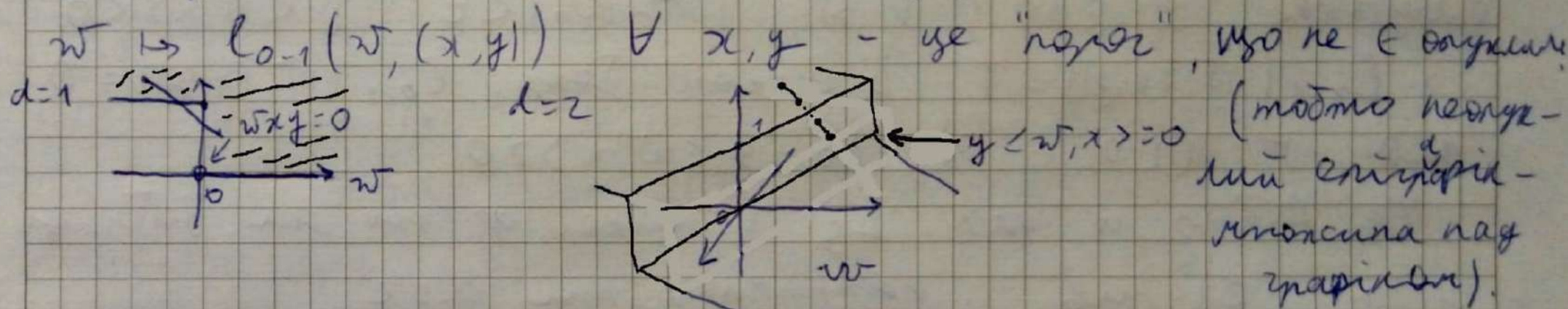


1. Показати, що 0-1-ф-ція втрам  $\ell_{0-1}(w, (x, y)) =$   
 $= \mathbb{1}_{y \langle w, x \rangle < 0}$  неопукла та має локальні мінімуми,  
 що не є глобальними. Тут  $X = \mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ ,  $Y = \{\pm 1\}$ .

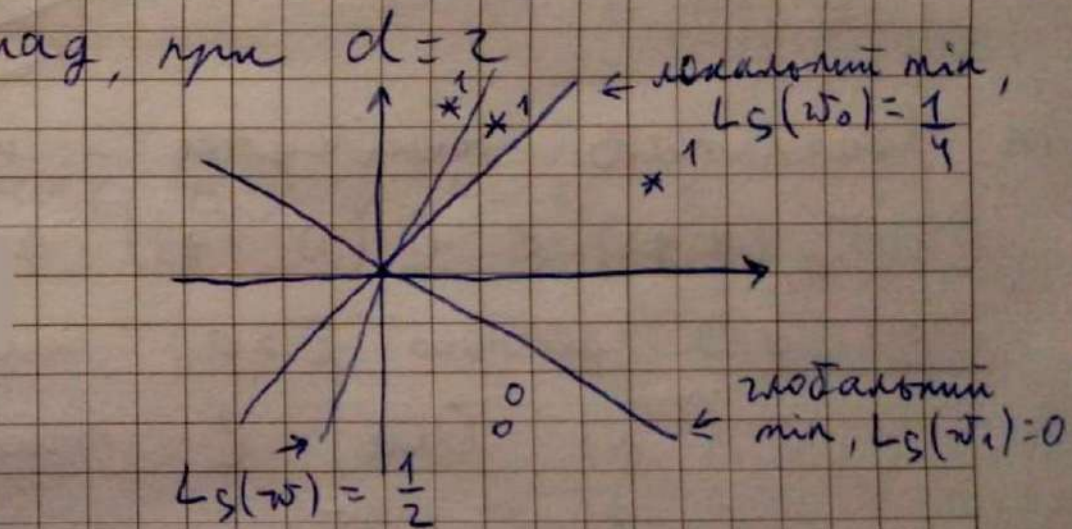
Неопуклість випливає, наприклад, з того, що графік



