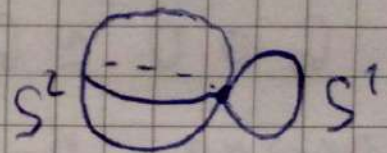


Д/з.1. Знайдено стандартні покриття $S^2 \vee S^1$ за допомогою
 посл.-сті M - B , для дов. групи коэф. G :



Покриття $\{U, V\}$: $U \cong S^2$, $V \cong S^1$, $U \cap V = \text{point}$
 (вигляд "малюнка")

отже, отже за всіма k

$$H_k(U, G) \cong \begin{cases} G, & k=0, 2 \\ 0, & k \neq 0, 2 \end{cases}, \quad H_k(V, G) \cong \begin{cases} G, & k=0, 1 \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases}, \quad H_k(U \cap V, G) \cong \begin{cases} G, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Посл. M - B , при $k \geq 3$:

$$\cdots \rightarrow H_k(U, G) \oplus H_k(V, G) \rightarrow H_k(S^2 \vee S^1, G) \rightarrow H_{k-1}(U \cap V, G) \rightarrow \cdots$$

З точності, $H_k(S^2 \vee S^1, G) = 0$. Кінцеві:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_2(U \cap V, G) &\xrightarrow{0} H_2(U, G) \oplus H_2(V, G) \xrightarrow{0} H_2(S^2 \vee S^1, G) \xrightarrow{\Delta_2} H_1(U \cap V, G) \xrightarrow{0} \\ &\rightarrow H_1(U, G) \oplus H_1(V, G) \xrightarrow{0} H_1(S^2 \vee S^1, G) \xrightarrow{\Delta_1} H_0(U \cap V, G) \xrightarrow{0} H_0(U, G) \oplus H_0(V, G) \xrightarrow{0} \\ &\rightarrow H_0(S^2 \vee S^1, G) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $(g, k) \mapsto g - k$

З точності у члені H_2 , $H_2(S^2 \vee S^1, G) \cong H_2(U, G) \oplus H_2(V, G) \cong G \oplus 0 \cong G$. Кількість тут той же, що у прикладі вище, зокрема, $H_0(S^2 \vee S^1, G) \cong G$ за ліл. зв'язністю, і $\text{Im } \Delta_1 = \text{Ker}(g \mapsto (g, g)) = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 0$ за точністю в $H_0(U \cup V, G)$.

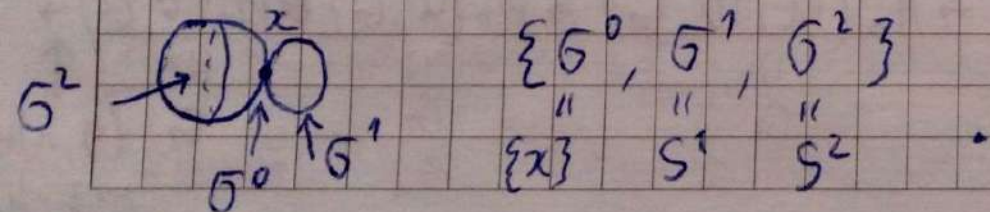
Тому за точністю в перех. двох членах, $H_1(S^2 \vee S^1, G) \cong H_1(U, G) \oplus H_1(V, G) \cong 0 \oplus G \cong G$. Тл.ч.,

$$H_k(S^2 \vee S^1, G) \cong \begin{cases} G, & k=0, 1, 2; \\ 0 & \text{у інш. випад.} \end{cases}$$

При $G = \mathbb{Z}$ можемо знайти ейл. хар.: $\chi(S^2 \vee S^1) = 1 - 1 + 1 - 0 + \dots = 1$.

Додатково: яку клітинну структуру має $S^2 \vee S^1$?

Будемо її зі станд. кл. стр. на S^2 і S^1 зі спільною 0-вим. клітиною (так завжди можна зробити для букета):



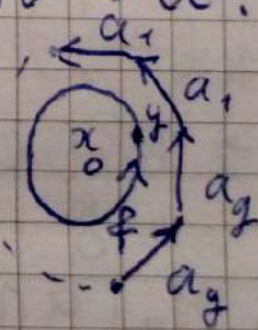
Як раніше, $H_0(N_g^2) \cong \mathbb{Z}$ за лін. зв., і з точності в кінц. ел-тах посл. $\Delta_1 = 0$, тому залишається:

$$0 \rightarrow H_2(N_g^2) \xrightarrow{\Delta_2} H_1(u \cap v) \xrightarrow{i_{uv*}} H_1(u) \xrightarrow{i_{u*}} H_1(N_g^2) \rightarrow 0$$

