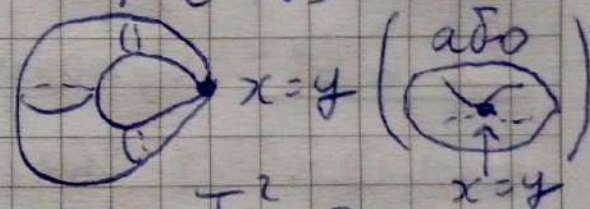
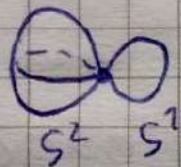


якщо G^1 і $\tilde{G}^1$ є стягнутими клін. підпросторами. Тоді
за Соч. 6.1. $S^2 \vee S^1 \cong X/G^1 \sim X \sim X/\tilde{G}^1 \cong S^2/\{x, y\}$



($S^2/\{x, y\}$ також каноничний факторгр-ру тора T^2 за
меридіаном: $T^2/S^1 \cong S^2/\{x, y\}$).

Рл. 6.3. Для $\forall$ топ. гр-ру X , $x \in X$ і аб. гр. G $\forall k \in \mathbb{N}$
 $H_k(X, \{x\}, G) \cong H_k(X, G)$. Якщо X ліл. зв'язний, то
 $H_0(X, \{x\}, G) = 0$.

Рем. Тут і далі H_k - групи синг. (зокр. відносних) гомологій.

$\Rightarrow$ Замітимо точну послідовність пари $(X, \{x\})$. $\forall k \geq 2$:

$$\dots \rightarrow H_k(\{x\}, G) \rightarrow H_k(X, G) \rightarrow H_k(X, \{x\}, G) \rightarrow H_{k-1}(\{x\}, G) \rightarrow \dots$$

Оск. $H_k(\{x\}, G) \cong \begin{cases} G, & k=0 \\ 0 & \text{в інш. випад.} \end{cases}$ за Ел. 5.4., тут за точністю
маємо $H_k(X, G) \cong H_k(X, \{x\}, G)$. Кінцево посл.!

$$\dots \rightarrow H_1(\{x\}, G) \rightarrow H_1(X, G) \rightarrow H_1(X, \{x\}, G) \rightarrow H_0(\{x\}, G) \xrightarrow{i_{0*}} H_0(X, G) \rightarrow H_0(X, \{x\}, G) \rightarrow 0$$

$\begin{array}{c} 0 \\ \parallel \\ 0 \end{array}$
 $\begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \downarrow \\ G \end{array}$
 $\begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \downarrow \\ G \end{array} \leftarrow X \text{ lin. зв.}$

Путем известно, что $H_0(\{x\}, G) = \{g\varphi_x + B_0(\{x\}, G)\} \cong G$,

причем $g\varphi_x + B_0(\{x\}, G) \rightarrow g$ — изоморфизм (за л. 5.4 адо л. 5.2).

$$H_0(X, G) = \left\{ \sum_{x \in X} g_x \varphi_x + B_0(X, G) \mid g_x \in G, |\{x \mid g_x \neq 0\}| < \infty \right\} \cong$$

$$\bigoplus_{\pi_0(X)} G, \text{ причому } \forall \text{ л. зв. } X_x \subset X \text{ чей изоморфизм}$$

$$\sum_x g_x \varphi_x + B_0(X, G) \rightarrow \sum_{x \in X_x} g_x \quad (\text{л. 5.2}). \text{ Тем-же } i_{0*}$$

линеарными группами индуцируется вложением $i: \{x\} \rightarrow X$:

$$g\varphi_x + B_0(\{x\}, G) \mapsto g\varphi_x + B_0(X, G). \text{ Для зв. } \{x\} \text{ } \psi$$

переводит $i_{0*}(g\varphi_x + B_0(\{x\}, G)) \neq (\dots, 0, g, 0, \dots)$. Потому i_{0*} —

комоноризм: $\text{Ker } i_{0*} = 0$, $\text{Im } i_{0*} \cong G$, $i \text{ Im } i_{0*} = H_0(X, G)$

для л. зв. X . В точности $\neq H_0(\{x\}, G)$, попер. разн-е

$= 0$, тому $H_1(X, G) \cong H_1(X, \{x\}, G)$. Если X л. зв.,

то в точности в ост. членах $H_0(X, \{x\}, G) = 0$. $\triangle$

Вопр. 6.8 Чому гом. (изоморфна) $H_0(X, \{x\}, G) \neq$ зар. владу?

Рч. 6.4. Якщо $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ - топологічні пари, $f: X_1 \rightarrow X_2$ задає гомотопічну екв-сть і $f|_{Y_1}: Y_1 \rightarrow Y_2$ задає гом. екв-сть, то $\forall k \in \mathbb{Z}_+ \underbrace{H_k(X_1, Y_1, G)}_{\text{аб. зн.}} \cong H_k(X_2, Y_2, G)$

► Для $i = 1, 2$ сит. ланц. комплекс $C_*(Y_i, G) \in \text{підкомплекс}$ $C_*(X_i, G)$, і для них варт. точна посл. (Соч. 5.7.) При цьому варт. індуковані гом-зми $f_{k*}: H_k(X_1, G) \rightarrow H_k(X_2, G)$ і $(f|_{Y_1})_{k*}: H_k(Y_1, G) \rightarrow H_k(Y_2, G)$, причому $(f|_{Y_1})_{k*} = f_{k*}|_{H_k(Y_1, G)}$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Тому за Рч. 1.6. діаграма

$$\begin{array}{ccccccccccc} \rightarrow & H_k(Y_1, G) & \rightarrow & H_k(X_1, G) & \rightarrow & H_k(X_1, Y_1, G) & \rightarrow & H_{k-1}(Y_1, G) & \rightarrow & H_{k-1}(X_1, G) & \rightarrow & \dots \\ & \downarrow (f|_{Y_1})_{k*} & & \downarrow f_{k*} & & \downarrow g_{k*} & & \downarrow (f|_{Y_1})_{k-1*} & & \downarrow f_{k-1*} & & \\ \dots & \rightarrow & H_k(Y_2, G) & \rightarrow & H_k(X_2, G) & \rightarrow & H_k(X_2, Y_2, G) & \rightarrow & H_{k-1}(Y_2, G) & \rightarrow & H_{k-1}(X_2, G) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