т. локального мінімуму - це такий  $w_0$ , що  $y$  коду  
 $\ell(w_0, (x, y)) \leq \ell(w, (x, y))$  для дост. близьких  $w$  ( $|w - w_0| <$   
 $< \varepsilon$  для деякого  $\varepsilon > 0$ ), але при цьому  $\exists w: \ell(w_0, (x, y)) >$   
 $> \ell(w, (x, y))$ . Оскільки  $\ell$  приймає лише знач. 0 і 1,  
 тут повинно бути  $\ell(w_0, (x, y)) = 1$ , і так само  
 в окіл  $w_0$ , але  $\ell(w, (x, y)) = 0$  для якогось  $w$ .

Пусть достаточно взять  $\forall m$ .  $(x, y)$ , что  $w_0$  принадлежит  
 и классифицирует: скажем,  $x = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $y = 1$   
 и  $w_0 = (-1, 0, \dots, 0)$ . Оса.  $y \langle w_0, x \rangle < 0$ ,  $l_{0-1}(w_0, (x, y)) = 1$ ,  
 и в силу непрерывности  $w \mapsto y \langle w, x \rangle$  же так и для  
 близких:  $\exists \varepsilon > 0$ :  $\forall w$ :  $|w - w_0| < \varepsilon$   $y \langle w, x \rangle < 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow l_{0-1}(w, (x, y)) = 1$ . В ином случае,  $l_{0-1}(w, (x, y)) = 0$   
 для  $w = (1, 0, \dots, 0)$ , бо  $y \langle w, x \rangle > 0$ .

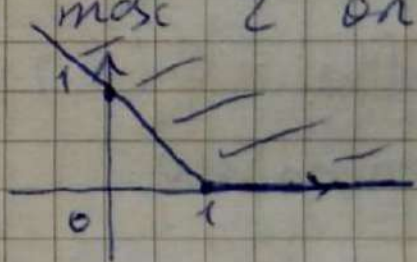
же верно и для  $L_S$  с теми же  $d$ -ми на единице  
 с  $m$  ел-ми: например, при  $d=2$



2. Показать, что задача  $\text{lin. клас. на } X \times Y$ , где

$X = \mathbb{D}_R(0) = \{x \mid |x| \leq R\} \subset \mathbb{R}^d$ ,  $Y = \{\pm 1\}$  і  $\varphi$ -зіє  
 вимірювання  $\ell_{\text{hinge}}(w, (x, y)) = \max\{0, 1 - y \langle w, x \rangle\}$ , де  
 $w \in \mathcal{H} = \mathbb{R}^d$ , функція на  $R$ -лінійному просторі.

Опуклість  $\forall x, y$  випливає з того, що  $y \langle w, x \rangle$  є лінійною  
 функцією лінійної  $w \mapsto y \langle w, x \rangle$  та опуклої скалярної  
 функції  $t \mapsto \max\{0, 1 - t\}$ , що оп. як  $\max$  з оп.,  
 або просто тому, що графік її графіка  
 лінійно опуклий.



Лінійність: дост. показати, що  $f: t \mapsto \max\{0, 1 - t\}$   
 1-лінійна. Дійсно, маємо за Р. з лемми, її конв.  
 з  $w \mapsto y \langle w, x \rangle = \langle w, yx \rangle$   $|yx| = |x|$ -лінійна.  
 Також для  $x \in \mathbb{D}_R(0)$ ,  $y \in \{\pm 1\}$ ,  $\forall w_1, w_2 \in \mathbb{R}^d$   
 $|\ell_{\text{hinge}}(w_1, (x, y)) - \ell_{\text{hinge}}(w_2, (x, y))| \leq |x| |w_1 - w_2| \leq R |w_1 - w_2|$ .  
 Отже, нехай  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ . Якщо  $t_1, t_2 \geq 1$ , то