$\downarrow \mathbb{Z}$ $\downarrow \mathbb{Z}_g$

Отримано i_{uv*} за допомогою фундаментальних груп, як робили для M_g^2 (звар. T^2): $i_{uv*} \circ \Psi_{uv} = \Psi_u \circ i_{uv*}$ за доведеною раніше лем., де $\Psi_{uv}: \pi_1(u \cap v, y) \rightarrow H_1(u \cap v)$, $\Psi_u: \pi_1(u, y) \rightarrow H_1(u)$ - ком-зми $[f] \mapsto \varphi_f + B_1(\dots)$ для деякої $y \in u \cap v$, причому Ψ_{uv} - ізоморфізм, бо $\pi_1(u \cap v, y) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ аделева, а $u \cap v$ лін. зв.; i_{uv*}, i_{u*} - гомоморфізми і гомоморфізми індуковані ком-зми включення $i_{uv}: u \cap v \rightarrow u$.

При цьому $i_{uv*}: \pi_1(u \cap v, y) \rightarrow \pi_1(u, y)$ переводить твірну $[f] \in \pi_1(u \cap v, y) \cong \mathbb{Z}$ (неск. цикл. група) - голот. клас петлі f навколо $x - y$ $[a_1][a_1] \dots$



$\dots [a_g][a_g] = [a_1]^2 [a_2]^2 \dots [a_g]^2$, де a_i - петлі, що біж.

ребран. Тому $(\Psi_u \circ i_{uv*})([f]) = 2\varphi_{a_1} + \dots + 2\varphi_{a_g} + B_1(u)$,

де $\varphi_{a_1}^{+B_1(u)}, \dots, \varphi_{a_g}^{+B_1(u)}$ — образи $H_1(u) \cong \mathbb{Z}^g$ (бо Ψ_u — изом., оск. u — лін. зб.). З іншого боку, $\Psi_{uv}([f]) = \varphi_f + B_1(u \cap v)$ — образ $H_1(u \cap v)$, бо Ψ_{uv} — изоморфізм. Т.ч.,

$$i_{uv1*}(\varphi_f + B_1(u \cap v)) = (i_{uv1*} \circ \Psi_{uv})([f]) = (\Psi_u \circ i_{uv*})([f]) = 2(\varphi_{a_1} + \dots + \varphi_{a_g}) + B_1(u).$$

Якщо взяти композиції з изоморфізмами на $\mathbb{Z} : \mathbb{Z}^g \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$(\varphi_f + B_1(u \cap v)) \mapsto 1, \varphi_{a_i} + B_1(u) \mapsto (0, \dots, 1, \dots, 0) \quad \forall i = \overline{1, g}.$$

$$i_{uv1*}(n) = (2n, \dots, 2n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \text{ Тому } \text{Ker } i_{uv1*} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [\text{можл. у } H_1(u \cap v)] \Rightarrow \text{Im } \Delta_2 = 0 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \Rightarrow [\text{можл. у } H_2(N_g^2)] \Rightarrow \\ \Rightarrow H_2(N_g^2) = 0.$$

З короткої точної посл. $0 \rightarrow H_1(u \cap v) \xrightarrow{i_{uv1*}} H_1(u) \xrightarrow{i_{u1*}} H_1(N_g^2) \rightarrow 0$:

$$H_1(N_g^2) \cong H_1(u) / \text{Im } i_{uv1*} \cong \mathbb{Z}^g / \underbrace{\{(2n, \dots, 2n) \mid n \in \mathbb{Z}\}}_{H_1^{12}(u \cap v)} \cong \\ \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2. \text{ Дійсно, розгл. відобл. } \pi$$

$$\chi: \mathbb{Z}^g / H \rightarrow \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2: (m_1, \dots, m_g) + H \mapsto (m_1 - m_g, \dots, m_{g-1} - m_g,$$

$$m_g \bmod 2). \text{ Коректність: } (m_1, \dots, m_g) + H = (m'_1, \dots, m'_g) + H \\ \Leftrightarrow \underbrace{m_i - m'_i}_{\exists n \in \mathbb{Z}:} = 2n \quad \forall i = \overline{1, g} \Rightarrow (m_i - m_g)(m'_i - m'_g) =$$

