

Перша та друга варіації довжини шляху

функція $k \geq 2$,
кривина g

(M, g) - річчовий простір, k -м., $k \geq 2$, $\dim M = n$, ∇, R - кривизна і тензор
дев. Нехай $\gamma \in C^k([a, b], M)$ - натурально параметризований шлях.

Ново варіацією зветься будь-яке $\tilde{\gamma} \in C^k([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon), M)$ ($\forall \varepsilon > 0$)
таке, що $\tilde{\gamma}(t, 0) = \gamma(t) \forall t \in [a, b]$. Якщо при цьому $\tilde{\gamma}(a, \tau) = \gamma(a)$,
 $\tilde{\gamma}(b, \tau) = \gamma(b) \forall \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, то говорять, що $\tilde{\gamma}$ - вар. з закріпленими кінцями.

Лема Довжина $\tilde{\gamma}$ у точках (a, τ) і (b, τ) визначається через одні
і ті ж похідні (як для шляху γ).

Лема. Нехай $\tilde{\gamma}$ - вар. γ . $\forall \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\gamma_\tau := \tilde{\gamma}(\cdot, \tau) : [a, b] \rightarrow M$ -
 k -м. шлях, і $\gamma_0 = \gamma$. Якщо вар. - з закр. кінцями, то $\forall \tau$ γ_τ
з'єднує $\gamma(a)$ і $\gamma(b)$. Т.ч., γ - найкоротша $\Rightarrow \forall$ вар. $\tilde{\gamma}$ з

закр. кінцями $\forall \tau$ $\ell(\gamma_\tau) \geq \ell(\gamma) = \ell(\gamma_0) \Leftrightarrow \tau = 0$ - м. мінімуму

ф-ції $\tau \mapsto \ell(\gamma_\tau) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau} \ell(\gamma_\tau) \Big|_{\tau=0} = 0$ і $\frac{d^2}{d\tau^2} \ell(\gamma_\tau) \Big|_{\tau=0} \geq 0$.

Ці величини називають першою та другою варіацією

довисати γ (для вариаций δ). Ця умова все ще не є достатньою: вона означає, що γ - найкоротша серед "достатньо близьких шляхів" (які виходять з варіацією), а не глобально (уб. Ех. нижче).

Вп. 1. (Перша варіація довжини). Нехай $\delta \in C^k([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon), M)$ - варіація пат. парам. γ , $\gamma_\delta = \delta(\cdot, \tau) \forall \tau$, $Y(t) := d_{(t, 0)} \delta\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) \forall t \in [a, b]$ (при цьому $\forall t \in Y(t) \in T_{\delta(t, 0)} M = T_{\gamma(t)} M$, маємо Y - $(k-1)$ -н. поле уздовж γ). Тоді

$$\frac{d}{d\tau} \ell(\gamma_\delta) \Big|_{\tau=0} = g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), Y(t)) \Big|_a^b - \int_a^b g_{\gamma(t)}(\nabla_{\gamma'} \gamma'(t), Y(t)) dt.$$

$\Rightarrow$ Пусть найдем $X: X(t, T) := d(t, T) G\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, $\overbrace{t \in [a, b]}^{\text{множество } Y = Y(\cdot, 0)}$ $\overbrace{G \in (-\varepsilon, \varepsilon)}^{y(t, T) := d(t, T) G\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}$
 Уч. $G(t, 0) = \gamma(t) \forall t$, $X(t, 0) = \gamma'(t) \forall t$. Пусть y зависит от x . Тогда $(x^1, \dots, x^n)$
 G имеет вид $(t, T) \mapsto (G^1(t, T), \dots, G^n(t, T))$, но $X(t, T) = \frac{\partial G^i}{\partial t}(t, T) \frac{\partial}{\partial x^i}$,

$$Y(t, T) = \frac{\partial \sigma^i}{\partial T}(t, T) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \forall t, T. \text{ За пр. лем. получим,}$$

$$\left. \frac{d}{dT} \ell(\gamma_T) \right|_{T=0} = \left. \frac{d}{dT} \int_a^b \sqrt{g_{\sigma(t, T)} \left(\underbrace{\sigma(t, T)'_t}_{X(t, T)}, \underbrace{\sigma(t, T)'_t}_{X'(t, T)} \right)} dt \right|_{T=0} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\frac{\partial}{\partial T} (g_{\sigma(t, T)}(X(t, T), X(t, T)))}{\sqrt{g_{\sigma(t, 0)}(X(t, 0), X(t, 0))}} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{t-изм.} \\ \text{непараметр.} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial T} (g_{\sigma(t, T)}(X(t, T), X(t, T))) \Big|_{T=0} dt \quad \textcircled{=}$$

Для конечного t будем рисовать интеграл: конечная непрерывная дуга по кругу скал. квадрата для $T \mapsto X(t, T)$ и дуга "поперечной" кривой $T \mapsto \sigma(t, T)$ вариации, по мере движения дуги $\in T \mapsto Y(t, T)$, тогда

$$\textcircled{=} \int_a^b g_{\sigma(t, T)} (\nabla_{Y(t, T)} X(t, T), X(t, T)) \Big|_{T=0} dt \quad \textcircled{=}$$

в лок. коорд. так будет (на дуге)

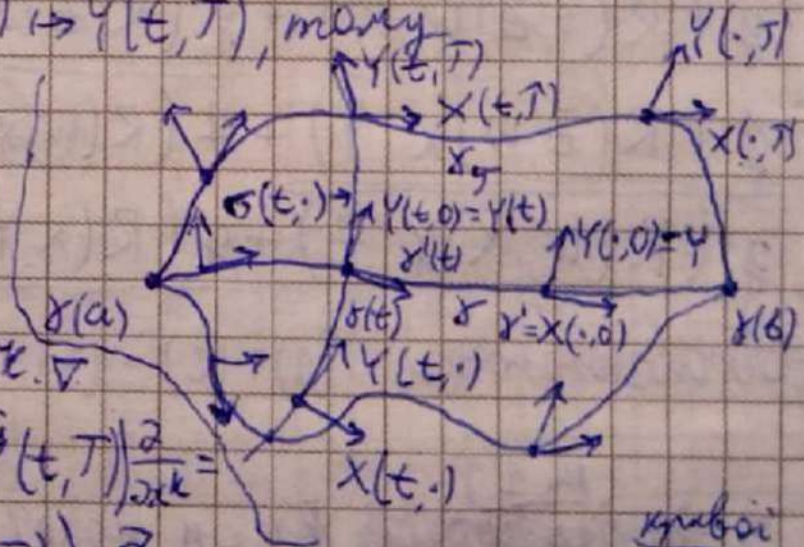
визуал. $U \ni \sigma(t, T) \quad \forall t, T \in \sigma^{-1}(U)$ для $\{t, T\}$ - окр. ∇

$$\nabla_{Y(t, T)} X(t, T) = \left(X^k(t, T) \right)_T + \Gamma_{ij}^k(\sigma(t, T)) Y^i(t, T) X^j(t, T) \frac{\partial}{\partial x^k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \sigma^k}{\partial t \partial T}(t, T) + \Gamma_{ij}^k(\sigma(t, T)) \frac{\partial \sigma^i}{\partial T}(t, T) \cdot \frac{\partial \sigma^j}{\partial t}(t, T) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \text{ за пр. лем. ков. век. получим.}$$

Але ми не будем вводить, а просто записали ∇ в лок. коорд.

