діаграма з точних посл. пар і ком-змиб f_{k*}, g_{k*}

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & H_{k+1}^{\Delta}(X_{n+1}, X_n, G) & \rightarrow & H_k^{\Delta}(X_n, G) & \rightarrow & H_k^{\Delta}(X_{n+1}, G) & \rightarrow & H_k^{\Delta}(X_{n+1}, X_n, G) & \rightarrow & H_{k-1}^{\Delta}(X_n, G) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow g_{(k+1)*} & & \downarrow f_{k*} & & \downarrow f_{k*} & & \downarrow g_{k*} & & \downarrow f_{(k-1)*} & & \\ \dots & \rightarrow & H_{k+1}^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G) & \rightarrow & H_k^{\text{sing}}(X_n, G) & \rightarrow & H_k^{\text{sing}}(X_{n+1}, G) & \rightarrow & H_k^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G) & \rightarrow & H_{k-1}^{\text{sing}}(X_n, G) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

комутативна. Тут $f_{k*} : H_k^{\Delta}(X_n, G) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X_n, G)$, $f_{(k-1)*} : H_{k-1}^{\Delta}(X_n, G) \rightarrow H_{k-1}^{\text{sing}}(X_n, G)$ —
 ізоморфізми за прип. індуції. При $k \neq n+1$ $H_k^{\Delta}(X_{n+1}, X_n, G) =$
 $= H_k^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G) = 0$ за узагальненим л. 2.7 на довільну
 клок. синплесів і л. 6.3, отже $f_{k*} = 0$ — трив. ізомор-

прізви. Типу $k = n+1$ знову не як у Ex. 2.4.: $C_{n+2}^\Delta(X_{n+1}, X_n, G) =$
 $= C_{n+2}^\Delta(X_{n+1}, G) / C_{n+2}^\Delta(X_n, G) = 0/0 = 0$; $C_n^\Delta(X_{n+1}, X_n, G) = \underbrace{C_n^\Delta(X_{n+1}, G)}_{C_n^\Delta(X_n, G)} = 0$

(бо це рівні нулю) $\Rightarrow B_{n+1}^\Delta(X_{n+1}, X_n, G) = 0 \Rightarrow H_{n+1}^\Delta(X_{n+1}, X_n, G) \simeq$
 $\simeq Z_{n+1}^\Delta(X_{n+1}, X_n, G) = C_{n+1}^\Delta(X_{n+1}, X_n, G) \simeq [C_{n+1}^\Delta(X_n, G) = 0] \simeq C_{n+1}^\Delta(X_{n+1},$
 $G) \simeq \bigoplus_{A_{n+1}} G$, де $\{G_\alpha^{n+1}\}_{\alpha \in A_{n+1}}$ — множина $(n+1)$ -форм. сим-

лексів X . Тому $f_{k*} = f_{(n+1)*}$ відображає кожен сим-
лекс G_α^{n+1} у $(\varphi_\alpha^{n+1} + C_{n+1}^{\text{sing}}(X_n, G)) + B_{n+1}^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G) \in H_{n+1}^{\text{sing}}(X_{n+1},$
 $X_n, G) \simeq \bigoplus_{A_{n+1}} G$ за Сол. 6.3. (X — це клим. пр-н, климатичн
якщо $\in$ (мон.) симплекс триангуляції, за Ex. 6.4.).

Вопр. 6.19. Перевірити, що такі класи $\in$ "натуральні" ідеї групи,

можно что $f_{(n+1)*} (h \in \mathbb{B}_2^{n+1})$ не зависит от $(0, \dots, h, \dots, 0) \in \bigoplus_{A_{n+1}} G$
 $\forall h \in G$ и независим.

Пл.ч., і у цьому випадку f_{k*} — ізоморфізм. Також
саме, $f_{(k+1)*}: H_{k+1}^{\Delta}(X_{n+1}, X_n, G) \rightarrow H_{k+1}^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G)$ — із-м
 $\forall k$. Тоді за 5-лемою (Рч. 1.7.) $f_{k*}: H_k^{\Delta}(X_{n+1}, G) \rightarrow$
 $\rightarrow H_k^{\text{sing}}(X_{n+1}, G)$ — ізоморфізм $\forall k$, що й потрібно.

Для скінченновимірної X це завершує доведення, бо
 $X = X_n$, де $n = \dim X$. У загальному випадку $\forall a \in B_k^{\text{sing}}(X, G) \in H_k^{\text{sing}}(X, G)$ ($\forall k$) ланцюг $a \in C_k^{\text{sing}}(X, G) \in$ скінч.
сумою $\sum_{i=1}^m f_i \circ \varphi_i$, $\varphi_i \in C(G^k, X)$, а отже його "носій"
 $K := \bigcup_{i=1}^m \varphi_i(G^k)$ компактний. Тоді він перетинає лише скінч.
кількість "відкритих симплексів" триангуляції (тобто
відкр. клітин, що відкр. симплексам). Дійсно, інакше б
існувала нескінченна множина $A \subset K$ точок з попарно
різними відкр. симплексів, і $\{X \setminus (A \setminus \{x\})\}_{x \in A}$ було б
відкр. (в силу фундаментальності трианг.) покриттям K
без петлив. (зокр. скінч.) підпокриття. $\downarrow$

Тому $K \subset X_n$ для деякого n , а отже можна вважати, що $a + B_n^{\text{sing}}(X, G) \in H_n^{\text{sing}}(X_n, G) = f_{n*}(H_n^{\Delta}(X_n, G))$

за допомогою стор'єктивності f_{n*} на $H_n^{\Delta}(X_n, G)$. Аналогічно доводимо і'єктивність:

Тл.ч., f_{n*} -звм.