$$= (m_i - m'_i) - (m_g - m'_g) = 2n - 2n = 0 \quad \forall i = \overline{1, g-1} \quad i \quad (m_g - m'_g) \bmod 2 = 0 \\ \Rightarrow m_g \bmod 2 = m'_g \bmod 2.$$

$$X \text{ — } \mathbb{Z}_2\text{-м-м за підмогою, де: } \forall \begin{matrix} m_1, \dots, m_{g-1} \\ x \end{matrix} (m_1, \dots, m_{g-1}, 0) = \\ = ((m_1, \dots, m_{g-1}, 0) + H) \cap ((m_1, \dots, m_{g-1}, 1) + H) = ((m_1+1, \dots, m_{g-1}+1, 1) + H).$$

$$\text{Напевні, інж: } (m_1, \dots, m_g) + H \in \text{Ker } X \Rightarrow m_1 - m_g = \dots = \\ = m_{g-1} - m_g = 0, \quad m_g \bmod 2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = \dots = m_{g-1} = m_g = 2n, \\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (m_1, \dots, m_g) \in H.$$

Тл.ч. X — гомоморфизм із-м. Останочо:

$$H_k(N_g^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2, & k=1; \\ \mathbb{Z}, & k=0; \\ 0, & k \neq 0, 1. \end{cases}$$

Для $g=1$ це узгоджується з отриманим раніше для $\mathbb{R}P^2 = N_1^2$ за Тл. Хонга і Фуревана.

Зокрема, $b_1 = \text{rank}(\mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2) = g-1$, тому Ейлерова хар-ка $\chi(M_g^2) = 1 - (g-1) + 0 - \dots = 2-g$ (як і для M_g^2 збігається з симпліційною $V-E+F$, що була отримана ще в іншій топології).

1. Впр. 6.2 лекції. Аналогічно до $\mathbb{R}P^n$ описати кінтингу структуру комплексного проект. пр-гу $\mathbb{C}P^n$.

Задаємо, що $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim = \{(z^0 : \dots : z^n)\}$, де $(z^0, \dots, z^n) \neq 0$ і $(z^0 : \dots : z^n) = (w^0 : \dots : w^n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : w^i = \lambda z^i \quad \forall i = \overline{0, n}$ (комплексні однорідні координати),

тобто це кін. комплексних прямих (1-вим. вект. підпросторів), що проходять через 0 у $\mathbb{C}^{n+1}$. Як і для $\mathbb{R}P^n$, при $n > 0$ ($\mathbb{C}P^0 = \{(1)\}$ - одна точка) розділимо його:

$$\mathbb{C}P^n = \{(z^0 : \dots : z^n) \mid z^n \neq 0\} \sqcup \{(z^0 : \dots : z^{n-1} : 0) \mid (z^0, \dots, z^{n-1}) \neq 0\}.$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \mathbb{C}^n \\ \parallel \end{array}$$

$$\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{B}^{2n}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \mathbb{C}P^{n-1} \end{array}$$

Дійсно, друга підлягає очевидно ототожненню. (і гомеоморфізма) $\mathbb{CP}^{n-1}$, а для першої $(z^0 : \dots : z^n) \mapsto \left(\frac{z^0}{z^n}, \dots, \frac{z^{n-1}}{z^n} \right) -$ гомеоморфізм на $\mathbb{C}^n$: кон. відк. відк., бо $\left(\frac{\lambda z^0}{\lambda z^n}, \dots, \frac{\lambda z^{n-1}}{\lambda z^n} \right) = \left(\frac{z^0}{z^n}, \dots, \frac{z^{n-1}}{z^n} \right)$.
 $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, задається перер. ф-цією і має обернене $(w^1, \dots, w^n) \mapsto (w^1 : \dots : w^n : 1)$ - теж перер. Тому композиція з гомео-

морфізмом $\Psi : B^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, що ототожнює з $\mathbb{C}^n$ - гомеоморфізм на образ, тобто впадеження B^{2n} у $\mathbb{CP}^n$ (і образ - відкр. підмн.).

$w = (w^1, \dots, w^n) \mapsto (\Psi^1(w) : \dots : \Psi^n(w) : 1)$, де $(w^1, \dots, w^n)$ - комплексні коорд. т. $(x^1, \dots, x^{2n}) \in B^{2n}$: $w^1 = x^1 + i x^2, \dots, w^n = x^{2n-1} + i x^{2n}$.