где нуле  $f(t_1) = f(t_2) = 0$ , тогда  $0 = |f(t_1) - f(t_2)| \leq |t_1 - t_2|$ . Если  $t_1 < 1 \leq t_2$ , то  $f(t_1) = 1 - t_1$ ,  $f(t_2) = 0$ , отсюда  $f(t_1) - f(t_2) = 1 - t_1 \leq t_2 - t_1$ , что  $> 0$ , тогда  $|f(t_1) - f(t_2)| \leq |t_2 - t_1| = |t_1 - t_2|$ . Переставив местами  $t_1$  и  $t_2$  получим, что где  $t_2 < 1 \leq t_1$  так как  $|f(t_2) - f(t_1)| \leq |t_2 - t_1|$ . Наконец, где  $t_1, t_2 < 1$   $|f(t_1) - f(t_2)| = |1 - t_1 - (1 - t_2)| = |t_2 - t_1| = |t_1 - t_2|$ , что и требовалось.

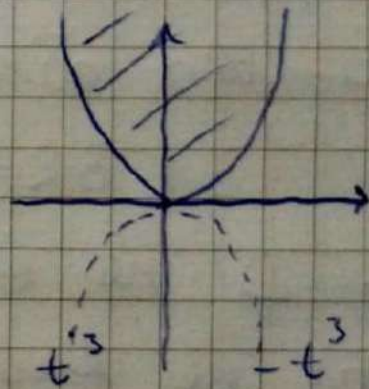
3. Достигнуть на отрезке, непрерывность, максимум, минимум задачи лн. регрессии на  $X \times Y$ , где  $X = \mathbb{D}_R(0) = \{x \mid |x| \leq R\} \subset \mathbb{R}^d$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $\exists$   $\varphi$ -гизо втрим  $\ell(w, (x, y)) = |\langle w, x \rangle - y|^3$ , где  $w \in \mathcal{K} = \mathbb{D}_B(0) \subset \mathbb{R}^d$ .

Таким  $\varphi$ -гиза втрим - где  $f(\langle w, x \rangle - y)$  - конв. минимум на  $f(t) = |t|^3$ , тогда и втрим.

выпуклостью и свойствами  $f$ :

-  $f(t) = \max \{t^3, -t^3\}$  опукла,

то монотонна на  $\mathbb{R}$  график  
опукла:



Получу  $\omega \mapsto \ell(\omega, (x, y))$  on  $\forall (x, y)$ .

-  $f$  липшицева на  $[-\delta, \delta]$ :  $\forall t_1, t_2: |t_1|, |t_2| \leq \delta$   
 $||t_1|^3 - |t_2|^3| = ||t_1| - |t_2|| (|t_1|^2 + |t_1||t_2| + |t_2|^2) \leq |t_1 - t_2| \cdot 3\delta^2$   
Поэтому  $3\delta^2$  - липш.

Lemma  $|w| \leq B$ , also  $|\langle w, x \rangle - y| \leq |\langle w, x \rangle| + |y| \leq |w||x| + |y| \leq B|x| + |y|$ .  
 Thus  $\ell(w, (x, y))$  is bounded

з параметром  $3|x|(B|x| + |y|)^2$ . Якщо  $|x| \leq R$  і  
додаємо обмежити  $|y| \leq Q$ , то задача буде  
м.ч.  $3R(BR + Q)^2$  - ліній.

—  $f$  не є гладкою, бо не є диференційовною:  
 $f'(0)$  не визначена. ~~Мінімізація~~

Д/З. Розглянемо задачу лінійної регресії на  
 $X \times Y$ , де  $X = \mathbb{D}_R(0)$ ,  $Y = [-Q, Q]$ , клас гіпотез  
 $\mathcal{H} = \mathbb{D}_B(0)$  (де  $w \in \mathbb{D}_B(0) \subset \mathbb{R}^d$  визн.  $x \mapsto \langle w, x \rangle$ ),  
кр-ція втрач  $\ell(w, (x, y)) = (\langle w, x \rangle - y)^2$ . Показати,  
що ця задача опукла, лінійцева і гладка, знайти  
параметри лінійцевості та гладкості.