$\nabla_{X(t, T)} Y(t, T)$, интегралом меняем $t \mapsto Y(t, T)$ при фиксированном T так



наше условие "обобщенный" кривой $\gamma_T: t \mapsto G(t, T)$, а $t \mapsto X(t, T)$ —
 и формула выше. Отсюда, в нашем случае $\nabla_X Y = \nabla_Y X$ (або просто $\nabla_X Y -$
 $-\nabla_Y X = [X, Y] = [G_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), G_*\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)] = [1_{\text{ker}}] = G_*\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial T}\right]\right) = 0$). Т.ч.

$$\begin{aligned} \textcircled{=} \int_a^b g_{G(t, T)}(\nabla_{X(t, T)} Y(t, T), X(t, T)) \Big|_{T=0} dt &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} (g_{G(t, T)}(Y(t, T), X(t, T))) - g_{G(t, T)}(Y(t, T), \right. \\ &\left. \nabla_{X(t, T)} X(t, T)) \right) \Big|_{T=0} dt = g_{G(t, 0)}(Y(t, 0), X(t, 0)) \Big|_a^b - \int_a^b g_{G(t, 0)}(Y(t, 0), \nabla_{\gamma'_T} \gamma'_T(t)) \Big|_{T=0} dt \end{aligned}$$

Пск. γ'_T гиперплоскостная кривая γ_T , где T непрерывная, монотонно
 возрастающая $T=0$, отсюда $\nabla_{\gamma'_0} \gamma'_0 = \nabla_{\gamma'_0} \gamma'_0$. Тогда

$$\textcircled{=} g_{\gamma(t)}(Y(t), \gamma'(t)) \Big|_a^b - \int_a^b g_{\gamma(t)}(Y(t), \nabla_{\gamma'_0} \gamma'_0(t)) dt, \text{ что и требовалось. } \triangle$$

Реш. Для вариации γ замкнутого кинжолу $\gamma(a) = d_{(a,0)} \sigma \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) =$
 $= \left[\begin{array}{l} \text{деф. дифференциала} \\ T \mapsto (a, T) \text{ при } \text{через} \\ [(a,0) \text{ и } \text{напр. } \frac{\partial}{\partial t} \text{ при } T=0] \end{array} \right] = \sigma(a, T)'_{T=0} = \gamma(a)'_{T=0} = 0$. Аналогично, $\gamma(b) = 0$.

Сол. 1 γ по знаменателю Реш. 1 для вариации γ замкнутого кинжолу
 $\frac{d}{dT} \ell(\gamma_T) \Big|_{T=0} = - \int_a^b g_{\gamma(t)} (\nabla_{\gamma'} \gamma'(t), \gamma(t)) dt$.

Реш. Мы обосновали первую вариацию, выводя формулу Эйлера.

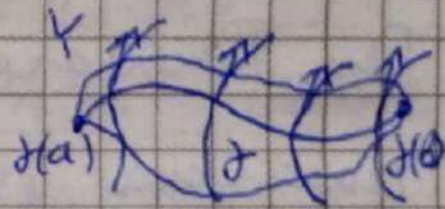
кажеться (там ми задавали $\delta(t, T) = (\delta^1(t) + T \rho^1(t), \dots, \delta^n(t) + T \rho^n(t))$ ^{з закритими кінцями} через збурення y ^{у лок. коорд.} Зокрема, ми з'ясували, що $\delta = 0 \Leftrightarrow \gamma$ -подозивна. Зробимо це й тут.

Р. 2. (Іспування варіацій) ^{Покладемо $k \geq 3$} $\forall$ $(k-1)$ -м. поряд γ уздовж γ існує варіація δ інтегру γ така, що $d_{(t,0)} \delta \left(\frac{\partial}{\partial T} \right) = \gamma(t) \forall t \in [a, b]$ (тут всі умови і позначення - як завжди). Якщо $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$, то δ ^{з закритими кінцями}.

Аналогічно до початку доведення Р. 3 з теми "Динамічне експоненціальне відображення", $\exists$ неперервна ф-ція $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \delta > 0: \forall t \in [a, b]$ $\exp_{\gamma(t)}$ визначене на $B_{\delta(t)}(0)$ (куля $T_{\gamma(t)}$ M sign. $\gamma(t)$). Тоді вона приймає на $[a, b]$ своє найм. значення $\min \delta > 0$, а $|\gamma|$ - найбільше, що $< +\infty$. Покладемо $\varepsilon := \frac{\min \{\delta(t) | t \in [a, b]\}}{\max \{|\gamma(t)| | t \in [a, b]\}} > 0$. Тоді $\forall t \in [a, b] \forall \delta \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad |\delta \gamma(t)| < \varepsilon |\gamma(t)| \leq \varepsilon \cdot \max_t |\gamma| = \min_t \delta \leq \delta(t)$, тобто визначене $\delta(t, T) := \exp_{\gamma(t)}(\delta \gamma(t))$.

$\sigma - (k-1)$ -м. за властивостями $\exp$ (закрепа $\exp_p(\sigma)$ можно записать $\exp_p$ за m зависящими разб'ором диф. уравнения $\exp$ пош. умов). При этом $\forall t \quad \sigma(t, 0) = \exp_{x(t)}(0) = x(t)$, можно же вариация γ ; $d_{(t,0)} \sigma \left(\frac{\partial}{\partial T} \right) = \sigma(t, T)'_{T=0} = \exp_{x(t)} (JY(t))'_{T=0} =$
 $= \begin{bmatrix} \text{власн.} \\ \exp \end{bmatrix} = Y(t)$. Каренити, при $Y(a) = 0 \quad \sigma(a, T) = \exp_{x(a)} (JY(a)) =$
 $= \exp_{x(a)}(0) = x(a) \quad \forall T$ и так само при $Y(b) = 0$ и $t = b$: кинзи закривки

Лем. Подато ми будуче вариация, выпускаючи геодезични з точек x : $\forall t \in [a, b] \quad \sigma(t, \cdot)$:



$T \mapsto \exp_{x(t)} (JY(t))$ - це геодезична, що виходить з $x(t)$ у напр. $Y(t)$ (див. тему про експ. відображення). Доведено це роз. наступне:

Соч. 2 Буде-яка регулярна найкоротша внутр. m -ки (M, g) - геодезична. $\Rightarrow$ Введемо на $\overset{k-м.}{\text{найкор.}}$ $Y: [a, b] \rightarrow M$ нат. параметризацию.