$\Psi^1, \dots, \Psi^n$ розуміємо так само. Якщо не $(w^1, \dots, w^n) \in \partial B^{2n} = S^{2n-1}$, то $|w^1|^2 + \dots + |w^n|^2 = 1$. Розглянемо відобр. $(w^1, \dots, w^n) \mapsto (w^1 : \dots : w^n : 0) \in \mathbb{CP}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^n$ (прообразам $\forall$ точкам $\mathbb{CP}^{n-1}$ тут $\in \{(\lambda w^1, \dots, \lambda w^n) \mid \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$ - велике коло S^{2n-1}) - перер. відк. (відображення Хопфа). Обернемо Ψ так, щоб воно неперервно "зшивалося" з попереднім! Наприклад, для

$$\Psi(w) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} |w| \cdot \frac{w}{|w|}, & w \neq 0; \\ 0, & w = 0 \end{cases} \quad \text{при } |w| \rightarrow 1 (\Psi'(w): \dots$$

$$\dots: \Psi^n(w): 1) = (w^1: \dots: w^n: \frac{|w|}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} |w|}) \rightarrow (w^1: \dots: w^n: 0),$$

что и требуется. Таким образом,

$$\varphi^{2n}: \mathbb{D}^{2n} \subset \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n: \underbrace{(w^1, \dots, w^n)}_w \mapsto \begin{cases} (\Psi^1(w): \dots: \Psi^n(w): 1), & w \in B^{2n}; \\ (w^1: \dots: w^n: 0), & w \in S^{2n-1} \end{cases}$$

перех. $\varphi^{2n}|_{B^{2n}}$ — вложение: $\varphi^{2n}(S^{2n-1}) = \mathbb{CP}^{n-1} = \partial \varphi^{2n}(B^{2n})$,

таким образом $B^{2n} = \varphi^{2n}(\mathbb{D}^{2n}) = \mathbb{CP}^n$ — $2n$ -век. клетка с хар. вложением.

φ^{2n} . Если $n > 1$ так само определяется $\varphi^{2n-2}: \mathbb{D}^{2n-2} \rightarrow B^{2n-2} = \mathbb{CP}^{n-1}$ и $\varphi^{2n-2}(S^{2n-3}) = \mathbb{CP}^{n-2}$ и т.д. Определяется клетка

$$B^0 = \mathbb{CP}^0 = \{(1:0:\dots:0)\}, \dots, B^{2k} = \mathbb{CP}^k = \varphi^{2k}(\mathbb{D}^{2k}), \dots, B^{2n}$$

где $\forall k = \overline{1, n}$

$$\varphi^{2k}: \mathbb{D}^{2k} \subset \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{CP}^k: w = (w^1, \dots, w^k) \mapsto \begin{cases} (\overset{0}{\Psi^1(w)}: \dots: \overset{k-1}{\Psi^k(w)}: 1: \overset{k}{0}: \dots: \overset{2k}{0}), & w \in B^{2k}; \\ (\overset{0}{w^1}: \dots: \overset{k-1}{w^k}: 0: \dots: \overset{k}{0}), & w \in S^{2k-1}. \end{cases}$$

П. 4. $\mathbb{CP}^n$ — n -мерный клеточный комплекс, который можно разбить на $\{B^0, B^2, \dots, B^{2n}\}$ (таким образом задан n -мерный клеточный комплекс).

Зокрема, при $n=1$ $\mathbb{CP}^1$ з $\{\sigma^0, \sigma^2\}$ - та не структурна,
що у S^2 :  , Півня $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ (сфера Римана),

а відкр. Хопфа $\mathbb{CP}^1: S^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, що виникає у побудові
 $\mathbb{CP}^2$ - це "класичне" відкр. Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$.

2. Впр. 6.9. лекції: Показати, що $\forall$ квіт. пр-ру X
надбудова $\Sigma X \in$ квіт. пр-ром.

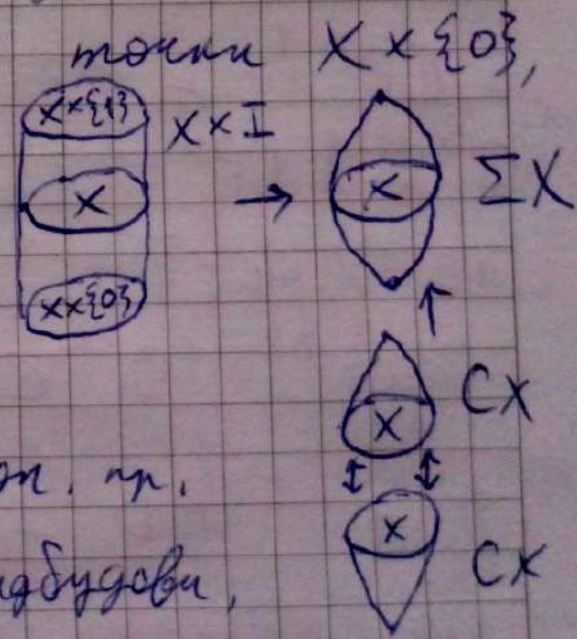
Нагадаємо, що $\Sigma X = (X \times I / X \times \{1\}) / X \times \{0\}$ або, що те