з точними рядками комутативна. Тут g_{k*} - гом-зм, що індукований факторизованим морфізмом $\{f_k\}$. За доведенням Соч. 5.7., тут $f_{k*}, (f|_{Y_1})_{k*}$ - ізоморфізми і умовно

$\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді за 5-лемою (Рч. 1.4) f_{k*} — ізоморфізм
 $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ (при $k=0$ просто доповнено посл. кінцями). $\triangle$

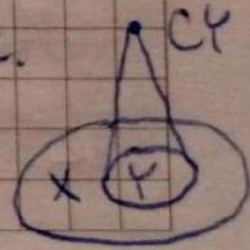
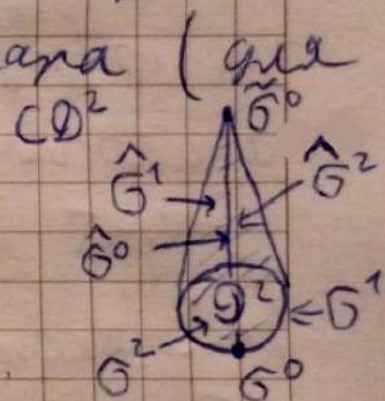
Рч. 6.5 $\forall$ кліт. пр-ру X конус $CX \in$ кліт. пр-ран, і
 $\forall$ кліт. парі (X, Y) $(X \cup CY, CY)$ — кліт. пара (для
 такої стр. конуса CY).

$\Rightarrow$ Отже, $CX = X \times I / X \times \{1\}$. Ототожнимо X з
 класами екв. точок $X \times \{0\}$, маємо вважати $X \subset CX$.

Нехай $p: X \times I \rightarrow CX$ — канон. пр. $\forall$ клітатах $B^k = \varphi^k(D^k)$ пр-ру
 X з хар. відобр. φ^k покладемо $\hat{\varphi}^k: D^k \times I \rightarrow CX: (x, s) \mapsto$
 $\mapsto p(\varphi^k(x), s)$. Оскільки φ^k — вкладення на B^k , а p — на $X \times [0, 1)$,

$\hat{\varphi}^k|_{\text{int}(D^k \times I) = B^k \times (0, 1)}$ — вкладення, і $\hat{\varphi}^k(\partial(D^k \times I)) = \hat{\varphi}^k(D^k \times \{0\} \cup$
 $\cup D^k \times \{1\} \cup S^{k-1} \times I) = B^k \cup \{p(X \times \{1\})\} \cup \hat{\varphi}^k(S^{k-1} \times I) \subset \partial \hat{\varphi}^k(B^k \times (0, 1))$
 Оскільки $D^k \times I \cong D^{k+1}$, маємо вв., що $\hat{B}^k := \hat{\varphi}^k(D^k \times I)$ — $(k+1)$ -вим.

кл. у CX з хар. відобр. $\hat{\varphi}^k$. Для неї $\hat{\varphi}^k(\partial(D^k \times I))$
 $\in$ од'єднанню B^k , $\hat{B}^0 := \{p(X \times \{1\})\}$ (0-вим. кл.



$y \in C_Y$ - "вершини конуса") і так само побудованас
 клітини $\hat{\sigma}^k$, де $k \leq k-1$ (сінх. нівел.). Точ. для C_X
 (хаусд., якщо X - хаусд.) $\{\hat{\sigma}^k, \hat{\sigma}^k \mid \sigma^k - \text{клітина } X\} \cup \{\hat{\sigma}^0\}$ -
 клім. розб. Зокр., воно включає усі клітини X . Також
 для клім. підпр-ру $Y \subset X$ $X \cup C_Y$ - клім. пр-р (додаємо
 клітини C_Y , що не є клітинами Y) а C_Y - його клім.
 підпростір (клітини Y є клітинами X). $\triangle$

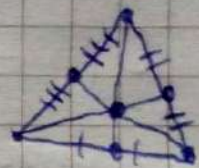
Вопр. 6.9. Довести аналогічне тв. про побудову на X клім. пр-р.

def. 6.6. Баріцентричний підрозділ (barycentric subdivision)
 (або бар. розбиття) станд. k -век. симплекса $\sigma^k = \{x^0, \dots, x^k \mid$
 $x^i \geq 0, \sum_{i=0}^k x^i = 1\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, визначається індуктивно:

- $k=0$: сам симплекс $\sigma^0 = \{1\}$
- $k=1$: два відрізки, на які відрізок σ^1 ділить
 його середина $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



$- k=2$: $6 = 3 \cdot 2$ 2-вим. симплекси, тобто трикутники, зі спільною вершиною — центром мас (баріцентром, т. перетину медіан) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ тр-ка B^2 і протилежними сторонами — симплексами баріц. підрозділів сторін.



$- k \in \mathbb{N}$: $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$ k -вим. симплексів, що є конусами (у евал. сенсі: об'єднання відрізків, що з'єднують вершину з усіма точками основи) зі спільною вершиною — баріцентром $(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1})$ B^k та основами — $(k-1)$ -вим. симплексами баріцентр. підрозділів конвої з $k+1$ $(k-1)$ -вимірних граней (їх $k!$ у кожній грані за інд.).

