

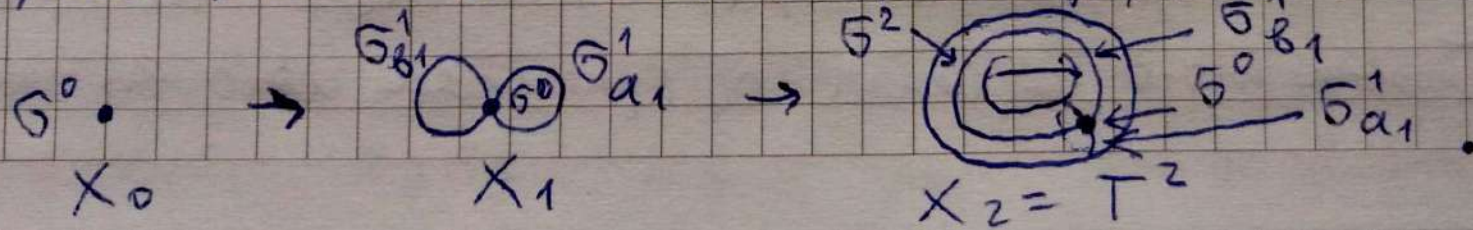
Пусть такое при факторизации усі вершины переходят
 в единич $x \in N_g^2$, а ребра $a_1, \dots, a_g$ — в нити в x . Так само,
 як у Ex. 6.9., виходило $\varphi^2: \mathbb{D}^2 \rightarrow N_g^2$, $\mathbb{B}^2 := \varphi^2(\mathbb{D}^2)$, $\varphi_{a_i}^1: \mathbb{D}^1 \rightarrow$
 $\rightarrow N_g^2$, $\mathbb{B}_{a_i}^1 := \varphi_{a_i}^1(\mathbb{D}^1)$, $\mathbb{B}^0 := \{x\}$ ($i = \overline{1, g}$). При $\mathbb{B}^2, \mathbb{B}_{a_1}^1, \dots, \mathbb{B}_{a_g}^1, \mathbb{B}^0$ —
 клітини вим. висхідностей, а $(N_g^2, \{\mathbb{B}^0, \mathbb{B}_{a_1}^1, \dots, \mathbb{B}_{a_g}^1, \mathbb{B}^2\})$ — (скін.)
 2-вал. клім. гр-р. При $g = 1$ ця стр. на $N_1^2 = \mathbb{R}P^2$ збіга-
 ється з побудованою у Ex. 6.8. (чому?).

Рем. Пусть $\mathbb{D}^n \cong \mathbb{B}^n$, S^n , $\mathbb{R}P^n$ (як магі мноровиди), M_g^2 , N_g^2
 (як поверхні) є скін. гр-рами, але описані вище їх
 кліматичні структури, як правило, значно простіші (та
 "прозоріші") за триангуляції.

Рем. За власт. (C) з def. 6.2., $\forall$ k -вим. кліматич $\varphi(\mathbb{D}^k)$
 з клім. розб. клім. гр-ру X $\varphi(S^{k-1}) \subset X_{k-1}$ — $(k-1)$ -вим.
 кістка X (більш того, є скін. об'єднання його ел-тів)
 для $k \in \mathbb{N}$.

При цьому $X_{k-1} \cup \varphi(\mathbb{D}^k) \cong (X_{k-1} \cup \mathbb{D}^k) / \sim$, де $\sim$ екв.-ті $\sim$ ототожнення конусу $x \in S^{k-1}$ з $\varphi(x) \in X_{k-1}$. В кінці ток. ми назвали таку факторизацію приклеювання за відображен-ням $\varphi|_{S^{k-1}} : X_{k-1} \cup \varphi(\mathbb{D}^k) \cong X_{k-1} \cup \mathbb{D}^k$ (при цьому тожд-стві $y \in \mathbb{D}^k$ відп. $\varphi(y)$; Впр. 6.3. Перевіряти гомеоморфізм).
 Так можна збудувати з $\forall$ k -вим. клітинною, отримавши X^k (принаймні, коли їх скінч. кількість).