не саме, $X \times I / \sim$, де $\sim$ отождествлює усі точки $X \times \{0\}$,
усі т. $X \times \{1\}$ (в іншій), а решту залишає.

1 спосіб. Помітимо, що $\Sigma X \cong CX \sqcup CX / \sim$,

де отождествляються точки "основ" конусів:

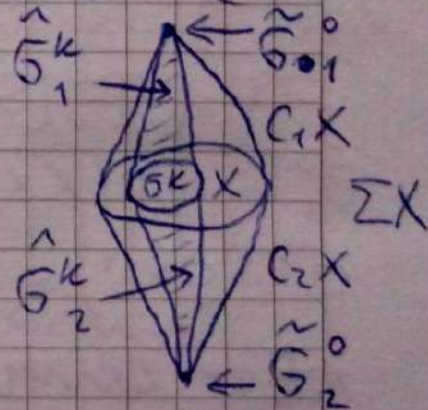
$p_1(x, 0) \sim p_2(x, 0) \quad \forall x \in X$, де p_1, p_2 - канон. пр.
конусів. Якщо $p: X \times I \rightarrow \Sigma X$ - канон. пр. надбудови,
то зможемо-за канона побудувати так:



$$\forall x \in X, z \in I$$

$$p(x, z) \mapsto \begin{cases} p_1(x, 1-2z), & z \in [0, \frac{1}{2}] \\ p_2(x, 2z-1), & z \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Потім можна використати Рл. 6.5. лемми: Обидві коні CX є клим. пр-рами, де коні клім. $\mathcal{B}^k$ пр-ру X $(k+1)$ -вим. климала $\hat{\mathcal{B}}^k$ ($\hat{\mathcal{B}}_1^k$ і $\hat{\mathcal{B}}_2^k$ для двох конусів), пряс "вершини" конусів $\tilde{\mathcal{B}}_1^0 = p_1(X \times \{1\})$ і $\tilde{\mathcal{B}}_2^0 = p_2(X \times \{1\})$. Тл.ч. маємо клим. розд. $\Sigma X: \bigcup_{\mathcal{B}^k \text{ клим. } X} \{\mathcal{B}^k, \hat{\mathcal{B}}_1^k, \hat{\mathcal{B}}_2^k\} \cup \{\tilde{\mathcal{B}}_1^0, \tilde{\mathcal{B}}_2^0\}$.

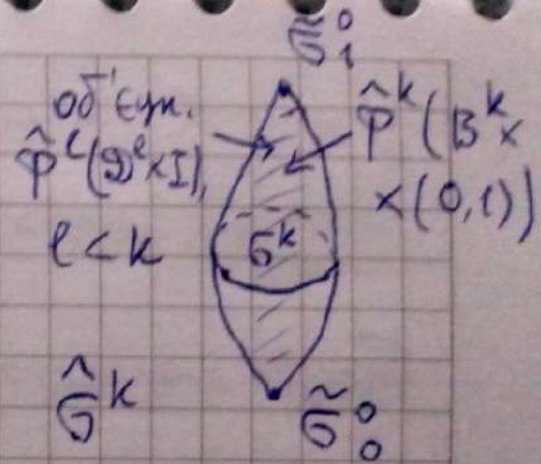


Зокрема, за необхідності так можна приклеїти побудову ΣY до X для клим. парн (X, Y) (як конус у Рл. 6.5.).