Рем. ПС.ч., бар. підр. розбиває B^k на $(k+1)!$ k -вим. симплексів. Їх можна ототожнити з ел-тами групи S_{k+1} перестановок індексів $0, \dots, k$: $\forall T \in S_{k+1}$ k -вим. симплекс — це опукла оболонка $T(0)$ -ї вершини B^k , середина ребра, що її поєднує з $T(1)$ -ю верш., баріц. трикутника, третьою верш. якою

$\in \mathcal{T}(z)$ -та, ..., Јакубенкова $(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1})$ $\in \mathcal{K}$. Пошто се образ
трансформација $\mathcal{Z}$ $\in \mathcal{K}$

$$\psi_T^k : (x^0, \dots, x^k) \in G^k \mapsto x^{T(0)}(0, \dots, \underbrace{1}_{T(0)}, \dots, 0) + x^{T(1)}(0, \dots, \underbrace{\frac{1}{2}}_{T(0)}, \dots, \underbrace{\frac{1}{2}}_{T(1)}, \dots, 0) +$$

$$+ x^{T(2)}(0, \dots, \underbrace{\frac{1}{3}}_{T(0)}, \dots, \underbrace{\frac{1}{3}}_{T(1)}, \dots, \underbrace{\frac{1}{3}}_{T(2)}, \dots, 0) + \dots + x^{T(k)}\left(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1}\right).$$

Базисных
или парных $\rightarrow T(0) \quad T(1) \quad T(2)$

$T(1) = \begin{pmatrix} a_{10} \\ \pi(1, T(0)) \end{pmatrix}$

Лем. 6.7. $\forall k \in \mathbb{Z}_+, \text{ ад. гр. } G \text{ вогдобрассерная (операторная) базис.}$
 нидродрдиль в k -мех сиккуррнх ланцонех мон. гр-пу $X \begin{pmatrix} \text{з коэф.} \\ y \in G \end{pmatrix}$

$$\text{звезда } \beta_k: C_k(X, G) \rightarrow C_k(X, G): \sum_{\varphi \in C(G^k, X)} g_\varphi \cdot \varphi \mapsto \sum_{\varphi \in C(G^k, X)} g_\varphi \cdot \beta_k \varphi :=$$
$$= \sum_{\varphi \in C(G^k, X)} g_\varphi \left(\sum_{\psi \in S_{k+1}} \varphi \circ \psi^k \right).$$

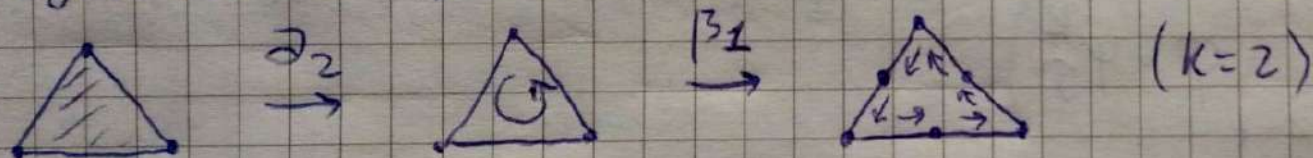
Pr. 6.6.1. $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+} \in \text{Morismen } C_*(X, G) \text{ na sebe. } \exists \text{ unique}$
 ane. automorphism mine men $\text{id}_{C_*(X, G)}$, a omace $\forall k \in \mathbb{Z}_+$
 $\beta_k^* = \text{id}_{H_k(X, G)} \quad (\forall X, G).$

2. $\forall X, G$, бигхн. нокхн. $\{u_i\}_{i=1}^n$ нх-гүг X ма k -моро

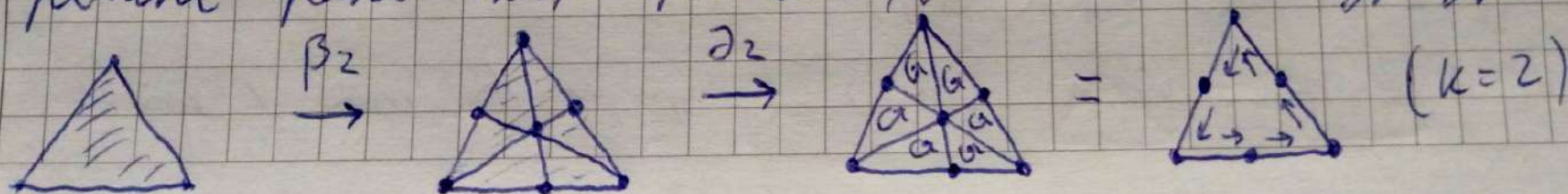
Сингл. ланцюга $\alpha \in C_k(X, G)$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) $\exists m \in \mathbb{N}$ таке, що
 $(\beta_k)^m \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, де $\forall i \quad \alpha_i \in C_k(U_i, G)$.

$\Rightarrow \underline{1} \quad \forall k \quad \beta_k$ - гом-зм за побудовою. Тіе, що $\{\beta_k\}$ - морфізм,
 означає комутативність $\beta_{k-1} \circ \partial_k = \partial_k \circ \beta_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
 Дано "і" "симетричне" пояснення:

Подіяти $\beta_{k-1} \circ \partial_k$ на $\varphi \in C(\sigma^k, X)$ означає спочатку взяти
 атом. суму $(k-1)$ -вим. граней φ , а потім баригентрично їх
 розбити в суми "менших" симплексів:



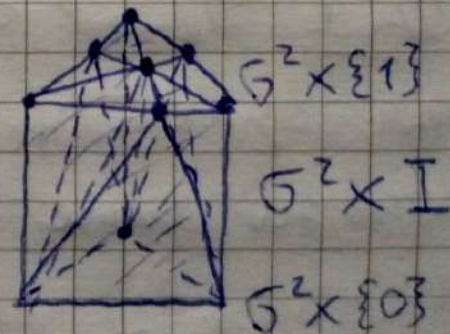
$\partial_k \circ \beta_k$ спочатку розбиває φ , а потім бере суми граней
 консного із симплексів розбиття (підр.), при цьому "внут-
 рішні" грані скорочуються, залишаючи підрозділи граней φ :



