

Д/З. Розглянемо задачу лінійної регресії на $X \times Y$, де $X = \mathbb{D}_K(0)$, $Y = [-Q, Q]$, клас вимірів $\mathcal{K} = \mathbb{D}_B(0)$ (де $w \in \mathbb{D}_B(0) \subset \mathbb{R}^d$ вимір. $x \mapsto \langle w, x \rangle$),
а-зія втрач $\ell(w, (x, y)) = (\langle w, x \rangle - y)^2$. Показати,
що ця задача опукла, лінійцева і гладка, знайти
параметри лінійцевості та гладкості.

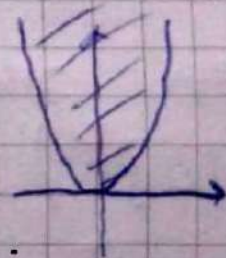
2/3 φ -изображение - это композиция линейного $\psi, (x, y) \mapsto$

$\mapsto \langle \psi, x \rangle - y$ на скалярном $f(t) = t^4$. Промы:

- f опукла, оск. $f''(t) = 12t^2 \geq 0 \quad \forall t$

або оск. многочлен над графіком опукла $\Rightarrow$

задача опукла.



- Для $t_1, t_2 \in [-\rho, \rho]$

$$|f(t_1) - f(t_2)| = |t_1^4 - t_2^4| = |t_1^2 + t_2^2| |t_1^2 - t_2^2| = |t_1^2 + t_2^2| \cdot |t_1 - t_2| \cdot |t_1 + t_2|$$

$$|t_1 + t_2| |t_1 - t_2| \leq |t_1^2 + t_2^2| (|t_1| + |t_2|) |t_1 - t_2| \leq 2\rho^2 \cdot 2\rho$$

$$|t_1 - t_2| = 4\rho^3 |t_1 - t_2|$$

$$\text{Або: } |f'(t)| = |4t^3| \leq 4\rho^3 \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leq 4\rho^3 |t_1 - t_2|$$

т.ч. f на $[-\rho, \rho]$ $4\rho^3$ -лінійна. Для $x \in \mathbb{D}_R(0)$,

$$y \in [-Q, Q], \quad w \in \mathbb{D}_B(0) \quad |\langle w, x \rangle - y| \leq |w| |x| + |y| \leq BR + Q,$$

отже f на такій обл. важл. $4(BR + Q)^3$ -лінійна.

Нарешті, композиція $\ell(w, (x, y)) = f(\langle x, \tilde{w} \rangle - y)$ має

$4|x|(BR + Q)^3$ -лінійн. $\forall x, y$, тобто завжди задача

$4R(BR + Q)^3$ -лінійн.

- $f'(t) = 4t^3 \in 4 \cdot 3\rho^2$ -лінійн., як показати на

поверх. заданной (где max по t берем. $\text{з } |f''(t)| = |12t^2| \leq$
 $\leq 12\delta^2$). Тогда f $12\delta^2$ — малая, а отсюда конч.

$\text{з } (w, (x, y)) \mapsto \langle w, x \rangle - \frac{y^2}{2}$ где $|w| \leq B, |x| \leq R, |y| \leq Q$
малая $\text{з } \text{параметры} \leq |x| \cdot 12(|w||x| + |y|)^2 \leq 12R^2(BR + Q)^2$.

Т.ч., задача $12R^2(BR + Q)^2$ — малая.