

1. Розглянемо іншу клім. стр. на S^n , $n \geq 2$ (вона використовується у лекціях для обх. клім. топологій $(\mathbb{R}P^n)$):

$\{\sigma_1^n, \sigma_2^n, \sigma^{n-1}, \sigma^0\}$. Покр. для $S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum (x^i)^2 = 1\}$ $\sigma_1^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \mid x^{n+1} > 0\} \subset S^n$, $\sigma_2^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \mid x^{n+1} < 0\}$ і $\{\sigma^{n-1}, \sigma^0\}$ — стандарт. клім. стр. на $S^{n-1} = \{(x^1, \dots, x^n, 0) \in S^n\}$. Знайти $H_k(S^n)$ для такої стр. (кліматичні)

Отже, $C_k(S^n) = \begin{cases} \{m_1 \sigma_1^n + m_2 \sigma_2^n \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}^2, & k=n \\ \{m \sigma^{n-1} \mid m \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}, & k=n-1 \\ \{m \sigma^0 \mid m \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}, & k=0 \end{cases}$

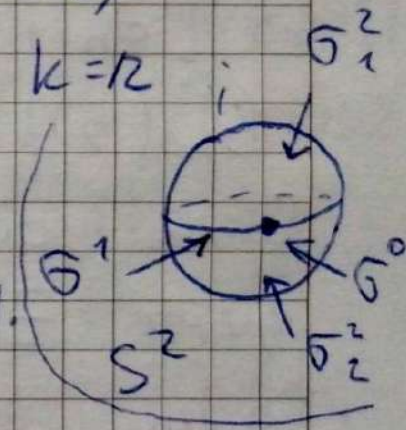
$i = 1, 2$

$\partial_2 \sigma_i^n = [\text{кістяк } S_{n-1} = S^{n-1} = \sigma^{n-1} \cup \sigma^0] = [\sigma_i^{n-1} : \sigma^{n-1}]$

σ_i^{n-1} . Кожен кар. виобр. σ_i^n

$\varphi_i^n : \mathbb{D}^n \rightarrow S^n : (x^1, \dots, x^n) \mapsto \begin{cases} (x^1, \dots, x^n, \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n (x^j)^2}), & i=1 \\ (x^1, \dots, x^n, -\sqrt{1 - \sum_{j=1}^n (x^j)^2}), & i=2 \end{cases}$ $\forall x \in \mathbb{D}^n$

глісно кар. виобр. кліматичні, і $\varphi_i^n|_{S^{n-1}} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0)$, бо $\sum_{j=1}^n (x^j)^2 = 1$. Після факториза —



тї за $S_{n-1}^n \setminus \Phi^{-1}(B^1) = \emptyset$ (де $\varphi^{n-1}: B^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ - хар. (канон. при.)

визобр. G^{n-1}) можна вважати, що $\tilde{\rho} \circ \varphi^n: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ потонсе $\forall i \Rightarrow [\tilde{\rho}: G^{n-1}] = 1$. Тїмгу

$\partial_2: C_n(S^n) \rightarrow C_{n-1}(S^n): m_1 \sigma_1^n + m_2 \sigma_2^n \mapsto m_1 \sigma_1^{n-1} + m_2 \sigma_2^{n-1} = (m_1 + m_2) \sigma^{n-1}$. Тїмгу $Z_n(S^n) = \{m \sigma_1^n - m \sigma_2^n \mid m \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \Rightarrow \Rightarrow [\partial_{n+1} = 0 \Rightarrow B_n(S^n) = 0] \Rightarrow H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$.

$B_{n-1}(S^n) = \{(m_1 + m_2) \sigma^{n-1} \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} = \{m \sigma^{n-1} \mid m \in \mathbb{Z}\} = C_{n-1}(S^n)$.

Дакї усі ∂_k тї не, що у S^{n-1} , модто $= 0$. Тїмгу, зокрема, $Z_{n-1}(S^n) = C_{n-1}(S^n) = B_{n-1}(S^n) \Rightarrow H_{n-1}(S^n) = 0$, і далї $H_k(S^n) = 0, k = \overline{1, n-2}$ як звичайно, $H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$.

Отримали "звичайні" гомологї $S^n \in \overline{\text{Ейлєрову хар-ку для}} (0 \text{ при } k \neq 0, n)$.
тажї сир. можна показувати як $\sum_k \text{rank } C_k(S^n) = 1 + 0 + \dots + (-1)^{n-1} + 2(-1)^n = 1 + (-1)^n$, як і повинно бути.