Алгебраїчна гомотопія $\{\Phi_k: C_k(X, G) \rightarrow C_{k+1}(X, G)\}_{k \in \mathbb{Z}}$
 будується наст. чином: $\forall$ симпл. симплексу $\sigma \in C(\sigma^k, X)$
 $\Phi_k \sigma := \sum_{i=1}^{(k+1)!+1} \tilde{\Phi} \circ \chi_i^k$, де $\tilde{\Phi}: \sigma^k \times I \rightarrow X: (x, t) \mapsto \Phi(x)$,
 а $\chi_i^k: \sigma^{k+1} \rightarrow \sigma^k \times I$ — "параметризації" симплексів розбиття
 "призми" $\sigma^k \times I$, що будуються індуктив-
 но: $\vdots$ для $k=0$,  для $k=1$, і $\forall k \in \mathbb{N}$ розби-

вається "верхньою гранню" $\sigma^k \times \{1\}$ баріцентрично,
 "бічній стороною" $\sigma_{\bar{y}}^{k-1} \times I$, де $\sigma_{\bar{y}}^{k-1}$ — $(k-1)$ -вим. грань σ^k ,
 як на попередньому етапі, і проводило ребра з барі-
 центра $(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1}, 1)$ верхньої грані до вершин $(1, \dots, 0, 0), \dots,$
 $(0, \dots, 1, 0)$ нижньої. Наприклад, при $k=2$:

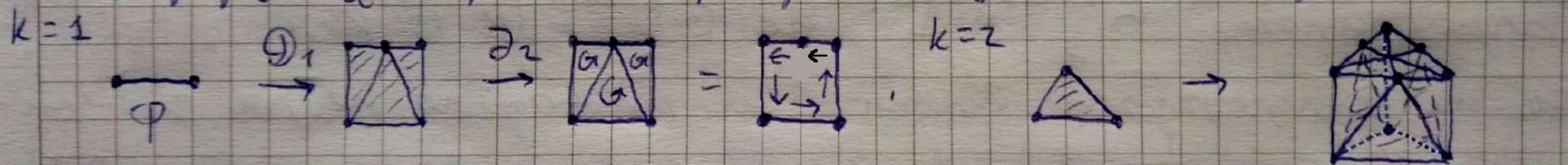
Отримуємо $(k+1)!$ $(k+1)$ -вим. симплексів-
 конусів з основаних у симплексі бар. підр.
 $\sigma^k \times \{1\}$ і вершинами у відр. вершинах



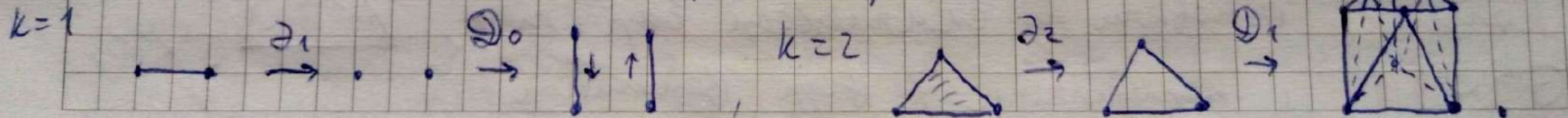
$B^k \times \{0\}$ і 1 - конус над $B^k \times \{0\}$ з верши у барі-центрі $B^k \times \{1\}$.

Далі, як завжди, $\partial_k (\sum_{\varphi} f_{\varphi} \cdot \varphi) = \sum_{\varphi} f_{\varphi} \cdot \varphi$, тому це ком-зм. знову дано "геометричне" пояснення!

$\forall k \in \mathbb{N} \forall k$ -вим. сим. симп. φ для на якого $\partial_{k+1} \circ \partial_k$ спочатку дає описане вище розбиття, а потім залишає від нього альтернуват сину k -вим. граней. При цьому "внутрішні" грані скорочуються залишаючи зовнішні:



Для $\partial_{k-1} \circ \partial_k$ спочатку залишає лише альт. сину $(k-1)$ -вим. граней φ , а потім буде розбиття конусів з них, залишаючи лише "лінійні сторони призми":



Пом'я $(\partial_{k+1} \circ \Phi_k - \Phi_{k-1} \circ \partial_k)(\varphi)$ - це різниця (композицій φ з) β^k і його барнц. підгр., тобто (з точністю до знака) $\varphi - \beta_k \varphi$, що й потрібно. Пів. про $\beta_k \neq \text{тоді}$ - це Рл. 1.2.

Впр. 6.10. Провести усі формальні перевірки.

2. Отже, $\{u_i\}_{i=1}^n$ - відкр. покр. X . Тоді $\forall a = \sum_{\varphi \in C(\beta^k, X)} g_\varphi \cdot \varphi \in C_k(X, G)$ і $\forall \varphi \in C(\beta^k, X)$ такою, що $g_\varphi \neq 0$ (іє скінч. число) $\{\varphi^{-1}(u_i)\}_{i=1}^n$ - відкр. покр. компакта β^k . Увсвіт $0 < \delta$ - його число Лебега.

Впр. 6.11. Оцінити відношення (евкл.) діаметра симплексів бар. підгр. β^k до діаметра β^k .

Пит достатньо того очевидного факта, що $\forall$ симплекс бар. підгр. має діаметр $\leq \lambda \text{ diam } \beta^k$, де $\lambda < 1$ (і залежить лише від k). Тоді $\exists m \in \mathbb{N}$ таке, що, застосу-

ввівши підрозділ послідовно m разів (на кожному етапі до консного з сімпл., що отримані на попередньому), отримаємо підрозділ, симплекси якого мають діаметри $\leq \delta$, а отже всі входять у якийсь $\varphi^{-1}(U_i)$.



(найбільше з m для всіх φ)

Алгебраїчно це означає перехід від a до $(\beta_k)^m a = \sum_{\psi \in C(\sigma^k, x)} k_\psi \cdot \psi$, де тепер $\psi(\sigma^k) \subset U_i \forall \psi$ і деякого $i = \overline{1, n}$.