Якщо $f_{k*}(a + B_k^\Delta(X, G))$ нульовий, тобто $f_{k*}a \in B_k^{\text{sing}}(X, G) \Leftrightarrow f_{k*}a = \partial_{k+1}b$, де $b \in C_{k+1}^{\text{sing}}(X, G)$, то
 можна вважати, що $b \in C_{k+1}^{\text{sing}}(X_n, G)$ для деякого n ;
 тоді $a \in B_k^\Delta(X_n, G) \subset B_k^\Delta(X, G)$ за ін'єктивністю (го-
 веденою) f_{k*} на $H_k^\Delta(X_n, G)$. 

(Th. 2.1.)

Рем. Топі гомотопічна інваріантність сімпл. циклогонів
випливає з топ. інв-сті сингулярних (Соч. 5.4.), і ак-но
для ейлерові хар-ки:

Соч. 6.5. Симпліційна і сингулярна ейлерові характе-
ристики χ симпліційного простору збігаються (зокрема,
относно визначені) і є топотопічними інваріантами.

Вар. 6.20. Показати, що сімпл. та сингулярні цикло-
гоні X з коэф. γ в аб. гр. G також ізоморфні
(χ k).

Рем. Зведена симпл. теоремою до сингулярних - окремих випадок загального принципу: усі теорії гомологій, що задовольняють певним загальним правилам ("аксіомам") ізоморфні. Ось одне з пояснених точних формулювань:

Тл. 6.5. (Ейленберґ - Стірог). Нехай визначений коваріантний функтор з категорії пар топологічних просторів (X, Y) (тобто $Y \subset X$ - підпростір) та їх неперервних відображень (тобто $f \in C(X_1, X_2)$: $f|_{Y_1} \subset Y_2$ для пар $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$) у категорію послідовностей абелевих груп, що ставить кожному парі у відповідність посл. $\{H_k(X, Y)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ а кожному f - набір ізоморфізмів $\{f_{k*} : H_k(X_1, Y_1) \rightarrow H_k(X_2, Y_2)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$. Крім того, нехай $\forall$ пари (X, Y) і $k \in \mathbb{N}$ визначений гом-зм $\partial_k : H_k(X, Y) \rightarrow H_{k-1}(Y, \mathbb{Q})$. У такому випадку

Будемо говорити, що визначена теорія гомологій. Далі
 будемо позначати $H_k(X) := H_k(X, \mathbb{Q}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$, топ. пр. X .
 Кожна теорія гомологій задовольняє наступним аксіомам:

1. (натуральність δ_k) $\forall f, k \in \mathbb{N} \quad \delta_k \circ f_{k*} = f_{(k-1)*} \circ \delta_k$;
2. (аксіома гомотопії) Якщо $f \sim g$, то $f_{k*} = g_{k*} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$;
3. (варіація) $\forall$ пари (X, Y) і $Z \subset Y$ такою, що $\bar{Z} \subset Y \cap Y$,
 $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ вклучення $i: (X \setminus Z, Y \setminus Z) \rightarrow (X, Y)$ індукуює ізоморфізм
 $i_{k*}: H_k(X \setminus Z, Y \setminus Z) \rightarrow H_k(X, Y)$;

4. (точність) $\forall$ пари (X, Y) послідовність

$$\dots \xrightarrow{\delta_{k+1}} H_k(Y) \xrightarrow{i_{k*}} H_k(X) \xrightarrow{j_{k*}} H_k(X, Y) \xrightarrow{\delta_k} H_{k-1}(Y) \xrightarrow{i_{(k-1)*}} \dots \xrightarrow{\delta_1} H_0(Y) \xrightarrow{i_{0*}} H_0(X) \xrightarrow{j_{0*}} H_0(X, Y) \rightarrow 0,$$

де δ_k -зв'язки індуковані вклученнями $i: Y \rightarrow X$ (тобто
 $(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow (X, \mathbb{Q})$) та $j: (X, \mathbb{Q}) \rightarrow (X, Y)$, точка;

5. (адитивність). Якщо $X = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, то $H_k(X) \cong \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_k(X_\gamma) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$;
6. (аксіома вивірності). Якщо $X = \{x\}$ - одноточковий простір, то $H_k(X) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Тоді $\forall$ кінтинуїт парі $(X, Y) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$

$$H_k(X, Y) \cong H_k^{\text{sing}}(X, Y, H_0(\{x\})):$$

групи гомологій збігаються з групами (вільних) сингулярних гомологій з коефіцієнтами в нульовій групі гомологій одноточкового простору. Зокрема,
 $H_k(X) \cong H_k^{\text{sing}}(X, H_0(\{x\})) \quad \forall$ кн. пр-гу X . Крім того,
 $\{f_{k*}\} \subset \{\delta_k\}$ теж утворюються з вільн. гом-змів для сингулярних гомологій спрясєнками з ізоморфізмами (тобто функторами ізоморфізмі)

► Див. [Katcher, p. 160-162, 399-402] або [S. Eilenberg, N. Steenrod. Foundations of Algebraic Topology] ▲

Ром. Для сингулярних гомологій ми перевіряли усі ці властивості (крім з. що $\in$ твєрдєсна Th. 6.3).

Втім, якщо з самого початку обмежитися кінтн-ними просторами, з. можна замінити на твєрдєсна

Тл. 6.2. Для скінц. клім. гр-рів 5. непомірбна.