∇Y - не геодезична, подато $\exists t$ таке, що $\nabla_Y Y'(t) \neq 0$. > 0
 $\forall t$
 Поди існує таке $(k-1)$ -м. поле Y уздовж x , що $g_x(\nabla_Y Y', Y) > 0$

$\gamma(a) = \gamma(b) = 0$: наприклад, це $\gamma(t) = \lambda(t) \nabla_g \gamma(t)$, де $\lambda \in C^{k+1}([a, b])$,
 $\lambda(t) = 1$, $\lambda(a) = \lambda(b) = 0$, $\lambda \geq 0$ (доб. побудову ф-ції Лансона вище;

тут вважаємо $t \in (a, b)$, бо якщо $\nabla_g \gamma \neq 0$

у a або b , це має бути в деякій внутр. точці проляг). Тоді
за л. 2 $\exists$ варіація з зам. кінцями, для якої $d_{(0,0)} \left(\frac{\partial}{\partial T} \right) = \gamma$;

за л. 1 тоді $\frac{d}{dT} \ell(\gamma_T) \Big|_{T=0} < 0$, тобто γ -не найкоротша Δ

Рем. Попереднє доведення означає, що $\frac{d}{dT} \ell(\gamma_T) \Big|_{T=0} \stackrel{\text{для } \gamma \in \mathcal{B}}{=} 0 \Leftrightarrow \gamma$ -

геодезична (для нм. парам.), тобто геодезичні мають критичні
з зам. кінцями

(стаціонарні) точки варіацій довжини. Другу варіацію розм. лише для нм.

але спочатку доведемо наслідок лему Гаусса:

$\Rightarrow$ (Доведення л. 2 з теми "Гілово-експоненціальне відображення").

Отже, $B_\varepsilon^N(p)$ - норм. кульовий отвір $p \in M$, $q \in B_\varepsilon^N(p)$, $q \neq p$ -

точка перетину геодезичної γ_v і $\exp_p \cdot u$, де $u \in C^k((- \delta, \delta), S^{k-1}_u)$.

крива на сфері $S^{n-1}_u := S_u(0) \subset T_p M$ (вигл. g_p) з центром в 0

радиуса $\chi = |\exp_p^{-1}(q)|$:

$$\exp_p(u(0)) = q = \gamma_v(t_0) = \exp_p(t_0 v), \quad \text{Зокрема, } u(0) = t_0 v$$

Ке зменшимо t_0 , вважаємо γ_v нм. параметризованою, маємо

$$|v| = 1. \text{ Тоді } \chi = |u(0)| = t_0 |v| = t_0 \text{ (і це довжина вект. } \gamma_v \text{ від } p \text{ до } q)$$

$$\text{Покладемо } \forall t \in [0, \chi], T \in (-\delta, \delta) \quad G(t, T) := \exp_p\left(t \frac{u(T)}{\chi}\right).$$

$$\text{Будемо за власт. } \exp_p \text{ і } u, \quad G(t, 0) = \exp_p\left(t \frac{u(0)}{\chi}\right) = \left[\begin{matrix} u(0) = t_0 v \\ = \chi v \end{matrix} \right] =$$

$$= \exp_p(t v) = \gamma_v(t) \quad \forall t, \text{ маємо це варіація } \gamma_v \text{ Ке - т.зв. розглянутої}$$

$$\text{варіація, до } \forall T \exists t \mapsto G(t, T) = \exp_p\left(t \frac{u(T)}{\chi}\right) - \text{розг., що вик. з } P$$

$$\text{і напр. } \frac{u(T)}{\chi}. \text{ Крім того, } \left| \frac{u(T)}{\chi} \right| = \frac{|u(T)|}{\chi} = 1 \quad \forall T, \text{ маємо бачи всі}$$

$$\text{нм. параметризовані, отже маємо довжину } \chi = l(\gamma_T) \text{ (до}$$

$$\text{визначені на } [0, \chi]), \text{ т.ч., перша варіація нульова, і } \nabla_{\gamma'_v} \gamma'_v = 0,$$

$$\text{тільки з } \underline{\text{Рл. 1.}} \quad 0 = g_{\gamma_v(t)}(\gamma'_v(t), Y(t)) \Big|_{t=0} = 0, \text{ де } \forall t$$

$$Y(t) = \exp_p\left(t \frac{u(T)}{\chi}\right)' \Big|_{T=0} = d_{t \frac{u(0)}{\chi}} \exp_p\left(t \frac{u'(0)}{\chi}\right). \text{ При } t=0 \text{ це } 0,$$

$$\text{а } Y(\chi) = d_{u(0)} \exp_p(u'(0)) = (\exp_p \circ u)'(0). \text{ Оскільки } \gamma_v(\chi) = \gamma_v(t_0) = q,$$

може $0 = g_q(\gamma'_v(t_0), (\exp \circ \kappa)'(0))$. Це $i \in$ обернушена лема
Тайсса. $\triangle$

Рм 3. (Друга варіанція гравітації з закріпленими кінцями)
Нехай $k \geq 3$, $\sigma \in C^k([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon), M)$ - варіант пот. парам. розгинутих
з закріпленими кінцями

$\gamma, \gamma_T = \sigma(\cdot, T) \forall T, Y(t) = d_{(t, \sigma)} \left(\frac{\partial}{\partial T} \right) \forall t$. Тоді

$$\frac{d^2}{dT^2} \ell(\gamma_T) \Big|_{T=0} = \int_a^b \left(|\nabla_{\gamma'} Y^\perp(t)|^2_{\gamma(t)} - g_{\gamma(t)}(R_{\gamma(t)}(Y(t), \gamma'(t)) \gamma'(t), Y(t)) \right) dt,$$

де $Y^\perp$ - поле розгину γ , що утворює ортогональний проєкту-
вання $\forall t$ $Y(t)$ на $\gamma'(t)^\perp$: $Y^\perp = Y - \overbrace{g_{\gamma(t)}(Y, \gamma') \gamma'}^{Y^T \text{ (бо } \gamma'^T = 1)}$; $|\cdot|_{\gamma(t)} = g_{\gamma(t)}(\cdot, \cdot)$.

Інше $Y = Y^\perp$, маємо $Y(t) \perp \gamma'(t) \forall t$, то (було б тоді звана Y нормальною)

$$\frac{d^2}{dT^2} \ell(\gamma_T) \Big|_{T=0} = - \int_a^b g_{\gamma(t)}(\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} Y(t) + R_{\gamma(t)}(Y(t), \gamma'(t)) \gamma'(t), Y(t)) dt.$$

$\Rightarrow$ Використовуючи ці не позначення, що у виведенні Р.1 Крім того, через $Y^T := Y - Y^\perp = g_\bullet(Y, \gamma') \gamma' \overset{(\langle \gamma, \gamma' \rangle = 1)}{\text{позначимо ортот. проекцію } Y \text{ на } \gamma'}$.

Лем. 1. Для полів $Y, Y^T \in Y^\perp$ уздовж γ $\nabla_{\gamma'} Y^T = (\nabla_{\gamma'} Y)^T$ і $\nabla_{\gamma'} Y^\perp = (\nabla_{\gamma'} Y)^\perp$, де $(\cdot)^T$ і $(\cdot)^\perp$ — ортот. проєкції на γ' і його норм. підпр.-р. у кожній точці.