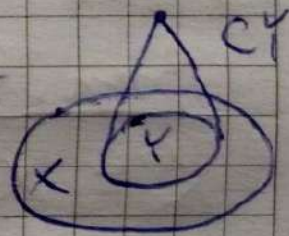
Групуємо такі ψ , отримаємо $a = \sum_{i=1}^n a_i$, де $\forall i$
 $a_i = \sum_{\psi: \psi(\sigma^k) \subset U_i} k_\psi \cdot \psi \in C_k(U_i, G)$, що й потрібно. $\triangle$

Рез. З доведення видно, що у н.з. покриття не обов'язково брати скінч. і зазв. випадку для покр. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ отримаємо $a = \sum_{\alpha} a_\alpha$, де, отім, має скінч. кільк. $a_\alpha \neq 0$.
 "Образи" лапунів компактні, тому покриваються скінч. підпокриттями $\{U_\alpha\}$.

Th. 6.2. (про вурізання). Для Бугро-якас кліматичної пари (X, Y) , аб. групи G і $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(X, Y, G) \cong H_k(X/Y, G).$$

► Як і в попередній п'яті, гр. допомогіт - сина. Одно-тонскаючи $p(Y \times \{0\}) \subset CY$ (для канон. гр. p) з Y



(як у Рч. 6.5), маємо об'єднання $X \cup CY$ і гомеоморфізм $X/Y \cong X \cup CY / CY$. Крім того $(X \cup CY, CY)$ - клім. пара за Рч. 6.5, а CY стягнений. Тільки за лем. інв.

$$\begin{aligned} H_k(X/Y, G) &\cong H_k(X \cup CY / CY, G) \cong [\text{Соч. 6.1.}] \cong H_k(X \cup CY, G) \cong \\ &\cong [\text{Рч. 6.3.}] \cong H_k(X \cup CY, \{y\}, G) \cong \left[\begin{array}{l} \text{Рч. 6.4. : } id_{X \cup CY} \text{ - гомот. экв.,} \\ id_{X \cup CY} |_{\{y\}} = y \text{ - гомот. экв., } \{y\} \text{ -} \\ [CY, \text{до } CY \text{ стягнутый}] \end{array} \right] \cong \end{aligned}$$

$$\cong H_k(X \cup CY, CY, G).$$

Представимо $CY = C_2Y \cup C_1Y$, де $C_1Y \cong CY$,

а $C_2Y \cong Y \times I$, наприклад, $C_2Y = p(Y \times [0, \frac{1}{2}])$ і

$$C_1Y = p(Y \times [\frac{1}{2}, 1]).$$



Покі Y - деяка. неправа $C_2 Y$, отже для виконання
 $i: X \rightarrow X \cup C_2 Y$ і $i|_Y: Y \rightarrow C_2 Y$, потрібно менше виконання,
 задає повнот. екв.

Впр. 6.12. Показати, що i - менс (задає) повнот. екв.

$X = X \cup Y$ і $X \cup C_2 Y$. Визначі, за яких умов два
 склеювання повнот. **екв.**? (див. парр., [Нахточ, р. 16]).

Потім знову по за Вр. 6.4, $H_k(X, Y, G) \cong H_k(X \cup C_2 Y, C_2 Y, G)$.

П.ч., для доведення теореми треба показати, що

$$H_k(X \cup C_2 Y, C_2 Y, G) \stackrel{\alpha}{\cong} H_k(X \cup C Y, C Y, G).$$

Побудуємо цей ізоморфізм α як "виконання". Задаємо,
 що $\forall$ ел-т першої гр. має вигляд $(a + C_k(C_2 Y, G)) +$
 $+ B_k(X \cup C_2 Y, C_2 Y, G)$, де $a + C_k(C_2 Y, G) \in Z_k(X \cup C_2 Y, C_2 Y, G) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a \in C_k(X \cup C_2 Y, G)$ і $\partial_k a \in C_{k-1}(C_2 Y, G)$. Док.
 $C_2 Y \subset C Y (\Rightarrow X \cup C_2 Y \subset X \cup C Y)$, $a \in C_k(X \cup C Y, G)$, $\partial_k a \in$
 $\in C_{k-1}(C Y, G) \Rightarrow a + C_k(C Y, G) \in Z_k(X \cup C Y, C Y, G)$, а отже

$$(a + C_k(CY, G)) + B_k(X \cup CY, CY, G) \in K_k(X \cup CY, CY, G).$$

Цей $\bar{a}$ відповідно як одна важкого сум. класу під
грію 2. Коректність:

$$\begin{aligned} (a + C_k(C_2Y, G)) + B_k(X \cup C_2Y, C_2Y, G) &= (b + C_k(C_2Y, G)) + B_k(X \cup C_2Y, C_2Y, G) \in \\ \Leftrightarrow a - b + C_k(C_2Y, G) \in B_k(\dots) &\Leftrightarrow \exists c \in C_{k+1}(X \cup C_2Y, G): \\ a - b + C_k(C_2Y, G) &= \partial_{k+1}c + C_k(C_2Y, G) \Rightarrow a - b - \partial_{k+1}c \in C_k(C_2Y, \\ G) \subset C_k(CY, G) &\Rightarrow [c \in \underbrace{X \cup CY}_{C_{k+1}}] \Rightarrow a - b + C_k(CY, G) = \\ &= \partial_{k+1}c + C_k(CY, G) = \partial_{k+1}(c + C_{k+1}(CY, G)) \subset B_k(X \cup CY, CY, G) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a + C_k(CY, G)) + B_k(X \cup CY, CY, G) = (b + C_k(CY, G)) + B_k(\dots). \end{aligned}$$

Цей зв'язок за побудовою. Перевіряємо монопортність (інт):

$$\text{нехай } 0 = \alpha((a + C_k(C_2Y, G)) + B_k(X \cup C_2Y, C_2Y, G)) = (a + C_k(CY, G)) + B_k(X \cup CY, CY, G), \text{ тобто } a + C_k(CY, G) = \partial_{k+1}(b + C_{k+1}(CY, G)) = \partial_{k+1}b + C_k(CY, G), \text{ де } b \in C_{k+1}(X \cup CY, G).$$