Навіть якщо не використовувати ізоморфізм з сам. гомотопіями, багато інших властивостей можна отримати безпосередньо з аксіом: гомотопічну інваріантність з функторіальності та 2. (ах-по до Соч. 5.4.), гомотопії сфер (Ел. 6.16.), навіть послідовність Маєра-Вієторіса! (зокрема, ^{з тв. до із-на} оточувальна функц. $H_0(\{X\})$ вкл. з функторіальності).

Аналогічні аксіоми мають місце й для когомологій (див. [Е.-С.]), з такою теоремою.

Теорії (когомологій, що не задовольняють аксіомі вибірності, звуться екстраординарними. Відомі приклади у когомологіїх — К-теорія, теорія по-бордизмів.

Далі розглянемо ще один приклад конкретної побудови теорії гомотопій для кліматичних гр-рів.

7. Клітинні комплекси

Нехай X - клітинний простір з клітинним розбиттям $\{\sigma_\alpha^n\}_{\alpha \in A_n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, тобто $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \{\sigma_\alpha^n\}_{\alpha \in A_n}$ - розбиття усіх його n -вимірних клітин.

Лем. 7.1. n -вимірний клітинний ланцюжок з коефіцієнтами у абелевій гр. G зветься n -формальною скінченною комбінацією $\sum_{\alpha \in A_n} g_\alpha \sigma_\alpha^n$, де $g_\alpha \in G$, $|\{\alpha \mid g_\alpha \neq 0\}| < \infty$.
Множина усіх n -вим. кл. ланц. з коэф. у G зветься n -тою групою клітинних ланцюгів з коэф. у G , і на ній вводиться групова операція: $\sum_{\alpha} g_\alpha \sigma_\alpha^n + \sum_{\alpha} g'_\alpha \sigma_\alpha^n := \sum_{\alpha} (g_\alpha + g'_\alpha) \sigma_\alpha^n$. Позначається $C_n^{CW}(X, G)$.

Лем. 7.1. $C_n^{CW}(X, G)$ є абелевою групою.

Дослівно як для скінч. і скінч. ланцюгів раніше. $\triangle$

Реш. Отже, $C_n^{CW}(X, G) \cong \bigoplus_{A_n} G$ за побудовою: $\sum g_\alpha \bar{\sigma}_\alpha^n \mapsto (g_\alpha)_{\alpha \in A_n} \in$ очевидний ізоморфізм. З іншого боку, за Соч. 6.3 група відносних сингулярних циклів $H_n^{\text{sing}}(X_n, X_{n-1}, G) \cong \bigoplus_{A_n} G$ також, при цьому ізоморфізм можна побудувати так, що доданкам sign. ті не клітини:

$$(g_\alpha)_{\alpha \in A_n} \mapsto \sum_{\alpha \in A_n} g_\alpha (\varphi_\alpha^n + C_n^{\text{sing}}(X_{n-1}, G)) + B_n^{\text{sing}}(X_n, X_{n-1}, G)$$

(Впр. 6.19), де φ_α^n — хар. відображення $\bar{\sigma}_\alpha^n$ (їого можна вважати n -вим. сінг. симплексом, оск. $\mathbb{D}^n \cong \bar{\sigma}^n$).

Тому далі ототожнюватимемо ці групи за допомогою даної пари ізоморфізмів. Розглянемо тепер послідовності клітинних пар $(X_n, X_{n-1}) \subset (X_{n-1}, X_{n-2})$

(тут вважалося $n \in \mathbb{N}$ і при $n=1$ $X_{-1} = \emptyset$, як у

Реш. після форм. Соч. 6.3).

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X_n, X_{n-1}, G) &\xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}^{\text{sing}}(X_{n-1}, G) \rightarrow \dots \\ &\rightarrow H_{n-1}^{\text{sing}}(X_{n-1}, G) \xrightarrow{\delta_{n-1}} H_{n-2}^{\text{sing}}(X_{n-2}, G) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Плм $\delta_{(n-1)*}$ индукується факторизацією $C_{n-1}^{\text{sing}}(X_{n-1}, G) \xrightarrow{\delta_{n-1}} C_{n-1}^{\text{sing}}(X_{n-1}, X_{n-2}, G) = C_{n-1}^{\text{sing}}(X_{n-1}, G) / C_{n-1}^{\text{sing}}(X_{n-2}, G)$, а при $n=1$ ми просто вважати його каноничним ізоморфізмом $H_0^{\text{sing}}(X_0, G) \rightarrow H_0^{\text{sing}}(X_0, \mathbb{Q}, G)$.

def. 7.2. Ототожнено $C_n^{\text{cw}}(X, G) \cong H_n^{\text{sing}}(X_n, X_{n-1}, G)$ для $n \in \mathbb{Z}_+$, зокрема $C_0^{\text{cw}}(X, G) \cong H_0^{\text{sing}}(X_0, G)$. Також для $n \in \mathbb{N}$ $\partial_n^{\text{cw}} := \delta_{(n-1)*} \circ \delta_n : C_n^{\text{cw}}(X, G) \rightarrow C_{n-1}^{\text{cw}}(X, G)$ зветься n -тим граничним клітинним гомоморфізмом (n -того клітинного границю).

лм. 7.2. $\partial_n^{\text{cw}} \in \text{гомоморфізми}$ і $\forall n \geq 2 \quad \partial_{n-1}^{\text{cw}} \circ \partial_n^{\text{cw}} = 0$, тобто $\{C_n^{\text{cw}}(X, G)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ разом з $\{\partial_n^{\text{cw}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ утворюють

ланцюговий комплекс.