II спосіб. Перімімо, що у поперед. Конструкції конусе $\mathcal{B}^k \cup \hat{\mathcal{B}}_1^k \cup \hat{\mathcal{B}}_2^k$ саме є $(k+1)$ -вим. клималою. Дійсно, нехай $\varphi^k: \mathcal{D}^k \rightarrow X$ - кан. відобр. $\mathcal{B}^k$. Визначимо тепер

$$\hat{\varphi}^k : \mathbb{D}^k \times I \rightarrow \Sigma X : (x, s) \mapsto p(\varphi^k(x), s).$$

Покази $\hat{\varphi}^k|_{\text{int } \mathbb{D}^k \times I} = B^k \times (0,1)$ - валад. $B^k \times (0,1)$



$$(\exists \text{ влост. } \varphi^k \subset p), \text{ и } \hat{\varphi}^k(\partial(\mathbb{D}^k \times I)) =$$

$$= \hat{\varphi}^k(S^{k-1} \times I \cup \mathbb{D}^k \times \{0\} \cup \mathbb{D}^k \times \{1\}) =$$

$$= p(\varphi^k(S^{k-1}) \times I) \cup \{p(X \times \{0\})\} \cup \{p(X \times \{1\})\}, \text{ где } \tilde{S}_0^0 := \{p(X \times \{0\})\},$$

$\tilde{S}_1^0 := \{p(X \times \{1\})\}$ - "вершины" надрезов (0-вм. кл.), а

$\varphi^k(S^{k-1})$ - скел. од. S^l , $l < k$ - климат X , тому $p(\varphi^k(S^{k-1}) \times I)$ - скел. од. $\hat{\varphi}^l(\mathbb{D}^l \times I)$, $l < k$ (для хар. фигур. фигур.

климат). Тому (оск. $\mathbb{D}^k \times I \cong \mathbb{D}^{k+1}$) $\hat{S}^k := \hat{\varphi}^k(\mathbb{D}^k \times I)$ - $(k+1$ -

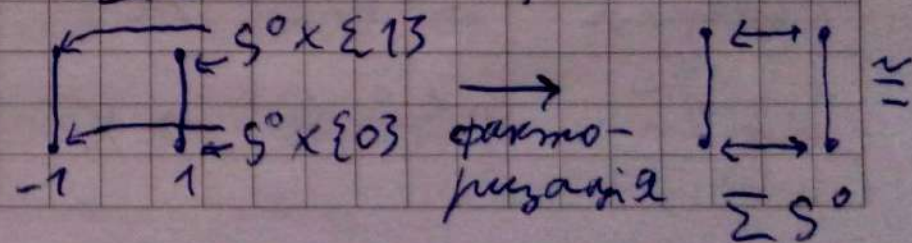
вм. климат $\gamma \Sigma X$, и $\{\hat{S}^k | S^k - \text{климат } X\} \cup \{\tilde{S}_0^0, \tilde{S}_1^0\}$ -

климат. разд. ΣX .

З. Впр. 6.6, лекції. Показати, що $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$.

З. Впр. 6.6, лекції. Показати, що $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$.

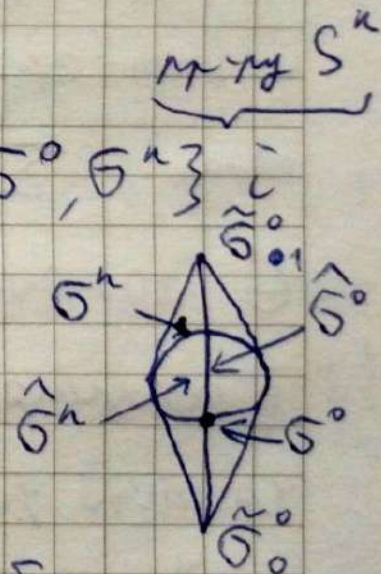
$$n=0: S^0 = \{-1, 1\}, S^0 \times I \cong I \sqcup I$$



$$\cong \text{circle } S^1 \quad (\text{наприклад, } P(x, \vartheta) \mapsto \begin{cases} e^{-i\pi\vartheta} & , x = -1 \\ e^{i\pi\vartheta} & , x = 1 \end{cases} = e^{ix\pi\vartheta})$$

задає член-зм).

Для $n > 0$ використаємо клім. розбиття $\{\sigma^0, \sigma^n\}$ на пер. задачу: ΣS^n має клім. розд. $\{\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^n, \tilde{\sigma}^0, \tilde{\sigma}^n\}$, де:



- $\tilde{\sigma}_0^0 = \{P(S^n \times \{0\})\}$, $\tilde{\sigma}_1^0 = \{P(S^n \times \{1\})\}$ - 0-вим. клім.

- $\hat{\sigma}^0 = P(\sigma^0 \times I)$ - 1-вим. клім. її межа (тобто $\hat{\sigma}^0(\partial D^1)$) - це $\tilde{\sigma}_0^0 \cup \tilde{\sigma}_1^0$.