Розглянемо якесь фіктив. покр. $\{u, v\}$ пр-пу $X \cup CY$:

$U \subset X \cup C_2 Y, V \subset C_1 Y$. Застосуємо до
 цього н. з. Рм. 6.6. : $\exists m \in \mathbb{N}$:



$(\beta_{k+1})^m b = b' + b''$, де $b' \in C_{k+1}(X \cup C_2 Y, G)$,
 $b'' \in C_{k+1}(C_1 Y, G)$. При цьому за н. з. Рм. 6.6. $((\beta_{k+1})^m)^* =$
 $= (\beta_{(k+1)^*})^m = \text{id}_{H_{k+1}(X \cup C_1 Y, G)}$, маємо $b' + b'' = (\beta_{k+1})^m b =$
 $= b + \partial_{k+2} c$ для деякого $c \in C_{k+2}(X \cup C_1 Y, G)$. Оскільки
 $\partial_{k+1} \circ \partial_{k+2} = 0$, маємо $a + c_k(C_1 Y, G) = \partial_{k+1} b + c_k(C_1 Y, G) =$
 $= \partial_{k+1} b' + \partial_{k+1} b'' + c_k(C_1 Y, G) = [\partial_{k+1} b'' \in c_k(C_1 Y, G)] =$
 $= \partial_{k+1} b' + c_k(C_1 Y, G) \Rightarrow [\partial_{k+1} b' \in c_k(X \cup C_2 Y, G)] \Rightarrow$
 $\Rightarrow a - \partial_{k+1} b' \in c_k(C_1 Y, G) \cap c_k(X \cup C_2 Y, G) = c_k(C_2 Y, G) \Rightarrow$
 $\Rightarrow a + c_k(C_2 Y, G) = \partial_{k+1} b' + c_k(C_2 Y, G) = \partial_{k+1} (b' + c_{k+1}(C_2 Y, G)) \in$
 $\in B_k(X \cup C_2 Y, C_2 Y, G)$, що й потрібно: α - інж.

Нарешті, нехай $(a + c_k(C_1 Y, G)) + B_k(X \cup C_1 Y, C_1 Y, G)$ -
 довільний з $H_k(X \cup C_1 Y, C_1 Y, G)$. Випишемо не не

фиксир. покр. $\{u, v\}$, можно з н. 2. Рл. 6.6., что $\exists \tilde{m} \in \mathbb{N}$:
 $(\beta_k)^{\tilde{m}} a = a' + a''$, где $a' \in C_k(X \cup C_2 Y, G)$, $a'' \in C_k(CY, G)$,
 а з н. 1. - что $a - a' - a'' \in B_k(X \cup CY, G)$; $\exists b \in C_{k+1}$
 $(X \cup CY, G)$: $a - a' - a'' = \partial_{k+1} b \Rightarrow a + C_k(CY, G) =$
 $= a' + a'' + \partial_{k+1} b + C_k(CY, G) = [a'' \in C_k(CY, G)] = a' + C_k(CY, G) +$
 $+ \partial_{k+1}(b + C_{k+1}(CY, G)) \Rightarrow (a + C_k(CY, G)) + B_k(X \cup CY, CY, G) =$
 $= (a' + C_k(CY, G)) + B_k(X \cup CY, CY, G) = \alpha((a' + C_k(C_2 Y, G)) + B_k(X \cup C_2 Y,$
 $C_2 Y, G)) \in \text{Im } \alpha$, Пл. ч. α - сур (epimorphism), а также isomorphism. Δ

Сол. 6.2. Для $\forall$ климатной пары (X, Y) точна послідовність
пар (Сол. 5.7.) набуває вигляду $(\forall \text{ ад. гр. } G)$

$$\dots \rightarrow H_k(Y, G) \rightarrow H_k(X, G) \rightarrow H_k(X/Y, G) \rightarrow H_{k-1}(Y, G) \rightarrow \dots \rightarrow H_0(X, Y, G) \rightarrow 0$$

Лем. 6.16. Ще раз порозуміємо чим закончить (анал.)
серед S^n для $n \in \mathbb{N}$ $\{ \vdash \forall \text{ ад. гр. коеф. } G \}$.

$n=1$. Рольн. клим. парн $(\mathbb{D}^1, S^0)$, где $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$, а $S^0 = \{-1, 1\}$ - 0-век. клим. нигрн. (губ. Ес. 6.1.). Оск. $\mathbb{D}^1/S^0 \cong S^1$, за точной посл. парн з Сох. 6.2. и зомом. еуб-ство можно точную посл. Для $k \geq 2$:

$$\dots \rightarrow H_k(S^0, G) \rightarrow H_k(\mathbb{D}^1, G) \rightarrow H_k(S^1, G) \rightarrow H_{k-1}(S^0, G) \rightarrow \dots$$

$\parallel \leftarrow \text{Ес. 5.4.}$
 $\parallel \leftarrow \text{Ес. 5.4. и зомом. инв.:}$
 $\text{Ес. 5.4.} \rightarrow \parallel$

Омне $H_k(S^1, G) = 0$, Крим того, $H_0(S^1, G) \cong G$ за Рч. 5.2 и ин. зб.

Кинезь посл.:

$$\dots \rightarrow H_1(\mathbb{D}^1, G) \rightarrow H_1(S^1, G) \rightarrow H_0(S^0, G) \xrightarrow{i_{ox}} H_0(\mathbb{D}^1, G) \rightarrow H_0(\mathbb{D}^1, S^0, G) \rightarrow 0$$

$\parallel \leftarrow \text{Ес. 5.4. и зомом. инв.}$
 $\parallel \leftarrow \text{Рч. 5.2. адо Ес. 5.4.}$
 $\parallel \leftarrow \text{Рч. 5.2.}$

За Ес. 5.4., $H_0(S^0, G) \cong C_0(S^0, G) = \{g\varphi_{-1} + h\varphi_1 \mid g, h \in G\} \cong G^2$.