$\Rightarrow \forall n \partial_n^{CW}$ — гом-зім зм Конт. гом-зімів. Для $n \geq 2$ маємо:

$$\begin{aligned} \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X_n, X_{n-1}, G) &\xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}^{\text{sing}}(X_{n-1}, G) \rightarrow \dots \\ C_n^{CW}(X, G) &\xrightarrow{\text{sing}''} H_{n-1}^{\text{sing}}(X_{n-1}, G) \xrightarrow{\bar{J}_{(n-1)}^*} H_{n-1}^{\text{sing}}(X_{n-1}, X_{n-2}, G) \xrightarrow{\partial_{n-1}} H_{n-2}^{\text{sing}}(X_{n-2}, G) \rightarrow \dots \\ &\quad C_{n-1}^{CW}(X, G) \xrightarrow{\text{sing}''} H_{n-2}^{\text{sing}}(X_{n-2}, G) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\bar{J}_{(n-2)}^*} H_{n-2}^{\text{sing}}(X_{n-2}, X_{n-3}, G) \rightarrow \dots \quad \text{Тл. ч.,} \quad \partial_{n-1}^{CW} \circ \partial_n^{CW} &= \bar{J}_{(n-2)}^* \circ (\partial_{n-1} \circ \bar{J}_{(n-1)}^*) \circ \partial_n = \\ C_{n-2}^{CW}(X, G) &= 0, \text{ бо } \partial_{n-1} \circ \bar{J}_{(n-1)}^* = 0 \text{ у другій з} \end{aligned}$$

цєю послідовності. $\triangle$

def. 4.3. $C_*^{CW}(X, G) = \{C_n^{CW}(X, G), \partial_n^{CW}\}$ звється (алгебраїчним, ланцюговим) клітинним (CW-) комплексом клітинного простору (топологічного CW-комплекса) X

з коефіцієнтами у G . $\forall n \in \mathbb{Z}_+$

$Z_n^{CW}(X, G) := Z_n(C_*^{CW}(X, G)) = \ker \partial_n^{CW}$ зв. n -мого групово клітинного циклів,

$B_n^{CW}(X, G) := B_n(C_*^{CW}(X, G)) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}^{CW}$ зв. n -мого групово клітинного границь,

$H_n^{CW}(X, G) := H_n(C_*^{CW}(X, G)) = Z_n^{CW}(X, G) / B_n^{CW}(X, G)$ зв. n -мого групово

клітинного гомологій (X з коеф. у G).

Рем. Як раніше, якщо $G = \mathbb{Z}$, група не пишеться: $C_n^{CW}(X, \mathbb{Z}) = C_n^{CW}(X)$, анало $C_*^{CW}(X)$, $Z_n^{CW}(X)$, $B_n^{CW}(X)$, $H_n^{CW}(X)$. Як і для сингл.

і сингл. гомологій, за допомогою спрямованого комплексу

визначаються групи клітинних коциклів та когомологій (коциклів, кограниць). Також для $G = \mathbb{Z}$ визнача-

ються кліт. числа Берті чакл $H_n^{CW}(X)$ і ейл. хар-ка.

Втім у цих показниках нічого нового не буде:

Лем. 4.1. $\forall$ клітинного пр-ру X , аб. гр. G , $n \in \mathbb{Z}_+$

$$H_n^{CW}(X, G) \cong H_n^{\text{sing}}(X, G)$$

клітинні гомології (з точністю до із-ма) збігаються з синглярними.

$\Rightarrow$ Ан-но го доведення Тл. 6.4, згідно індукції за вартістю
 числа $X_n = \bigcup_{\substack{k \leq n \\ \alpha \in A_k}} G_\alpha^k$.

$n=0$. $X_0 = \bigcup_{\alpha \in A_0} G_\alpha^0$ — диск, пр-р (Ек. 6.5). Тут ситуація
 аналогічна ситуації, розглянутій у Ек. 2.3, хоча там
 розглядався лише один випадок): $C_k^{CW}(X_0, G) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in A_0} G, & k=0; \\ 0, & k>0, \end{cases}$
 тому усі $\partial_k^{CW} = 0 \Rightarrow$ усі $B_k^{CW}(X_0, G) = 0$, а $Z_k^{CW}(X_0, G) = C_k^{CW}(X_0, G)$
 $\forall k$. Тв.ч., $H_k^{CW}(X_0, G) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in A_0} G, & k=0; \\ 0, & k>0. \end{cases}$ З іншого боку, ми
 ще завжди маємо $H_k^{sing}(X_0, G)$ (див. Ек. 5.4, що як-то уза-

гальмостеся на гев. кильдиче мочон адо ванадон $n=0$ у
 гев. Th 6.4, ге 0-би кильм. кильдоний ванадонмэ мач сачо,
 ак сиппильдичи) (адо Соч. 6.3).

$n \rightarrow n+1$. Точна посл. пэрм:

$$\rightarrow H_{k+1}^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X_n, G) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X_{n+1}, G) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G) \rightarrow \dots$$

За Соч. 6.3, при $k \neq n, n+1$ $H_{k+1}^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G) = H_k^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G) = 0$,

мачу за мочиче

$$H_k^{\text{sing}}(X_{n+1}, G) \cong H_k^{\text{sing}}(X_n, G) \cong [\text{моч. индичи}] \cong H_k^{\text{cw}}(X_n, G) \cong$$

При $k > n+1$ $H_k^{\text{cw}}(X_n, G) = 0$, до $C_k^{\text{cw}}(X_n, G) = 0$ за подугоро
 (у X_n немас k -ван. кильм). При $k \leq n-1$ (оск. $C_l^{\text{cw}}(X_n, G) =$
 $= C_l^{\text{cw}}(X_{n+1}, G)$ при $l \leq n$, ∂_l^{cw} для $l \leq n$ мачонс з'ир.