Потому побудову клітинного простору (принаймні скінч.) часто описують "інкрементально" як серію послідовних приклеювань: починаємо з дискретного пр-ру X_0 0-вим. клітин, потім приклеюємо до них кілець відрізки $\mathbb{D}^1$, отримуючи 1-вим. клітини в X_1 , потім приклеюємо $\mathbb{D}^2$ етс. Наприклад, для $T^2 = M^2_1$:



Наступні означення прямо узгоджуються з інтуїцією:

def. 6.3. Клітинний пр-р (Y, B) зветься клітинним підпростором кліт. пр-ру (X, A) , якщо $Y \subset X$ - топ. підпростір і $B \subset A$ (кожна k -вкл. клітина в Y з $B \in K$ -вкл. кл. в X з A , $\forall k \in \mathbb{Z}_+$). У цьому випадку говорять, що (X, Y) - клітинна пара.

Ex. 6.11. Приклади (очевидні) кліт. підпр-рів є

- симплексні підпростори;
- $S^{n-1} \subset D^n$ з Ex. 6.6. і Ex. 6.7.
- $RP^k \subset RP^n \quad \forall k = \overline{0, n}$ з Ex. 6.8.
- $X_k \subset X_\ell$ для кістяків пр-ру X , де $0 \leq k \leq \ell$,
зокрема, $X_k \subset X \quad \forall k$.

def. 6.4. Неперервне відображення $f: X \rightarrow Y$ зв. клітинним відображенням кліт. пр-рів (X, A) на (Y, B) , якщо $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ переводить k -вкл. кістяк (X, A) у k -вкл. кістяк (Y, B) .

$$f(X_k) \subset Y_k.$$

Лем. Оск. ця властивість збер. при композиції (та її мають топологічні відобр.), клітинні пр-ри та кліт. відобр. утворюють категорію (підкатегорію з Top), підкатегорією якої є симплексійні пр-ри і відобр., бо $\forall$ симп. відобр. є клітинним.

Впр. 6.4. Показати, що ізоморфізми у цій категорії, що зветься клітинними еквівалентностями (тобто такі $f: X \rightarrow Y$, що f - ізоморфізм, $f(X_k) \subset Y_k$ і $f^{-1}(Y_k) \subset X_k$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$) переводять кліт. розбиття першого пр-ру у кліт. розбиття другого.

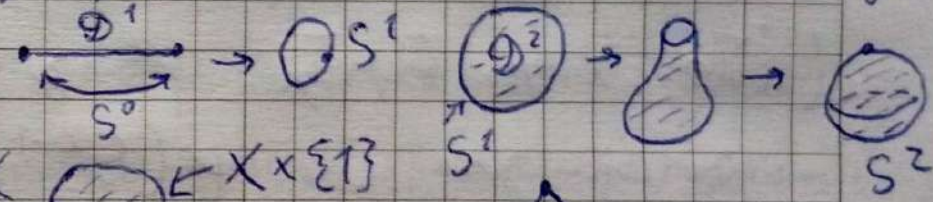
Вирізання (excision)

Згадаймо, що факторпростір топ. пр-ру X за підпростором $Y \subset X$ - це факторпр-р за відн. екв-

сті, що ототожнює всі точки Y (а решту точок X - лише з собою). Він позначається X/Y .

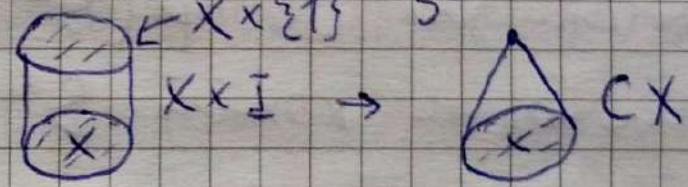
Ес. 6.12. Y попер. курсам на Y утворюється такі приклади:

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{D}^n / S^{n-1} \cong S^n$
 (факторизуємо $\mathbb{D}^n$ з Ес. 6.6. у рачо-зм.)