$\Rightarrow$ Дійсно, $\nabla_{\gamma'} Y^T = \nabla_{\gamma'} (g_\bullet(Y, \gamma') \gamma') = g_\bullet(\nabla_{\gamma'} Y, \gamma') \gamma' + g(Y, \nabla_{\gamma'} \gamma') \gamma' + g(Y, \gamma') \nabla_{\gamma'} \gamma'$.
 $\cdot \nabla_{\gamma'} \gamma' \Big|_{\gamma=0} = [\gamma\text{-норм. пар. век.}] = g(\nabla_{\gamma'} Y, \gamma') \gamma' = (\nabla_{\gamma'} Y)^T$, і тому

$$\begin{aligned} \nabla_{x_i} Y^\perp &= \nabla_{x_i} (Y - Y^T) = \nabla_{x_i} Y - \nabla_{x_i} Y^T = \nabla_{x_i} Y - (\nabla_{x_i} Y)^T = (\nabla_{x_i} Y)^\perp \quad (\text{lem. 1.}) \\ \frac{d^2}{d\tau^2} l(x_\tau) \Big|_{T=0} &= \frac{d^2}{d\tau^2} \int_a^b \sqrt{g_{\sigma(t,T)}(\dot{\sigma}(t,T), \dot{\sigma}(t,T))} dt \Big|_{T=0} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{g_{\sigma(t,T)}(X(t,T), X(t,T))}{\sqrt{g_{\sigma(t,T)}(X(t,T), X(t,T))}} \right) \right) \Big|_{T=0} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (g_{\sigma(t,T)}(X(t,T), X(t,T))) \Big|_{T=0}}{\sqrt{g_{\sigma(t,0)}(X(t,0), X(t,0))}} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \tau} (g_{\sigma(t,T)}(X(t,T), X(t,T))) \Big|_{T=0} \right)^2}{\left(\sqrt{g_{\sigma(t,0)}(X(t,0), X(t,0))} \right)^3} \right) dt = [\gamma\text{-nam. nap.}] = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(2g_{\sigma(t,T)}(\nabla_Y X(t,T), X(t,T)) \right) - \frac{1}{2} \left(2g_{\sigma(t,T)}(\nabla_Y X(t,T), X(t,T)) \right)^2 \right) \Big|_{T=0} dt \quad \textcircled{=} \end{aligned}$$

Тим ми, за і з гоб. Pr.1, ітерно. носичну за T як груп-на узгодне кр. $\sigma(t, \cdot)$ з гом. керен $Y(t, \cdot)$. Використаємо рівність $\nabla_x Y = \nabla_Y X$ з гоб. Pr.1:

$$\begin{aligned} \textcircled{=} \int_a^b & \left(g_{\sigma(t,T)}(\nabla_Y \nabla_Y X(t,T), X(t,T)) + g_{\sigma(t,T)}(\nabla_Y X(t,T), \nabla_Y X(t,T)) - (g_{\sigma(t,T)}(\nabla_Y X(t,T), X(t,T)))^2 \right) \Big|_{T=0} dt = \int_a^b \left(g_{\sigma(t,T)}(\nabla_Y \nabla_X Y(t,T), X(t,T)) \right) \Big|_{T=0} dt + \int_a^b \left(|\nabla_Y Y(t,0)|_{\sigma(t,0)}^2 - (g_{\sigma(t,0)}(\nabla_X Y(t,0), X(t,0)))^2 \right) dt \\ & = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} \frac{(\nabla_{x_i} Y(t))^\perp |_{x(t)}^2}{|x'(t)|^2}$

В імені I_2 рівном. бароз гом. $|\nabla_{x_i} Y(t)|_{x(t)}^2 - (g_{x(t)}(\nabla_{x_i} Y(t), x'(t)))^2 =$
 $= |(\nabla_{x_i} Y(t))^\perp|_{x(t)}^2 = [\text{lem. 1}] = |\nabla_{x_i} Y^\perp(t)|_{x(t)}^2$, модно I_2 бигн. рівном. гогануя номіонал q -лу.

lem. 2. $R_{\sigma(t,T)}(Y(t,T), X(t,T))Y(t,T) = (\nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Y Y)(t,T) \quad \forall t, T$

► Як і у дов. Вн. 1., вих. лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на деякому оклі U конуса

$\sigma(t_0, T_0)$, у яких σ має лок. зач. $(t, T) \mapsto (\sigma^1(t, T), \dots, \sigma^n(t, T))$, маємо $X \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$Y = \frac{\partial \sigma^i}{\partial T} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \nabla_X Y(t, T) = \nabla_Y X(t, T) = \left(\frac{\partial^2 \sigma^k}{\partial t \partial T} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} \frac{\partial \sigma^j}{\partial T} \right)(t, T) \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \forall (t, T) \in \sigma^{-1}(U)$$

Покі за σ -ною ков. диференціювання уздовжс. кривої, $\forall (t, T) \in \sigma^{-1}(U)$

$$\nabla_Y \nabla_X Y = \left(((\nabla_X Y)^m)' + \Gamma_{lk}^m \cdot \sigma \cdot Y^l (\nabla_X Y)^k \right) \frac{\partial}{\partial x^m} = \left[\frac{\partial^3 \sigma^m}{\partial t \partial T^2} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^l} \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} \frac{\partial^2 \sigma^j}{\partial T^2} + \Gamma_{lk}^m \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \sigma^l}{\partial T} \frac{\partial^2 \sigma^k}{\partial t \partial T} + \right. \\ \left. + \Gamma_{lk}^m \cdot \sigma \cdot \Gamma_{ij}^k \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \sigma^l}{\partial T} \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} \frac{\partial \sigma^j}{\partial T} \right] \frac{\partial}{\partial x^m} \quad \text{і так само}$$

$$\nabla_X \nabla_Y Y = \left(\frac{\partial^3 \sigma^m}{\partial t \partial T^2} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^l} \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \sigma^l}{\partial t} \frac{\partial \sigma^i}{\partial T} \frac{\partial \sigma^j}{\partial T} + \Gamma_{ij}^m \cdot \sigma \cdot \frac{\partial^2 \sigma^i}{\partial t \partial T} \frac{\partial \sigma^j}{\partial T} + \Gamma_{ij}^m \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \sigma^i}{\partial T} \frac{\partial^2 \sigma^j}{\partial t \partial T} + \right. \\ \left. + \Gamma_{lk}^m \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \sigma^l}{\partial t} \frac{\partial^2 \sigma^k}{\partial T^2} + \Gamma_{lk}^m \cdot \sigma \cdot \Gamma_{ij}^k \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \sigma^l}{\partial t} \frac{\partial \sigma^i}{\partial T} \frac{\partial \sigma^j}{\partial T} \right) \frac{\partial}{\partial x^m}$$

Візначаючи, скорочуючи і міняючи у першому виразі i і j місцями, отр.

$$(\nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Y Y)(t, T) = \left(\left(\frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^m}{\partial x^i} + \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ki}^m \right) \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} \frac{\partial \sigma^j}{\partial T} \frac{\partial \sigma^l}{\partial T} \right)(t, T)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^m} = [\text{лок. ф-ла}] = (R_{lij}^m \cdot \sigma \cdot X^i \cdot Y^j \cdot Y^l)(t, T) \frac{\partial}{\partial x^m} = R_{\sigma(t,T)}(Y(t,T), X(t,T))Y(t,T) \quad \forall t, T$$

► Вн. 4. lem. 2. можна було б показати і на дов. R розв'яз $[X, Y] = 0$, але чому воно не працювало для таких полів?