у $X_n \subset X_{n+1}$ за подугоро) $Z_k^{\text{cw}}(X_n, G) = Z_k^{\text{cw}}(X_{n+1}, G)$ и
 $B_k^{\text{cw}}(X_n, G) = B_k^{\text{cw}}(X_{n+1}, G) \Rightarrow \cong H_k^{\text{cw}}(X_{n+1}, G)$ (и 0 при $k > n+1$), що а по-

трьднэ. Заминилося пэрм. ванадон $k = n, n+1$. Бигн.

гильдича точной посл.!

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow H_{n+1}^{\text{sing}}(X_n, G) \rightarrow H_{n+1}^{\text{sing}}(X_{n+1}, G) \xrightarrow{\delta_{n+1}^{\text{sing}}} H_n^{\text{sing}}(X_n, G) \rightarrow \\
 & \quad \begin{array}{l} \text{изоморфизм} \\ H_{n+1}^{\text{CW}}(X_n, G) \\ \parallel \leftarrow \text{губ. функ.} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{канон.} \\ \text{изоморфизм} \rightarrow \text{из} \\ C_{n+1}^{\text{CW}}(X_{n+1}, G) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{изоморфизм} \\ H_n^{\text{CW}}(X_n, G) \\ \text{из} \leftarrow \partial_{n+1}^{\text{CW}} = 0, \\ \text{губ. функ.} \\ Z_n^{\text{CW}}(X_n, G) \\ \text{из} \leftarrow \partial_n^{\text{CW}} \text{ збіг.} \\ Z_n^{\text{CW}}(X_{n+1}, G) \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X_{n+1}, G) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X_{n+1}, X_n, G) \rightarrow \dots \\
 & \quad \parallel \leftarrow \text{лем. 6.3.} \\
 & \quad 0
 \end{aligned}$$

Припустимо додатково, що на попередньому кроці існує ізоморфизм $H_n^{\text{sing}}(X_n, G) \rightarrow H_n^{\text{CW}}(X_n, G)$ було отримано як $\hat{f}_{n*} : H_n^{\text{sing}}(X_n, G) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X_n, X_{n-1}, G) = C_n^{\text{CW}}(X_n, G)$; тоді за теоремою посл. пар $\hat{f}_n \hat{f}_{n*} = \ker(\delta_n : H_n^{\text{sing}}(X_n, X_{n-1}, G) \rightarrow H_{n-1}^{\text{sing}}(X_{n-1}, G)) \subset [\text{подгуб. } \partial_n^{\text{CW}}] \subset \ker \partial_n^{\text{CW}} = Z_n^{\text{CW}}(X_n, G) \cong H_n^{\text{CW}}(X_n, G)$, бо, як було показано вище, $\partial_{n+1}^{\text{CW}}$ у всіх ком-плексах X_n нульовий $\Rightarrow B_n^{\text{CW}}(X_n, G) = 0$. Зокрема, при $n=0$ $\hat{f}_{0*} : H_0^{\text{sing}}(X_0, G) \rightarrow H_0^{\text{sing}}(X_0, \emptyset, G) = C_0^{\text{CW}}(X_0, G) \cong H_0^{\text{CW}}(X_0, G)$ - канон. із-м. Це припущення означає, що у посл.

Винше $\delta_{n+1} : C_{n+1}^{CW}(X_{n+1}, G) \rightarrow H_n^{Sing}(X_n, G)$ можна записати
 на композицію $\dot{f}_{n*} \circ \delta_{n+1} = \partial_{n+1}^{CW} : C_{n+1}^{CW}(X_{n+1}, G) \rightarrow C_n^{CW}(X_{n+1}, G)$,
 образ якої лежить у $Z_n^{CW}(X_{n+1}, G)$ (подібно спираючись на вибір.

з "вертикальними" ізоморфізмами на діаграмі). Отримавши точну

$$0 \rightarrow H_{n+1}^{Sing}(X_{n+1}, G) \xrightarrow{\dot{f}_{(n+1)*}} C_{n+1}^{CW}(X_{n+1}, G) \xrightarrow{\partial_{n+1}^{CW}} Z_n^{CW}(X_{n+1}, G) \rightarrow H_n^{Sing}(X_{n+1}, G) \rightarrow 0$$

В силу точності, передостанній член - це $Z_n^{CW}(X_{n+1}, G)$, тому за теоре-
 мою про із-н $H_n^{Sing}(X_{n+1}, G) \cong Z_n^{CW}(X_{n+1}, G) / \text{Im } \partial_{n+1}^{CW} = H_n^{CW}(X_{n+1}, G)$.
 (точність)

З точності у другому члені, $H_{n+1}^{Sing}(X_{n+1}, G) \cong \text{Im } \dot{f}_{(n+1)*} = [\text{точн.}] =$

$$\text{ker } \partial_{n+1}^{CW} = Z_{n+1}^{CW}(X_{n+1}, G) \cong [B_{n+1}^{CW}(X_{n+1}, G) = 0, \text{ див. вище}] \cong H_{n+1}^{CW}(X_{n+1}, G),$$

причому ізоморфізм тут побудований саме так, як потрібно
 за прип. індукції (додамо вище).

Це завершує доведення для скінченновимірного $X = X_{\dim X}$.

У заг. випадку можна діяти як у дов. Th. 6.4: "носії"
 сим. ланцюгів компактні, а отже містяться в X_n для

деякого n . Впр. 7.1. Відновити деталі завершення доведення. $\triangle$
Поди звідси і з лем. інв-ті сил. гомотопій (Соч. 5.9.)