Пиг гиего i_{ox} ге перес. з $g\varphi_{-1} + h\varphi_1 + B_0(\mathbb{D}^1, G)$, а ниг гиего из-ма з Рч. 5.2. - з $g + h$. Пч. ч., $\text{Im } i_{ox} = H_0(\mathbb{D}^1, G) (\cong G)$,

зокр., за точністю, якщо наступного - це $H_0(\mathbb{D}^1, G)$, тобто
 факт $= 0$, тоді за точністю в ост. члені $H_0(\mathbb{D}^1, S^0, G) = 0$.
 З іншого боку, Кек $\tilde{c}_{0*} = \{ g \Phi_1 - g \Phi_{-1} \mid g \in G \} \cong G$,
 отже за точністю $H_1(S^1, G) \cong G$.

Для $n \geq 2$: $(\mathbb{D}^n, S^{n-1})$ - клас. пара (знову Ес. 6.4.), і
 $\mathbb{D}^n / S^{n-1} \cong S^n$. Для $k \geq 2$:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H_k(\mathbb{D}^n, G) & \rightarrow & H_k(S^n, G) & \rightarrow & H_{k-1}(S^{n-1}, G) & \rightarrow & H_{k-1}(\mathbb{D}^n, G) \rightarrow \dots \\ & & \parallel & \xleftarrow{\text{за Ек. 5.4. і точн. экв.}} & & \xrightarrow{\parallel} & 0 \end{array}$$

Отже $H_k(S^n, G) \cong H_{k-1}(S^{n-1}, G)$. Ці рівності (ізomorфності)
 такі ж, що отримали з посл. М.-В. у Ес. 5.11. Застосуючи
 їх так же. Кінцеве посл.:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \rightarrow H_1(\mathbb{D}^n, G) & \rightarrow & H_1(S^n, G) & \rightarrow & H_0(S^{n-1}, G) & \xrightarrow{\tilde{c}_{0*}} & H_0(\mathbb{D}^n, G) & \rightarrow & H_0(\mathbb{D}^n, S^{n-1}, G) & \rightarrow & 0 \\ \parallel \leftarrow \begin{array}{l} \text{Ек. 5.4. і} \\ \text{точн. экв.} \\ \text{можли} \end{array} & & & & & & \begin{array}{l} \mathbb{Z} \\ G \end{array} \xleftarrow{\text{Рл. 5.2.}} \begin{array}{l} \mathbb{Z} \\ G \end{array} & & & & \end{array}$$

Тепер з Рл. 5.2. бачим, що $\tilde{c}_{0*} : \sum_{x \in S^{n-1}} g_x \Phi_x + B_0(S^{n-1}, G) \mapsto$
 $\mapsto \sum_{x \in S^{n-1}} g_x \Phi_x + B_0(\mathbb{D}^n, G)$ - ізomorфізм (обидва ланц. відр.

$\sum_{x \in S^{n-1}} g_x \in G$). Тому за точністю $H_1(S^n, G) = H_0(D^n, S^{n-1}, G) = 0$.
 Як у Ех. 5.11., з цього всього знову випл., що

$$H_k(S^n, G) \cong \begin{cases} G, & k=0, n(>0), \\ 0 & \text{у інш. випад.} \end{cases}$$

Впр. 6.13. Показати, що якщо X лін зв., а $Y \neq \emptyset$, то $H_0(X, Y, G) = 0 \forall G$.

Роз. Для наступного прикладу знадобиться заг. твердження, що фактично вже використовували у Рл. 5.2. (Впр. 5.2.) при $k=0$:

Рл. 6.7. $\forall$ топологічній сумі $\bigsqcup_{x \in I} X_x$, ад. гр. G , $k \in \mathbb{Z}_+$

$$H_k(\bigsqcup_{x \in I} X_x, G) \cong \bigoplus_{x \in I} H_k(X_x, G).$$

$\Rightarrow \forall$ k -вип. сим. функ. $\varphi \in C(B^k, \bigsqcup_x X_x)$ $\varphi(B^k) \overset{(\text{лінійн.})}{\text{зв'язна}}$,
 а отже повністю міститься у деякому X_x . Тому $\forall$ кожної

$a \in C_k(\bigsqcup_x X_x, G)$ має (в силу скінченності) вигляд (для $g_{ij} \in G$)

$$a = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} g_{ij} \varphi_{ij}, \quad \text{де } \forall i, j \varphi_{ij} \in C(B^k, X_{x_i}), \text{ а отже}$$

$$a_i := \sum_{j=1}^{n_i} g_{ij} \varphi_{ij} \in C_k(X_{x_i}, G) \quad (\text{отже кожний } \in \text{інк}(C_k(X_{x_i}, G)), \text{ де}$$

$\text{in} : X_{\gamma_i} \rightarrow \bigcup_{\gamma} X_{\gamma}$ - вмонтована, але, як у Рл.6.6 і Тл.6.2,
 ми можемо похитливо в позначеннях). Тл.ч., дов. ел-т $H_k(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G)$
 має вигляд $\alpha + B_k(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G) = \sum_{i=1}^m \alpha_i + B_k(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G)$
 у повн. як вище. При цьому $\alpha \in Z_k(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G) \Rightarrow 0 = \partial_k \alpha =$
 $= \sum_i \partial_k \alpha_i$. За побудовою, $\forall i$ уник. зам-зм $C_k(X_{\gamma_i}, G)$ - це
 $\partial_k^{X_{\gamma_i}} = \partial_k|_{C_k(X_{\gamma_i}, G)} : C_k(X_{\gamma_i}, G) \rightarrow C_{k-1}(X_{\gamma_i}, G)$, тому $\forall i \partial_k \alpha_i \in$
 $\in C_{k-1}(X_{\gamma_i}, G)$, і $\sum_i \partial_k \alpha_i = 0 \Rightarrow \forall i \partial_k \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_i \in Z_k(X_{\gamma_i}, G)$.
 Тоді визначимо $\psi : H_k(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G) \rightarrow \bigoplus_{\gamma} H_k(X_{\gamma}, G) : \sum_i \alpha_i + B_k(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G) \mapsto$
 $\mapsto (0, \dots, \alpha_1 + B_k(X_{\gamma_1}, G), \dots, \alpha_m + B_k(X_{\gamma_m}, G), \dots, 0) \leftarrow (x)$. Оск. лише