$$I_1 = \int_a^b \left(g_{\sigma(t,T)} (R_{\sigma(t,T)} (Y(t,T), X(t,T)) Y(t,T) + \nabla_x \nabla_Y Y(t,T), X(t,T)) \right) \Big|_{T=0} dt \in$$

$$\text{Оценим } X(g(\nabla_Y Y, X)) = g(\nabla_x \nabla_Y Y, X) + g(\nabla_Y Y, \nabla_x X),$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(*)}{=} \int_a^b g_{\sigma(t,0)} \underbrace{(R_{\sigma(t,0)} (Y(t,0), X(t,0)))}_{\substack{\text{"}Y(t)\text{"} \\ \text{"}X'(t)\text{"}}} \underbrace{(Y(t,0), X(t,0))}_{\substack{\text{"}Y(t)\text{"} \\ \text{"}X'(t)\text{"}}} dt + \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(g_{\sigma(t,T)} (\nabla_Y Y(t,T), \right. \\ & \left. X(t,T)) \right) \Big|_{T=0} dt - \int_a^b g_{\sigma(t,0)} (\nabla_Y Y(t,0), \nabla_x X(t,0)) dt = \left[\text{аннулируется} \right] = - \int_a^b g_{\sigma(t)} \left(R_{\sigma(t)} (Y(t), X'(t)) X'(t), \right. \\ & \left. Y(t) \right) dt + g_{\sigma(t,0)} (\nabla_Y Y(t,0), X(t,0)) \Big|_a^b - \int_a^b g_{\sigma(t)} (\nabla_Y Y(t,0), \nabla_{X'} X'(t)) dt \end{aligned}$$

Плоскостными векторами вырабатыв, до X - (нам. напр.) радиус-вектора.

$\forall t \in T \mapsto \nabla_Y Y(t,T)$ - все поле $\nabla_{\mu} \mu'$ для $\mu = \sigma(t, \cdot)$. Заметим, при $t=a$ и $t=b$

не пост. кривая, до вар. з. замк. кривая, иначе $\nabla_Y Y(a,T) = \nabla_Y Y(b,T) = 0$

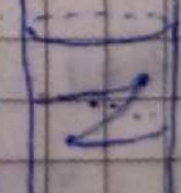
$\forall T$, группировка $= 0$, и отсюда ясно, что Y нормальна, то

$$|\nabla_{X'} Y|^2 = |\nabla_{X'} Y|^2 = g(\nabla_{X'} Y, \nabla_{X'} Y) = g(Y, \nabla_{X'} Y)' - g(Y, \nabla_{X'} \nabla_{X'} Y), \text{ так как}$$

$$\int_a^b |\nabla_{X'} Y|^2 dt = g_{\sigma(t)} (Y(t), \nabla_{X'} Y(t)) \Big|_a^b - \int_a^b g_{\sigma(t)} (Y(t), \nabla_{X'} \nabla_{X'} Y(t)) dt,$$

и отсюда ясно, что Y - нуль, до вар. з. замк. кривая $\Rightarrow Y(a) = Y(b) = 0$. Δ

Ex Два плоских (может быть евклидовых) (M, g) в вариации

где $\int_a^b \left| \nabla_{\partial_t} Y^\perp(t) \right|_{g(t)}^2 dt \geq 0$, до $R=0$. А не было-а на раз. 

Европейское - графическое изображение. Учен
привели мне два "наиболее" среди "интересных".

Многовиди кривих, що обмежена знаку

Путь, якщо не зазначене інше, (M, g) - ℓ -м. рим. мн., $\ell \geq 3$, $\dim M =$
 $= n \geq 2$, ∇, R, Ric, K_R - як вище.

Th (Майєрс) Несай (M, g) - повний зв'язний n -вим. риманівий

многовид, кривини Річчі якого обмежені знизу числом $(n-1)k$, де $k > 0$ ($k \in \mathbb{R}$). Тоді M компактний, і його діаметр (як метричного простору з внутрішньою n -кою) не перевищує $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Вет. Умова обмеженості означає, що $\forall p \in M \forall 0 \neq v \in T_p M \text{ Ric}(v) \geq k(n-1)$.

Ес. Умови Тн. виконані для простору постійної кривини $k > 0$, наприклад, для сфери $M^n(k) = S^n_{\frac{1}{\sqrt{k}}}$. Оскільки, її кривини Річчі рівні $(n-1)k$ (див. поперед. тему). Тим самим її діаметр - в точності $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ (відстань між двох протилежними точками сфери).  $\frac{\pi}{\sqrt{k}} = \pi R$

Вет. Цю теорему можна послабити, посиливши її умову: перейдемо від кривин Річчі до секційних.

Лев. Будемо показати, що рім. мн. (M, g) має (секційну) кривину, обмежену зверху (відп., зверху) числом $k \in \mathbb{R}$ і позначати це $K \geq k$ ($K \leq k$).

Якщо $\forall p \in M \forall \pi, \sigma \in T_p M \text{ } K_p(\sigma) \geq k$ ($K_p(\sigma) \leq k$), і так само для оточес.

Лем. Якщо $K \geq k$ ($K \leq k$), то всі його кривини Річчі обмежені

трику (зверху) числом $(n-1)k$, а скалярна крив. $S \geq n(n-1)k$ ($\leq n(n-1)k$).

► Повторюючи викладку для ПСК k з невідомою замість рівності,

$\forall p \in M, 0 \neq v \in T_p M$ маємо:

$$Ric_p(v, v) = \sum_{i=1}^n g_p(R_p(e_i, v) v, e_i) \geq \left[\begin{array}{l} K \geq k, \text{ дов.} \\ \text{серед. крив.} \uparrow \\ (\text{якщо } v \perp e_i \text{ нехайовані,} \\ \text{інакше з двох точок крив.}) \end{array} \right] \geq \sum_{i=1}^n k (g_p(e_i, e_i) g_p(v, v) - g_p(e_i, v)^2) = (n-1)k g_p(v, v),$$

тобто $Ric_p(v) \geq (n-1)k$, і ця $\leq$ ак-но. Поді $\square$ скалярна крив. $S = \sum_{i=1}^n Ric_p(e_i, e_i) \geq (n-1)k \sum_{i=1}^n g_p(e_i, e_i) = n(n-1)k$, ак-но ця $\leq$.

Соч. (теорема Бонне). Якщо (M, g) - повний зв'язний з $K \geq k > 0$, то він компактний, і його діаметр $\leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

► (доведення Th. Майєрса) Отже, дано, що $\forall p \in M, 0 \neq v \in T_p M$

$Ric_p(v, v) \geq (n-1)k g_p(v, v)$. Доведемо спочатку обмеженість діаметра:

$\nearrow \text{diam}(M, d_g) > \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, де d_g - внутр. м-ка $\ell = \ell_g$ тобто $\exists p, q \in M$, для яких $d_g(p, q) > \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. В силу повноти, і Th. Хопфа-Дірова-Коп-Фоссена, $\exists$ найкоротша, що з'єднує ці точки.

зв'язності

Її можна параметризувати натурально: $\gamma: [0, a] \rightarrow M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(a) = q$, і $a = l(\gamma) = d_c(p, q) > \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. В силу геодезичності найкоротших, γ - геодезична.