маємо:

Соч. 7.1. Клітинні гомотопії є гомотопічними інваріантами:
 $X \sim Y$ (клім. пр-ти) $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}_+$, аб. гр. G $H_k^{CW}(X, G) \cong H_k^{CW}(Y, G)$.
Зокрема, гомот. інваріантами є клітинні числа Бетті і ейлерова
характеристика $\chi(X) := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k \text{rank } H_k^{CW}(X)$, що збігається
зі сигнатурою (якщо визначена).

Лем. Звідси й з Пр. 1.3. випливає, що для скінченних кліт.
пр-тів ейлерова хар-ка завжди визначена і може бути об-
числена за формулою $\chi(X) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k \text{rank } C_k^{CW}(X) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k |A_k|$,
що часто є найпростішою з усіх (див. приклади далі).

Впр. 7.2. Довести, що клітинні гомотопії менс ізоморфні
сигнатурі, а отже є гомотопічними інваріантами.

Рем. З ізоморфності у Тн.7.1 таке випливає, що клін.
гомології задов. усім аксіомам теорії гомологій з Тн.6.5.

Щоправда, для цього потрібно закінчити побудову функтора:

Рч.7.3. $\forall$ клін. гр-ру X , аб. гр. G і $k \in \mathbb{Z}_+$ ототопнимо,
як раніше, $C_k^{CW}(X, G)$ з $H_k^{sing}(X_k, X_{k-1}, G)$. Нехай $f: X \rightarrow Y$ —
клін. відображення клін. просторів; тоді, зокрема,
 $f(X_k) \subset Y_k$ і $f|_{X_k}: X_k \rightarrow Y_k$ неперервне. Потім чл.
 $f_k^{CW} = f_{k*} : H_k^{sing}(X_k, X_{k-1}, G) \rightarrow H_k^{sing}(Y_k, Y_{k-1}, G)$ гом-зм, що
індукується f у k -міс відносних гомологій (за Рч.1.6).

Тоді $\{f_k^{CW} : C_k^{CW}(X, G) \rightarrow C_k^{CW}(Y, G)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ є вертикальн. ланц.
комплексів $C_*^{CW}(X, G)$ і $C_*^{CW}(Y, G)$, причому $(f \circ g)_k^{CW} = f_k^{CW} \circ g_k^{CW}$.

• $g_k^{CW} \circ (id_X)_k^{CW} = id_{C_k^{CW}(X, G)}$ $\forall k, G$ та клін. f, g .

Рем. $f_k^{CW} = g_{k*}$ кор. випливає, бо f -клін. $\Rightarrow f(X_{k-1}) \subset Y_{k-1}$.
 $\Rightarrow f_k$ — гом-зм з функторіальними властивос-
тями за побудовою (з власт. f_{k*}). Тож, що

Вона утв. комутатив. тобто що

$$\begin{array}{ccc} C_k^{CW}(X, G) & \xrightarrow{\partial_k^{CW}} & C_{k-1}^{CW}(X, G) \\ \downarrow f_k^{CW} & \searrow \partial_k^{CW} & \downarrow f_{k-1}^{CW} \\ C_k^{CW}(Y, G) & \xrightarrow{\partial_k^{CW}} & C_{k-1}^{CW}(Y, G) \end{array}$$

комутативна $\forall k \in \mathbb{N}$. Розглянемо дві гілочки комутативних діаграм з точним посл. пар (за Рл.1.6.):

$$\begin{array}{l} \dots \rightarrow H_k^{\text{sing}}(X_k, X_{k-1}, G) \xrightarrow{\delta_k} H_{k-1}^{\text{sing}}(X_{k-1}, G) \rightarrow \dots \\ \quad \quad \quad \downarrow g_{k*} \quad \quad \quad \downarrow f_{(k-1)*} \\ \dots \rightarrow H_k^{\text{sing}}(Y_k, Y_{k-1}, G) \xrightarrow{\delta_k} H_{k-1}^{\text{sing}}(Y_{k-1}, G) \rightarrow \dots \\ \quad \quad \quad \downarrow f_{(k-1)*}^{\text{sing}} \quad \quad \quad \downarrow f_{(k-1)*}^{\text{sing}} \\ \quad \quad \quad \rightarrow H_{k-1}^{\text{sing}}(X_{k-1}, G) \xrightarrow{f_{(k-1)*}^{\text{sing}}} H_{k-1}^{\text{sing}}(X_{k-1}, X_{k-2}, G) \rightarrow \dots \\ \quad \quad \quad \downarrow f_{(k-1)*}^{\text{sing}} \quad \quad \quad \downarrow f_{(k-1)*}^{\text{sing}} \\ \quad \quad \quad \rightarrow H_{k-1}^{\text{sing}}(Y_{k-1}, G) \xrightarrow{f_{(k-1)*}^{\text{sing}}} H_{k-1}^{\text{sing}}(Y_{k-1}, Y_{k-2}, G) \rightarrow \dots \end{array}$$

Путь $f_{(k-1)*}^{\text{sing}}$ - "сингулярний" індукований із-м. Об'єднано

ці два комутативні квадрати в отриманому bigr. груп з нліт. ланцюгами:

$$\begin{array}{ccccc} C_k^{CW}(X, G) & \xrightarrow{\delta_k} & H_{k-1}^{\text{sing}}(X_{k-1}, G) & \xrightarrow{f_{(k-1)*}^{\text{sing}}} & C_{k-1}^{CW}(X, G) \\ \downarrow f_k^{CW} & & \downarrow f_{(k-1)*}^{\text{sing}} & & \downarrow f_{k-1}^{CW} \\ C_k^{CW}(Y, G) & \xrightarrow{\delta_k} & H_{k-1}^{\text{sing}}(Y_{k-1}, G) & \xrightarrow{f_{(k-1)*}^{\text{sing}}} & C_{k-1}^{CW}(Y, G) \end{array}$$