- $\hat{\sigma}^n = P(\sigma^n \times I) = \Sigma S^n$ - $(n+1)$ -вим. клім. з межею $\hat{\sigma}^0 \cup \tilde{\sigma}_0^0 \cup \tilde{\sigma}_1^0$ (див. пер. задачу)

Покрі член-зм $\Sigma S^n \rightarrow S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ можна побудувати, наприклад, так: $\tilde{\sigma}_0^0 \mapsto \{(0, \dots, 0, -1)\}$, $\tilde{\sigma}_1^0 \mapsto \{(0, \dots, 0, 1)\}$, на $\hat{\sigma}^0$ $P(\sigma^0 \times \{3\}) \mapsto \{(0, \dots, 0, -\cos \pi\vartheta)\}$, і на $\hat{\sigma}^n$ можна

$$P(x, \theta) \mapsto (\underbrace{\sin \pi \theta \cdot x}_{\mathbb{R}^{n+1}}, -\cos \pi \theta). \text{ Крі фігур. перек.,}$$

$$\mathbb{S}^n = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

узгоджені $\Rightarrow$ [клімати - функ. покр.] $\Rightarrow$ разом задають

перек. $\Sigma S^n \rightarrow S^{n+1}$, що за побудовою візь $\Rightarrow [S^n \text{ комп.}, S^{n+1} \text{ хаусд.}] \Rightarrow$

$\in$ гомеоморфізм.

(раніше така "альтернативна" клім. структура зустрічалася для S^2 у Ек. 6.15. лекції).

4. Впр. 6.8. лекції. Нехай X має n комп. лім. зв-сті. Знайти 0-ву гр. вірт. синг. гомології $H_0(X, \{x\}, G)$, де $x \in X$, $\forall$ ад. гр. G .

Використаємо точну посл. пари $(X, \{x\})$ (як у Рл. 6.3. лекції). Її кінець:

$$\dots \rightarrow H_0(\{x\}, G) \xrightarrow{\iota_*} H_0(X, G) \rightarrow H_0(X, \{x\}, G) \rightarrow 0$$

(це віртосл. - "коротка точна посл. пари" для $k=0$).

Питання: існує індукований виміщення $i: \{x\} \rightarrow X$:

$$\bar{i}_{0*}(g\varphi_x + \beta_0(\{x\}, G)) = g\varphi_x + \beta_0(X, G) \quad \forall g \in G, \text{ Нехай } X = \bigcup_{i=1}^m X_i$$

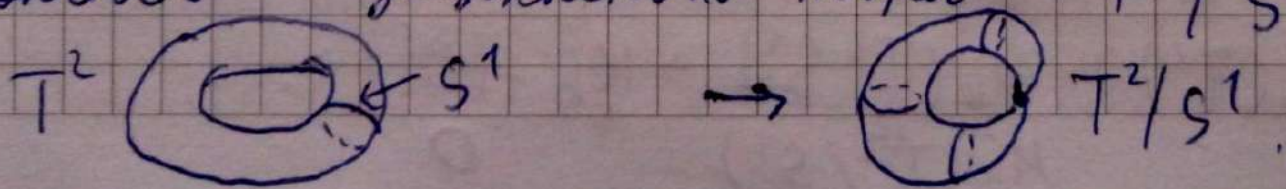
ліній. ком., і для визначеності нехай $x \in X_m$. За Рл. 5.2.

лежить, $H_0(X, G) \cong G^m$, при цьому при цьому із-мі $g\varphi_x + \beta_0(X, G)$ переходить у $(0, \dots, 0, g)$. Тому $\ker i_{0*} = 0$ (якщо піднос. з H_0 дійсно точка), а $\text{Im } i_{0*} = \text{span. } \{(0, \dots, 0, g) \mid g \in G\} \cong G$ при із-мі. Тому за Лем. Комер про із-м ($\Leftarrow$) власт. короткої точної посл.)

$$H_0(X, \{x\}, G) \cong H_0(X, G) / \text{Im } i_{0*} \cong G^m / \underbrace{\{(0, \dots, 0, g)\}}_{=: K} \cong G^{m-1}$$

(Зокр. 0 при $m=1$, що вже було у Рл. 6.3). Дійсно $(g_1, \dots, g_m) + K \mapsto (g_1, \dots, g_{m-1})$ ок. $\bullet \in$ ізоморфізм, (для дов. кільк. ком. ліній. зв-сті все аналогічно).