Нехай $E_1, \dots, E_{n-1}$ - паралельні поля уздовж γ такі, що $\{E_1, \dots, E_{n-1}, \gamma'\}$ - ортонорм. базис уздовж γ (тобто $\forall t \in \{E_1(t), \dots, E_{n-1}(t), \gamma'(t)\}$ - ортонорм. базис $T_{\gamma(t)} M$ вим. $g_{\gamma(t)}$; оскільки γ - нат. пар. геоф., $|\gamma'| = 1$ і γ' - паралельне; тут і далі в подібних ситуаціях позначимо $\gamma'(0) := \gamma'(+0)$, $\gamma'(a) := \gamma'(a-0)$) Насправді, продовжимо $\gamma'(0)$ до ортонорм. базиса $T_p M$ і паралельно перенесемо ці вектори уздовж γ : це буде ортонорм. базис $\forall t$, бо пар. перенесення зберігає скалярні добутки.

$\forall i = \overline{1, n-1}$ $\forall t \in [0, a]$ покладемо $Y_i(t) := \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right) E_i(t)$. Тоді Y_i - н. поля уздовж γ , вони усі $\perp \gamma'$, $\forall i$ $Y_i(0) = Y_i(a) = 0$ і $\forall t$ $\nabla_{\gamma'} Y_i(t) = \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi t}{a} E_i(t) + \sin \frac{\pi t}{a} \nabla_{\gamma'} E_i(t) = \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi t}{a} E_i(t)$.

до E_i паралельні. Зокрема, в ф.лі II варіації $|\nabla_{\gamma} Y_i^1(t)|_{\gamma(t)}^2 = |\nabla_{\gamma} Y_i(t)|_{\gamma(t)}^2 = \frac{\pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{\pi t}{a} \quad \forall i, t$, до E_i одначині.

$\forall i = \overline{1, n-1}$ побудуємо варіацію $\bar{b}_i$ вздовж γ "у напрямку Y_i "

як у Рм.2 теми про варіації: $\bar{b}_i(t, T) := \exp_{\gamma(t)}(T Y_i(t))$,

вона визначена на $[0, a] \times \mathbb{R}$ в силу повноти (M, g) . Зокрема, $\bar{b}_i$

$\bar{b}_i(t, 0) = \gamma(t) \quad \forall t$, $\bar{b}_i(0, T) = \gamma(0)$, $\bar{b}_i(a, T) = \gamma(a) \quad \forall T$ (можемо

$\bar{b}_i$ - з закр. кінцями) і $d_{(t,0)} \bar{b}_i\left(\frac{\partial}{\partial T}\right) = Y_i(t) \quad \forall t$. Крім того

варіація годиннику γ , що визн. $\bar{b}_i$, в силу р-ли $\forall i = \overline{1, n-1}$ перебігає:

$$\delta_i^2 \mathcal{L} = \int_0^a \left(\frac{\pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{\pi t}{a} - \sin^2 \frac{\pi t}{a} g(R(E_i, \gamma') \gamma', E_i)(t) \right) dt$$

(Впр. Якщо виле годинником для годинника T_n Ронне)

За лев тензора Річчі (зауважимо, що $g(R(\gamma', \gamma') \gamma', \gamma') = 0$ для

стандартної л-та ортонури. Базиса $\{E_1, \dots, E_{n-1}, \gamma'\}$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^2 \mathcal{L} = \int_0^a \left((n-1) \frac{\pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{\pi t}{a} - \sin^2 \frac{\pi t}{a} \text{Ric}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \right) dt \quad \textcircled{<}$$

За умовою, $\forall t \in [0, a] \quad \text{Ric}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq (n-1)k g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) =$

$$= [\gamma \text{ нап. нап.}] = (n-1)k > (n-1) \frac{\pi^2}{a^2}, \text{ тож}$$

$$\textcircled{2} (n-1) \frac{\pi^2}{a^2} \int_0^a \left(\underbrace{\cos^2 \frac{\pi t}{a} - \sin^2 \frac{\pi t}{a}}_{\cos \frac{2\pi t}{a}} \right) dt = 0.$$

Промо $\exists i = \overline{1, n-1}$ таке, що $\delta_i^2 \leq 0$. Т.ч., для $\delta_i: J=0$ - не м.
 мінімуму для $J \mapsto \ell(\gamma_J)$, пром $\exists J_0$ таке, що $\ell(\gamma_{J_0}) < \ell(\gamma_0) = \ell(\gamma)$,
 і, оскільки δ_i - з задр. кінцями, $\gamma_{J_0}^{(0)} = \gamma(0) = p$, $\gamma_{J_0}^{(a)} = \gamma(a) = q$, пром
 γ - не найкоротша. $\downarrow$

Отже, $\text{diam}(M, d_\ell) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}} < \infty$. За Th. X.-P.-K.-F. M повний

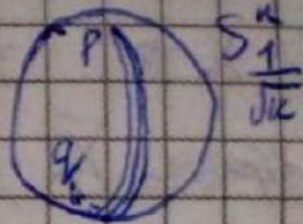
$\Leftrightarrow M$ однес. компактний $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} M \text{ однесений} \\ M \text{ замкнений в } \text{codi} \end{array} \right] \Rightarrow M \text{ компактний.}$

Рем. Люба $\delta_i^2 \leq 0$ в кінці доведення означає не просто, що γ - не най-
 коротша серед "близьких" шляхів цієї варіації, а що вона - локально

найдовша: оскільки $\left. \frac{d}{dt} \ell(\gamma_J) \right|_{J=0} = 0$ і $\left. \frac{d^2}{dt^2} \ell(\gamma_J) \right|_{J=0} < 0$, $\exists \delta > 0$ таке,
 що $\forall J \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ $\ell(\gamma_J) < \ell(\gamma_0) = \ell(\gamma)$ (і γ_J має ті ж кінці).

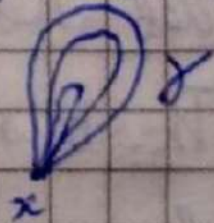
Тож, для $M^n(k) = S_1^n$ це визначен великого поля довжини

$\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ — його "білий кастан". П.ч., її можна "по-
 рухати" за допомогою веріації, зменшуючи дов-
 жину. Узагальненням цього спостереження є Тм. Якобі, дов.нале
 (точніше, в "рх", якщо він певлений, зменшить довжину).



Кокрипта: необхідні відомості з топології

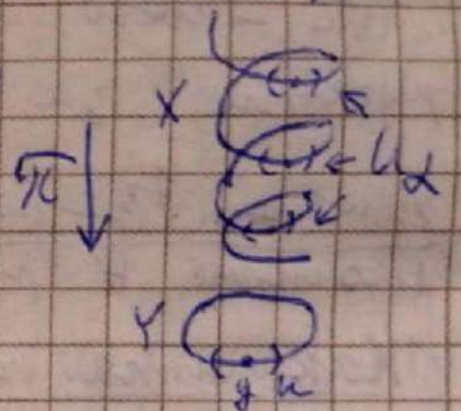
def. Лінійно зв'язний топ. простір X зветься однозв'язним, якщо у кожному петлі (замкнений шлях) гомотопна нулю (стається), тобто $\forall \gamma \in C([a, b], X)$ такою, що $\gamma(a) = \gamma(b) = x$, $\exists$ гомотопія $F \in C([a, b] \times [0, 1], X)$ така, що $F(t, 0) = \gamma(t)$, $F(t, 1) = F(a, s) = F(b, s) = x \quad \forall t, s$.