скінч. кільк. ел-тів пучкові, це дійсно ел-т прямої суми.
 Коректність: нехай $\sum_{i=1}^m \alpha_i + B_k(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G) = \sum_{i=1}^m \beta_i + B_k(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G)$. Тоді
 можемо вважати, що суми за однаковими наборами просторів
 $(\forall i \alpha_i, \beta_i \in C_k(X_{\gamma_i}, G))$, доповнюючи нулями за потреби. Тл.ч.,

$$\sum_i (a_i - b_i) \in B_k \left(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G \right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{сума за мену не } i \\ \text{з аналогичних підгруп} \end{array} \right] \exists C =$$

$$= \sum_i C_i \in C_{k+1} \left(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G \right), \text{ де } \forall i \ C_i \in C_{k+1}(X_{\gamma_i}, G), \ i$$

$$\sum_i (a_i - b_i) = \partial_{k+1} C = \sum_i \partial_{k+1} C_i \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{порівн. ел-м} \\ C_k(X_{\gamma_i}, G) \ \forall i \end{array} \right] \Rightarrow \forall i$$

$$a_i - b_i = \partial_{k+1} C_i \in B_k(X_{\gamma_i}, G) \Rightarrow a_i + B_k(X_{\gamma_i}, G) = b_i + B_k(X_{\gamma_i}, G).$$

$$\text{тнж: } \Psi \left(\sum_i a_i + B_k \left(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G \right) \right) = 0 \Rightarrow \forall i \ a_i + B_k(X_{\gamma_i}, G) = 0 \Rightarrow$$

$$\exists b_i \in C_{k+1}(X_{\gamma_i}, G) : a_i = \partial_{k+1} b_i \Rightarrow \sum_i a_i = \partial_{k+1} \sum_i b_i, \text{ де}$$

$$\sum_i b_i \in C_{k+1} \left(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G \right) \Rightarrow \sum_i a_i \in B_k \left(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G \right).$$

$$\text{зун: } \forall \text{ ел-м } \bigoplus_{\gamma} H_k(X_{\gamma}, G) - \text{це скінч. набір функцій } (*),$$

$$\text{а отже } = \Psi \left(\sum_i a_i + B_k \left(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G \right) \right). \triangle$$

Реш. Це доведена базувється на тому, що за побудовою

$$C_k \left(\bigcup_{\gamma} X_{\gamma}, G \right) = \bigoplus_{\gamma} C_k(X_{\gamma}, G) \text{ (точніше, канонічно ізоморфна).}$$

Впр. 6.19. Довести ан-не твердження для відносних циклоїд:

$$\text{якщо } \forall \gamma \in \Gamma \ Y_{\gamma} \subset X_{\gamma} \text{ (нтр.)}, \text{ то } H_k \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_{\gamma}, \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_{\gamma}, G \right) \simeq \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_k(X_{\gamma}, Y_{\gamma}, G)$$

$\forall$ ад. н. $G, k \in \mathbb{Z}_+$.

Ex. 6.17. $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\mathbb{D}^n \cup \dots \cup \mathbb{D}^n}_m / \underbrace{S^{n-1} \cup \dots \cup S^{n-1}}_m \cong \underbrace{S^n \cup \dots \cup S^n}_m$

є важл. з $\mathbb{D}^n / S^{n-1} \cong S^n$ і того, що як S^{n-1} ототожнено-
ється в одній точці факторизуючи, що важл. співвідношення
Буржеса. Це факторизація за клас. відношення (до кола
 S^{n-1} - клас. відношення $\mathbb{D}^n$), тому за Th. 6.2. $\forall k \in \mathbb{N}$, ад.г. G

$$H_k(\underbrace{S^n \cup \dots \cup S^n}_m) \cong H_k(\underbrace{\mathbb{D}^n \cup \dots \cup \mathbb{D}^n}_m, \underbrace{S^{n-1} \cup \dots \cup S^{n-1}}_m, G) \oplus \mathbb{D}$$

можна або використати Впр. 6.14. : $\oplus_{i=1}^m H_k(\mathbb{D}^n, S^{n-1}, G) \cong$
 $\cong [\text{Th. 6.2.}] \cong \oplus_{i=1}^m H_k(S^n, G)$, або перевірити, згідною точці
посл. пар і використовуючи Рл. 6.4. :

$$H_k(\underbrace{\mathbb{D}^n \cup \dots \cup \mathbb{D}^n}_m, G) \cong \oplus_{i=1}^m H_k(\mathbb{D}^n, G) \cong \begin{cases} G^m, & k=0 \\ 0 & \text{якщо інше.} \end{cases}$$

$$H_k(\underbrace{S^{n-1} \cup \dots \cup S^{n-1}}_m, G) \cong \oplus_{i=1}^m H_k(S^{n-1}, G) \cong \begin{cases} G^m, & k=n-1 > 0 \text{ або } k=0, n>1; \\ G^{2m}, & k=n-1=0; \\ 0 & \text{якщо інше.} \end{cases}$$

Далі повторюємо мірку. з Ex. 6.16, але тепер для $n > 1$

суми груп (перевірне). В Бурб-Холм разі, враховуючи
також Рн. 5.2. і лін. зв'язність, маємо

$$H_k(\underbrace{S^n V \dots V S^n}_m, G) \cong \begin{cases} G^m, & k=n; \\ G, & k=0; \\ 0, & k \neq 0, n. \end{cases}$$

Впр. 6.15. Узагальнити на букети сфер різні важливісні.