5. За допомогою точної посл. пари знайти сигнатурні гомології "замкненого тора" T^2/S^1 , де S^1 - меридіан.



(згідно з Ex. 6.15 лекції, $T^2/S^1 \sim S^2 \vee S^1$, тому вірно-
 вірно уже знаємо з 9/3 1.) (не не отримавши, факто-
 ризація по параметрі: $T^2 \circlearrowleft S^1 \rightarrow \left(\bigvee_{S^2 \vee S^1} T^2/S^1 \right)$

у клітинній стр. $T^2 \{ \sigma^0, \sigma_1^1, \sigma_2^1, \sigma^2 \}$ S^1 - одна з 1-вим.
 клітин σ_1^1 , тому (T^2, S^1) - клітинна пара і можна
 використати теорему про варіація і точку пості-

З точності, $H_k(T^2/S^1) \simeq H_k(T^2) = 0$. Кінцеві!

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \rightarrow H_2(S^1) & \rightarrow & H_2(T^2) & \rightarrow & H_2(T^2, S^1) & \xrightarrow{\delta_2} & H_1(S^1) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_1(T^2) & \rightarrow & H_1(T^2, S^1) & \xrightarrow{0=\delta_1} \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 0 & & \mathbb{Z} & & H_2(T^2/S^1) & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}^2 & & H_1(T^2/S^1) \\
 & \nearrow i_{0*} & & & & & & & & & \\
 0 \rightarrow H_0(S^1) & \rightarrow & H_0(T^2) & \rightarrow & H_0(T^2, S^1) & \rightarrow & 0 \\
 \parallel & \nwarrow \text{ліній. зв-ство} & \parallel & & \parallel & & & & & & \\
 \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 & & & & & &
 \end{array}$$

$0 \leftarrow \text{Впр. 6.13. лемма.}$

Групи $H_2(T^2)$, $H_1(T^2)$ обчислювали раніше. Але по до поперед. задачі, в силу ліній. зв-ств i_{0*} - ізоморфізм, тому за точностістю дві системи з такою стрілкою нульові (звідси й випливає $H_0(T^2, S^1) = 0$). Тоді i_{1*} має індукований вкл. $S^1 \rightarrow T^2$. Зокр., якщо $f: I \rightarrow S^1$ - параметризація S^1 як петлі, $i_{1*}: m\varphi_f + B_1(S^1) \mapsto m\varphi_f + B_1(T^2) \forall m \in \mathbb{Z}$. Це i_{1*} , напр., до $\varphi_f + B_1(\dots)$ - твірні sign. вільно абелевих груп (які ізоморфні груп. групам S^1 і T^2 sign. , а твірні sign. твірними). Т.ч., з точності $\forall m \delta_2 = \forall \text{ker } i_{1*} = 0 \Rightarrow \delta_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow H_2(T^2/S^1) \simeq H_2(T^2) \simeq \mathbb{Z}$, і знова матимемо коротку точну посл. $0 \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{i_{1*}} H_1(T^2) \rightarrow H_1(T^2/S^1) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$
 $\Rightarrow H_1(T^2/S^1) \simeq H_1(T^2) / \text{Im } i_{1*}$. Оск. $\varphi \neq +B_1(T^2)$ - твірима,

при ізоморфізмі $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ $\text{Im } i_{1*}$ бігм. скансімо, $\{(0, m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$. А н-по до поперед. задачі, маємо $H_1(T^2/S^1) \simeq \mathbb{Z}^2 / \{(0, m)\} \simeq \mathbb{Z}$. Нарешті, $H_0(T^2/S^1) \simeq \mathbb{Z}$ за ліч. зв.:

$$H_k(T^2/S^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, 1, 2; \\ 0 & \text{в інш. випад.} \end{cases}$$

Д/з 1 Як зв'язані ці міркування, якщо факторизу-
 вати не за периферією чи паралельно нори,
 а скансімо, за замкненою кривою (її носієм)

$\left\{ \left(\underbrace{e^{i\theta}}_{S^1}, \underbrace{e^{i\frac{p}{q}\theta}}_{S^1} \right) \mid \theta \in [0, 2\pi q] \right\}$, де $p \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathbb{N}$?

Д/з 2 Квіт все простір можна описати
 як $S^2 / \{x, y\}$, де $x \neq y$. Обчислити його
 гом. за ген. точної посл. та інші пер. та показати, що для $n \neq 2$ $H_n(S^2 / \{x, y\}) = 0$?