Ex. $M^n(k)$ однозв'язні (нагадуємо, що $n \geq 2$). $\mathbb{R}P^n$, $S^1 \times \mathbb{R}^n$, T^n - не однозв'язні.

def. Неперервне стрісхтивне відображення топ. просторів

$\pi: X \rightarrow Y$ зветься накриваючою з базою Y і накриваючим простором X , якщо $\forall y \in Y \exists$ відкр. $U \ni y$ така, що $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A_U} U_\alpha$ (гуз'юкитне об'єднання, тобто $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$), де усі U_α відкр. в X і $\forall \alpha \quad \pi|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow U$ - гомеоморфізм.



Ек. 1. Тривіальне: $\pi: X \rightarrow Y$ - гомеоморфізм (тоді $U = Y$).

2. $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (e^{ix^1}, \dots, e^{ix^n})$.

Тл. Якщо $\pi: X \rightarrow Y$ - накриваюча, X лік. зв'язний, а Y одноп'язний, то π - гомеоморфізм.

деф. Накриваюча $\pi: X \rightarrow Y$ зветься універсальною, якщо X одноп'язний.

Тл. В n -вимірному l -м. ($l \geq 1$) зв'язного многовида M $\exists$ універсальне l -м. накриваюче $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ іого n -вимірним l -м. (одноп'язним) многовидом $\tilde{M}$, причому $\forall p \in \tilde{M}$ $d_p \pi$ не вироджений.

Ек. $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ вище - ω -м. і $d_p \pi$ невар. $\forall p$ (π - лок.

диффеоморфізм в околі $\forall p$).

Лем. Нехай в умовах поперед. Лем. (M, g) - рімановий. π задов. деф. закріплення, тону. π^*g - рим. м-ка на $\tilde{M}$ (як I функц. форма). За побудовою, маємо π - лок. ізометрія в околі $\forall p \in \tilde{M}$. У такому випадку будемо говорити, що $\pi: (\tilde{M}, \pi^*g) \rightarrow (M, g)$ - ріманове універсальне накриття.

Ек. $\pi: E^n \rightarrow T^n$ з лок. евкл. м-кою на T^n (як вище, м-ка - сума)

Рл. Якщо $\pi: X \rightarrow Y$ накриття, де X - компактний, то $\forall y \in Y$ $\pi^{-1}(y)$ скінченна (π - скінченнолістне).

$\Rightarrow$ За деф. накр. усі $\pi^{-1}(y)$ - дискретні (бо $\forall x \in \pi^{-1}(y)$ має околі U_x , що не містить інших точок $\pi^{-1}(y)$). Оскільки X - компактний, $\pi^{-1}(y)$ скінченна (бо інакше у $\pi^{-1}(y)$ існувала б точка накопичення x_0 , в околі U_{x_0} якої була б нескінченна кількість точок $\pi^{-1}(y)$, а отже $\pi|_{U_{x_0}}$ не могло б бути діфеоморфізмом). $\triangle$

Зпр. Якщо при цьому Y зв'язний, то усі $\pi^{-1}(y)$ мають одну й

ты давай любить меня,

Соч. В условиях Тн. Майерса риманово универсальное накрытие (M, g) симметричное: $\forall q \in M \quad \pi^{-1}(q)$ симметрична.

► Як встановлюється у Вирн. виміре (у попер.

темі), ізометрії, навіть локальні, зберігають кривизну. Також для накриваючого многовида $(\tilde{M}, \pi^*g)$ маємо $\text{Ric} \geq (n-1)k > 0$. Крім того, він зв'язний (бо однозв'язний).

Вопр. Перевести, что $(\tilde{M}, \pi^*g)$ полонит (что відбувається з координатами?)

Отже, $(\tilde{M}, \pi^*g)$ задов. умовам $\tilde{M}$ -Майєрса, тому ϵ , зокрема, компактним. За попер. ρ_n, π скінченнолистне, Δ

Реш. Дати передформування для найменшої з показаних функціональних груп:

Сог. В учебеас Γ_n Майерса фундаментальная группа $\pi_1(M)$ свободна.
 $\Rightarrow$ Для люб. накрытия $\exists$ базис $\pi^{-1}(y) \leftarrow \bigcup_{y \in Y} \pi^{-1}(y)$ ф. группы $\triangle$

Ех. Лм. м-ка на $\mathbb{R}P^n$, $\frac{n \geq 2}{\text{будується так, що унів. накривтя } \pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n}$ (це канон. проекція $x \mapsto [x]$) стає римановим (і отожначно визначається цією метрикою - Впр.). Зокрема, $\mathbb{R}P^n$ має ПСК 1 і задов. умови Тн. Лайєрса (Впр. перевірити повноту).
 Згідно, π двохлистне (маємо $|\pi^{-1}(q)| = 2 \forall q$), а $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$.
Впр. Чому дорівнює діаметр $\mathbb{R}P^n$?

Інші твердження про кривину, що об'єднані знизу (ріманові)

Тн. (Син) Будь-який паровимірний орієнтований компактий зв'язний римановий мн. з $K > 0$ однозв'язний.

➤ Тут і далі див. Стеден, Ерін. Comparison Theorems...

Лем. Відомо, що у $\forall$ нерісандрового зв'язного мн. M $\exists$ глобальне орієнтовне зв'язне накривтя. Позі в умови Тн. Сина (M парновим. компак., $K > 0$) це накривтя однозв'язне (універсальне), тобто $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2$.

Ек. $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ як функція (при перетворенні n і $n-1$ збігаються, менше n але є контрприкладом у загальному випадку). Тема $\mathbb{R}P^n$ і зв'язності

Тн. (про дугу, Чігер-Трапанин). Якщо M - повний зв'язний рімановий многовид з $K \geq 0$, то у ньому $\exists$ вкладений компактний циліндр геодезичний підмноговид S (дуга) такий, що M дифеоморфний NS (нормальній розширенню S , див. "Геом. підмн.")

Тн. ("гіпотеза про дугу", Перельман). Якщо M - повний зв'язний некомпактний n -вим. рімановий мн. з $K \geq 0$, і $\exists p \in M$ така, що $\forall$ мн. $\sigma \subset T_p M$ $K_p(\sigma) > 0$, то цю дугу S одностороння одне M дифеоморфний $\mathbb{R}^n$.

Ек. Еліптичний параболоїд.

Тема Якобі та страшенні точки

(М.з) - ℓ -м. n -вим. рімановий многовид, $\ell \geq 4$, $n \geq 2$, ∇ -пов'яз. зв., R -тензор кр. Також вважається, що ці геодезичні в ньому

Упараметризовані з постійною довжиною дот. вектора (туту $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$),
лев. Варіація $\delta \in C^1([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon), M)$ зветься геодезичною, якщо $\forall \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\gamma_\tau = \delta(\cdot, \tau)$ - геодезична.

Пр. 1. Якщо поле Y уздовж γ задає геодез. варіацію δ (тобто $Y(t) = d_{(t, 0)} \delta(\frac{\partial}{\partial \tau}) \forall t$), то

$$\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} Y + R(Y, \gamma') \gamma' = 0 \quad (*)$$

Реш. Путь $R(Y, \gamma') \gamma' : t \mapsto R_{\gamma(t)}(Y(t), \gamma'(t)) \gamma'(t)$ - теж поле уздовж γ .

Тор. з формулюю II вар. довжини з $Y \perp \gamma'$ і замк. кінцями: у цьому випадку вона дор. 0.