Ан-по можна зобразити для $n=1$: $\sigma_1^0 \circlearrowleft \sigma_2^1 \circlearrowright \sigma_2^0$. Крім того,

$$\{\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_1^1, \sigma_2^1\}, \quad C_k(S') = \begin{cases} \{m_1 \sigma_1^1 + m_2 \sigma_2^1\} \simeq \mathbb{Z}^2, & k=1 \\ \{m_1 \sigma_1^0 + m_2 \sigma_2^0\} \simeq \mathbb{Z}^2, & k=0 \\ 0, & k>1 \end{cases} \quad \text{В записи}$$

когда для выбора кан. базиса. можно считать $\partial_1(\sigma_i^1) = \pm(\sigma_i^0 - \sigma_2^0)$. Если для вычисления $u \pm$ где $i=1$ i - где $i=2$. Тогда $\partial_1(m_1 \sigma_1^1 + m_2 \sigma_2^1) = m_1(\sigma_1^0 - \sigma_2^0) - m_2(\sigma_1^0 - \sigma_2^0) = (m_1 - m_2)$

$$\sigma_1^0 + (m_2 - m_1)\sigma_2^0 \quad \text{т.е.}, \quad Z_1(S') = \{m \sigma_1^1 + m \sigma_2^1 \mid m \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \\ \Rightarrow [B_2(S') = 0] \Rightarrow H_1(S') \simeq \mathbb{Z}; \quad B_0(S') = \{(m_1 - m_2)\sigma_1^0 - (m_1 - m_2)\sigma_2^0 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} = \{m(\sigma_1^0 - \sigma_2^0) \mid m \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}, \quad \text{Ост. } \partial_0 = 0, \quad Z_0(S') = C_0(S') \simeq \mathbb{Z}^2.$$

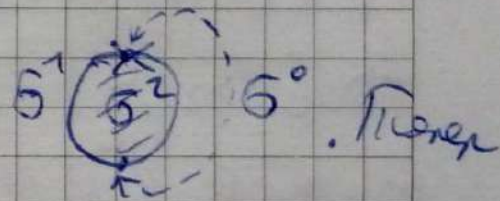
$$H_0(S') = Z_0(S') / B_0(S') \simeq \mathbb{Z}: \quad m_1 \sigma_1^0 + m_2 \sigma_2^0 + \{m(\sigma_1^0 - \sigma_2^0)\} \mapsto \\ \mapsto m_1 + m_2 \in \mathbb{Z} \quad (\text{из стандарт. подгруппы из-за для } H_0). \quad \text{Действительно,} \\ \text{напр., корректность: } m_1 \sigma_1^0 + m_2 \sigma_2^0 + \{m(\sigma_1^0 - \sigma_2^0)\} = m_1' \sigma_1^0 + m_2' \sigma_2^0 + \\ + \{m(\sigma_1^0 - \sigma_2^0)\} \Leftrightarrow \exists m: m_1 - m_1' = m, \quad m_2 - m_2' = -m, \quad \text{тогда} \\ m_1' + m_2' = (m_1 - m) + (m_2 + m) = m_1 + m_2. \quad \text{и т.д. - аналогично, так и} \\ \text{вероятно, что. И как отпр. как зависимость (0 при } k \neq 1, 0). \\ \text{Еще, характеристика } \chi \text{ кривой произведения: } \chi(S') = 2 - 2 + 0 - \dots = 0.$$

2. Use sigma autom. kdim. cmp. S^2 :



Anno go H_g^2 y lengixa, $d_2: \sigma^2 \mapsto \sigma_1^1 - \sigma_1^1 = 0$. Ale merye
 $d_1: \sigma^1 \mapsto \sigma_2^0 - \sigma_1^0$. Tymy $H_2(S^2) \cong \ker d_2 = C_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$,
 $H_1(S^2) \cong \ker d_1 = 0$, $H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}$ sek y merye. zagomi. $\chi(S^2) =$
 $(Z_2''(S^2))$
 $= 2 - 1 + 1 = 2$.

3. y merye, kdim. np-pi skadivo σ_1^0 i σ_2^0 :



max samo $d_2 = 0$, ale u $d_1 = 0$. Tymy

$$H_k(X) \cong C_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0,1,2 \\ 0, & k \neq 0,1,2 \end{cases}, \quad \chi(X) = 1 - 1 + 1 - 0 \dots = 1$$

Use np-pi $S^2 / \{x, y\} \sim S^2 \vee S^1$.

$$\begin{aligned} \chi(S^n \times S^n) &= \\ &= 1 + (-1)^n \cdot 2 + (-1)^n = \\ &= 2(1 + (-1)^n) \end{aligned}$$

4. Znaymy kdim. rozklochi $S^n \times S^n$ npu $n > 1$ (npu $n=1$ ye T^2).

$$\begin{aligned} S^n &= \sigma^0 \cup \sigma^n \text{ (cmang. chupam)}, \text{ moyu } S_1^n \times S_2^n = \underbrace{\sigma_1^0 \times \sigma_2^0}_{\cong \sigma^0} \cup \underbrace{\sigma_1^0 \times \sigma_2^n}_{\cong \sigma^n} \cup \\ &\cup \underbrace{\sigma_1^n \times \sigma_2^0}_{\cong \sigma^n} \cup \underbrace{\sigma_1^n \times \sigma_2^n}_{\cong \sigma^{2n}} = \sigma^0 \cup \sigma^n \cup \sigma^n \cup \sigma^{2n} \end{aligned}$$

Yci $\partial_k = 0 \Rightarrow H_k(S^n \times S^n) \cong C_k(S^n \times S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=2n, 0 \\ \mathbb{Z}^2, & k=n, \\ 0, & k \neq 0, n, 2n. \end{cases}$