Оск. ця діагр. також комутативна, а $f_{(k-1)*}^{\text{sing}} \circ \delta_k = \partial_k^{CW}$ для обох просторів, звідси маємо потрібне. $\triangle$

Лема 6.1-ад.гр.
Сол. 7.2. Відповідність, що клім. гр-ру X відносить комплекс $C_*^{CW}(X, G)$, а клім. відображення f - морфізм $\{f_k^{CW}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ є коваріантним функтором з категорії клім. гр-рів та відобр. (підкатегорії у Top) у категорію ланцюгових комплексів. Зокрема, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ визначений гом-зм $f_{k*}^{CW} : H_k^{CW}(X, G) \rightarrow H_k^{CW}(Y, G)$, і композиція описаного вище функтора з функтором гомологій ланц. комплекса є коваріантним функтором клітинних гомологій: $X \mapsto \{H_k^{CW}(X, G)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, $f \mapsto \{f_{k*}^{CW}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$. Ап-но, композиція з функторами переходу до спряженого комплекса (з коеф. у G , де тепер початкова гр. коеф. - $\mathbb{Z}$) і гомологій утворює контраваріантний функтор клітинних гомологій.

Впр. 7.3. Показати, що клітинні гомології дійсно задов. аксіомам з Th. 6.5 (із заміною перер. відображень на клітинні). Для цього ще потрібно буде поду-

дубати відносно підпису змодель на точку посл-сть наші.
Впр. 7.4. Показати, що клітинні коомології тес задов.
 коомологічний версії аксіом.

Ех. 7.1. 0-вим. клітинні пр-ри - це, нагадамо, в точ-
 ності дискретні (Ес. 6.5.). Як було встановлено на почат-
 ку глв. Тл. 7.1. (для X_0), для такого пр-ру $X \forall$ ад. гр. G

$$H_k^{CW}(X, G) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{|X|} G, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases} \quad \text{Зокр., при } |X| < \infty : G = \mathbb{Z}$$

[Зокр., це max qdla $S^0 = \{-1, 1\}$.]

маємо еінл. пар-ну $\chi(X) = \text{rank } H_0^{CW}(X) = \text{rank } C_0^{CW}(X) = |X|$.
Rem. $\S$ дв. 7.2. Ес. 5.4. $\forall$ кліт. пр-ру X гр. коедр. G $\partial_1^{CW} = j_{0*} \circ \delta_1$,

де $j_{0*} : H_0^{sing}(X_0, G) \rightarrow H_0^{sing}(X_0, \mathbb{Q}, G)$ - канон. ізоморфізм,
 а $\delta_1 : C_1^{CW}(X, G) = H_1^{sing}(X_1, X_0, G) \rightarrow H_0^{sing}(X_0, G) \simeq H_0^{sing}(X_0, \mathbb{Q}, G) = C_0^{CW}(X, G)$ згідно із загальним означенням (Тл. 1.1.)

визначається як $(\alpha + C_1^{sing}(X_0, G)) + B_1^{sing}(X_1, X_0, G) \mapsto$
 $\mapsto \partial_1^{sing} \alpha + B_0^{sing}(X_0, G)$, де $B_0^{sing}(X_0, G) = 0$ (Ес. 5.4., що

оч. узагальнюється на неск. випадок). Власовуючи те, що ми будували sign. line $C_1^{cw}(X, G) \subset H_1^{sing}(X_1, X_0, G)$, це означає, що $\forall$ клім. ланцюга (1-вм.):

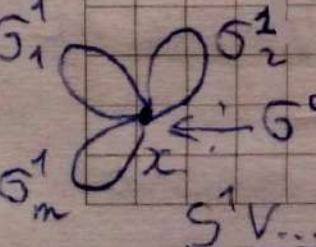
$$\text{Cor. 7.3. } \partial_1^{cw} \left(\sum_{\alpha \in A_1} g_\alpha \sigma_\alpha^1 \right) = \sum_{\alpha \in A_1} g_\alpha \partial_1^{cw} \sigma_\alpha^1 = \sum_{\alpha \in A_1} g_\alpha \partial_1^{sing} \tau_\alpha^1 = \sum_{\alpha \in A_1} g_\alpha \left(\tau_\alpha^1(1) - \tau_\alpha^1(-1) \right),$$

(0-вм. клім. ланцюга) $\downarrow$

де τ_α^1 - хар. відобр. σ_α^1 ($\mathbb{D}^1 = [-1, 1] \rightarrow X$), а ∂_1^{sing} - 1-вм. симп. граничний ком-зм.

Ex. 7.2. 1-вм. клім. пр-ри - це графи, пуб. Ес. 6.14. Як було там встановлено, $\forall$ такий (лім) зв'язний простір (принаймні скінченний) гомотопічно екв-ний букету кіл, що тепер, звичайно, є графом, тому в силу гомот. інв-сті обчислення клім. показує тут зводиться до обч. клім. показує $\bigvee \sigma^1$ (з пом. Ес. 6.14.).