► Дуб. геодезична ф-я II вар. [...] : якщо

покласти $X(t, \tau) = d_{(t, \tau)} \delta(\frac{\partial}{\partial t})$ і $\hat{Y}(t, \tau) = d_{(t, \tau)} \delta(\frac{\partial}{\partial \tau})$, ^{$\frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{(t, \tau)}$} то це

будуть лінійними функціями по кривих $t \mapsto \delta(t, \tau) = \gamma_\tau(t)$ і $\tau \mapsto \delta(t, \tau)$ ^{$\hat{Y}(\cdot, 0) = Y$} $\delta(t, \tau)$ бігнобігно, і [...]

$$\nabla_X \hat{Y} = \nabla_{\hat{Y}} X \quad (\text{де диференціювання}$$

у сенсі гур. уздовж кривої), і (ан-но до лем. 2. у темі про зв'язність)

$$R(\hat{Y}, X)X = \nabla_{\hat{Y}} \nabla_X X - \nabla_X \nabla_{\hat{Y}} X = \begin{bmatrix} \nabla_X X = \nabla_{\gamma_j'} \gamma_j' = 0, \\ \nabla_{\gamma_j'} \gamma_j' - \text{всод.} \end{bmatrix} = -\nabla_X \nabla_X \hat{Y}.$$

При $T=0$ $X = \gamma'$ і $\hat{Y} = Y$, звідки отримуюємо потрібне. $\triangle$

Лем. Це не вірно і для $\forall T=T_0$ і $Y = \hat{Y}(\cdot, T_0)$ уздовж крив. γ_{T_0} .

Випр. Показати, що вірно і обернене (див. С.-Е.).

Лем. (ℓ-1)-м. в. поле Y уздовж кожної γ , що задов. (*), зветься полем Якобі (уздовж γ).

Лем. Нехай $\{E_i\}_{i=1}^n$ — ортонорм. у $\forall$ точці базис ^{парал.} ^{можес полів} уздовж γ (як і у доведенні Тл. Майерса, беремо ортонорм. базис у одній точці і паралельно переносимо, подібно продовжуємо його в-ти паралельними полями). Будемо шукати поле Якобі уздовж γ у вигляді $Y = Y^i E_i$ (тут $Y^i \in C^{l-1}(I)$, якщо $\gamma: I \rightarrow M$, $E_i: I \rightarrow TM$, $i = \overline{1, n}$) в силу паралельності E_i , маємо $(\forall i = \overline{1, n})$

$$\nabla_{x'} Y = (Y^i)' E_i + Y^i \nabla_{x'} E_i = (Y^i)' E_i,$$

$$\nabla_{x'} \nabla_{x'} Y = (Y^i)'' E_i + (Y^i)' \nabla_{x'} E_i = (Y^i)'' E_i.$$

Тому (*) набуває вигляду:

$$(Y^i)'' E_i + Y^i R(E_i, x') x' = 0. \quad (**)$$

Позначимо $R(E_i, x') x' = R_{ij}^i E_i \quad \forall j$, де $R_{ij}^i \in C^{l-3}(I)$. Маємо:

$$(Y^i)'' + Y^j R_{ij}^i = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Це система лінійних ЗДР II порядку з матрицею (до $l \geq 4$) коефіцієнтів. Розен з початковими умовами $Y^i(t_0) = Y_0^i$ і $(Y^i)'(t_0) = Y_1^i$, $i = \overline{1, n}$ для якоїсь $t_0 \in I$ (тобто значеннями Y^i і $\nabla_{x'} Y$ у t_0) вона утворює задачу Коші, у якій $\exists!$ розв'язок на усюму I :

Лем. 1. Нехай $t_0 \in I$. Тоді $\forall$ пара $v, w \in T_{x(t_0)} M$ $\exists!$ саме одна Y уздовж γ таке, що $Y(t_0) = v$ і $\nabla_{x'} Y(t_0) = w$. Тоді одна Y

уздовж γ утворюють $2n$ -вимірний вект. простір над $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Осн. рівняння (**) лінійні, $\forall$ н.а. X і Y уздовж

Лема 1.2. Інтегрування вект. простору.
 $\gamma \in \mathcal{A}, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda\gamma + \mu\gamma'$ - має н.д. уздовж γ . В силу лін. залежності
 розв'язків лін. системи від початкових умов і I ! розв'язку з. Коші,
 відобр. $(v = \gamma(t_0), w = \nabla_{\gamma} \gamma(t_0)) \mapsto \gamma : T_{\gamma(t_0)} M \oplus T_{\gamma(t_0)} M \rightarrow$
 $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{простір н.д.} \\ \text{уздовж } \gamma \end{array} \right\}$ - лінійне і біліне $\Rightarrow$ лін. ізоморфізм, тому
 білінійності цих просторів збігаються. $\triangle$

Лем. Дати за заповнюванням внаслідок теор. $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ і для
 $v, w \in T_{\gamma(t_0)} M$ позначимо $\gamma_{v,w}$ - н.д. уздовж γ таке, що
 $\gamma_{v,w}(0) = v, \nabla_{\gamma} \gamma_{v,w}(0) = w$.

Р.2. Тоді викладу $\gamma(t) = (b+ct)\gamma'(t), b, c \in \mathbb{R}$ - це в точності
 поля I ної уздовж γ , що готують до γ .

Випт "готують до γ " означає, що $\gamma = f \gamma'$ для деякої $f \in C^1(I)$.
 Оскільки γ' - парал. уздовж γ , (*) набуває вигляду:

$$f'' \gamma' + \underbrace{f R(\gamma', \gamma')}_{=0} \gamma' = 0 \Leftrightarrow f'' = 0 \Leftrightarrow f(t) = b + ct. \triangle$$

Ри. 3. Y поле Якобі Y уздовж X його дотична і нормальна
компоненти $Y^T \in Y^\perp$ (можна ортос. проєкції на X' і на орт.
дотичення до нього Y таку X' signdefino) - теж поле Якобі
уздовж X . Зокрема, $Y^T(t) = (b+ct) X'(t)$, $b, c \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow Y^T = \frac{g(Y, X')}{g(X', X')} X'$, де значення g незмінні постійні, а
друга позитивна. Числована дорівнює, в силу уздовж. зв'язності з g ,
 $g(Y, X')'' = (g(\nabla_{X'} Y, X') + g(Y, \nabla_{X'} X'))' = [X\text{-геог.}] = g(\nabla_{X'} \nabla_{X'} Y, X') +$
 $+ g(\nabla_{X'} Y, \nabla_{X'} X') = [\frac{X\text{-геог.}}{(X)}] = -g(R(Y, X') X', X') = [\frac{\text{cur.}}{R}] = 0.$

Тр.ч., $Y^T(t) = (b+ct) X'(t)$ - н.д. за Ри. 2., а моги $Y^\perp = Y - Y^T$ -
н.д. за лінійністю (Соч. 1.) $\triangle$

Соч. 2. Якщо $\exists t_0 \neq t_1$ такі, що для н.д. Y уздовж X $Y(t_0) = Y(t_1) = 0$,
то Y ортогональне до X : $Y \perp X'$.

$\Rightarrow$ Дка. лінійна ф-ція, що $= 0$ у двох різних точках, кривова,
 $Y^T = 0$ за поперед. Ри. 3., тому $Y = Y^\perp$. $\triangle$