Клім. розбиття тут природно побудувати з 0-вм. $G^0 = \{x\}$ - спільної точки букета, і



$\sigma^1 \vee \dots \vee \sigma^1_m$

1-вим. $\{\sigma_x^1\}_{x \in \Gamma}$, що вим. класи функція і приклено-
 поточка до σ^0 як $\neq$ Ес. 6.6 для $n=1$. Також $\forall \text{ад. гр. } G$

$$C_k^{CW}(\bigvee_{\Gamma} S^1, G) = \begin{cases} \{g\sigma^0 \mid g \in G\} \simeq G, & k=0; \\ \{\sum_{x \in \Gamma} \sigma_x^1 \mid g_x \in G, |\{x \mid g_x \neq 0\}| < \infty\} \simeq \bigoplus_{\Gamma} G, & k=1; \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

За Сок. 7.3, $\forall x \in \Gamma \partial_1^{CW} \sigma_x^1 = \sigma^0 - \sigma^0 = 0$, тобто $\partial_1^{CW} = 0$. Оскільки інші ∂_k^{CW} менше, од., $= 0$, маємо $B_k^{CW}(\bigvee_{\Gamma} S^1, G) = 0 \quad \forall k$, отже
 $H_k^{CW}(\bigvee_{\Gamma} S^1, G) \simeq Z_k^{CW}(\bigvee_{\Gamma} S^1, G) = C_k^{CW}(\bigvee_{\Gamma} S^1, G) \simeq \begin{cases} G, & k=0; \\ \bigoplus_{\Gamma} G, & k=1; \\ 0, & k \geq 2, \end{cases}$ що, зовсім, очевидно.

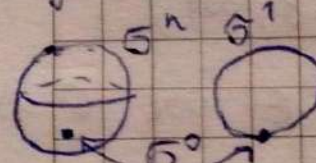
узгоджується з резу-том Ес. 6.14. Зокр., для $G = \mathbb{Z}$ числа Бетті
 чанк $H_k^{CW}(\bigvee_{\Gamma} S^1) = \text{чанк } C_k^{CW}(\bigvee_{\Gamma} S^1) = \begin{cases} 1, & k=0; \\ \infty, & k=1, |\Gamma| = \infty; \\ m, & k=1, |\Gamma| = m; \\ 0, & k \geq 2, \end{cases}$ тому єнд.

хар-ка $\chi(S^1 \vee \dots \vee S^1) = 1 - m$. Для зб'яного графа m
 мртм - кількість "незалежних циклів", див. Ес. 6.14.
Ес. 7.3. Для S^n при $n \in \mathbb{N}$ згідно з Ес. 6.6 маємо

клім. розбиття $\{\sigma^0, \sigma^n\}$, тому $C_k^{CW}(S^n, G) = \begin{cases} \{g\sigma^n\} \cong G, & k=n; \\ \{g\sigma^0\} \cong G, & k=0; \\ 0, & k \neq 0, n. \end{cases}$
 $\forall \text{ ад. гр. } G$

При цьому всі $\partial_k^{CW} = 0$ при $n \geq 2$ очевидним чином:

у клім. ланц. комплексі немає сусідніх ненульових груп.

При $n=1$ за лем. 7.3, $\partial_1^{CW} \sigma^1 = \sigma^0 - \sigma^0 = 0$, тому
 також всі $\partial_k^{CW} = 0$. Тому ан-по го попер. прикладу

 $S^n, n \geq 2$ S^1 $B_k^{CW}(S^n, G) = 0 \quad \forall k, i$

$H_k^{CW}(S^n, G) \cong Z_k^{CW}(S^n, G) = C_k^{CW}(S^n, G) \cong \begin{cases} G, & k=0, n; \\ 0, & k \neq 0, n, \end{cases}$ як у л. 6, 16.

При $G = \mathbb{Z}$ маємо числа Бетті $\text{rank } H_k^{CW}(S^n) = \text{rank } C_k^{CW}(S^n) = \begin{cases} 1, & k=0, n; \\ 0, & k \neq 0, n, \end{cases}$

єдн. кар. $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ (це так і є для $n=0$ за л. 7.1).

Вопр. 7.5. Обчислити кількість замовлень букета голубих
квіток серед голубих вишнєвих (пор. з Ек. 6.14) і

Впр. 6.16.) Це певанско зробити безпосередньо або з використанням наступної властивості:

Впр. 7.6. Довести для клітинних комплексів твердження

Впр. 6.15. : $H_k^{CW} \left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, x_\gamma), G \right) \cong \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_k^{CW} (X_\gamma, G)$

$\forall$ ім. зв. клім. пр-ів X_γ з фікс. т. x_γ , що $\in$ їх 0-вип. клітинами, $k \in \mathbb{N}$, аб. гр. G .

Зс. 7.1. Згідно з рез-том Впр. 6.2. (див. практику), комплексний проективний пр-р $\mathbb{C}P^n$ має клім. розбиття $\{\sigma^0, \sigma^2, \dots, \sigma^{2n}\}$ (зотн. для $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ те ж, що у Зс. 6.6. і 7.3). Ця інформація достатньо, щоб обчислити його клім. гомології! Дійсно, оск. клітин сусідніх розмірностей не існує, $\partial_k^{CW} = 0 \quad \forall k$, отже H_k , аб. гр. G $B_k^{CW}(\mathbb{C}P^n, G) = 0 \Rightarrow H_k^{CW}(\mathbb{C}P^n, G) \cong Z_k^{CW}(\mathbb{C}P^n, G) = C_k^{CW}(\mathbb{C}P^n, G) \cong \begin{cases} G, & 0 \leq k \leq 2n \text{ парне;} \\ 0 & \text{якщо непарне.} \end{cases}$
Для $G = \mathbb{Z}$ числа Бетті $\text{rank } H_k^{CW}(\mathbb{C}P^n) = \text{rank } C_k^{CW}(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq 2n \text{ парне;} \\ 0 & \text{якщо непарне.} \end{cases}$
і ейлерова хар-ка $\chi(\mathbb{C}P^n) = 1 - 0 + 1 - 0 + \dots + 1 = n + 1$.