- $\forall$ топ. пр-ру X конус над X

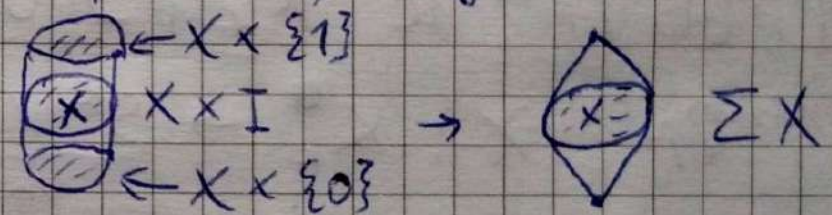
$$CX := X \times I / X \times \{1\}$$



Зокрема, $\forall X$ CX стягнений (Впр. 6.5 або див. попер. курс).

- $\forall$ топ. пр-ру X надбудова (suspension) над X

$$\Sigma X := (X \times I / X \times \{1\}) / X \times \{0\}$$



Надбудова все не обов'язково

стягнена: Впр. 6.6. $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \Sigma S^n \cong S^{n+1}$ (це використовується, зокрема, для обчислення $\pi_n(S^n)$ за Тн. Фрейденталя).

Ес. 6.13. Нехай k -ім. пр-р X має для $k \in \mathbb{N}$ m -в-м.

Візьмемо $\sigma_1^k, \dots, \sigma_m^k$, і для $i = \overline{1, m}$ φ_i^k - хар. відобр. $\sigma_i^k = \varphi_i^k(\mathbb{D}^k)$. Нехай $\psi: \mathbb{D}^k \rightarrow S^k$ - композиція канон. проєкції $\mathbb{D}^k \rightarrow \mathbb{D}^k / S^{k-1}$ і зомео-зма $\mathbb{D}^k / S^{k-1} \rightarrow S^k$ з поперед. Ex. 6.12 (або хар. відобр. φ^k з Ex. 6.6). Зокр., $\psi|_{B^k}: B^k \rightarrow S^k \setminus \{x\}$ - зомео-зм і $\psi(S^{k-1}) = \{x\}$ для деякої $x \in S^k$ (Кансіно, V).

Склеїмо m копій S^k точками x , отримавши букет $\underbrace{S^k \vee \dots \vee S^k}_m$ (задаємо, що він не залежить від точок склеювання з застереженням до точності до зомео-зма). За означ. клас. пр-ра, $X_k = X_{k-1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^m \varphi_i^k(B^k) \right)$, де $X_{k-1} \supset \bigcup_{i=1}^m \varphi_i^k(S^{k-1})$. Тоді коректно визм. і непер. $\chi: X_k \rightarrow \underbrace{S^k \vee \dots \vee S^k}_m$: $y \mapsto \begin{cases} (\psi_i \circ (\varphi_i^k)^{-1})(y), & y \in \varphi_i^k(B^k); \\ x, & y \in X_{k-1}, \end{cases}$

де $\psi_i: \mathbb{D}^k \rightarrow S^k$ - i -та середина букета, що факторизується y непер. $\chi/X_{k-1}: X_k/X_{k-1} \rightarrow \underbrace{S^k \vee \dots \vee S^k}_m$.

За побудовою це вірн. Оск. $X_k/X_{k-1} = \bigcup_{i=1}^m \sigma_i^k$ комп., а букет серед хаусдорфовий, це ізоморфізм:

$$X_k/X_{k-1} \cong \underbrace{S^k \vee \dots \vee S^k}_m.$$

лем. 6.5. Говорять, що топологічна пара (X, Y) (маємо типу $Y \subset X$ - підпростір) має властивість прозовнення законів, або є парною Тюринга, якщо $\forall f \in C(X, Z)$ (для дов. Z) $\forall$ законів $G \in C(Y \times I, Z)$ таких, що $G(\cdot, 0) = f|_Y$ $\exists$ законів $F \in C(X \times I, Z)$ така, що $F(\cdot, 0) = f$ і $F|_{Y \times I} = G$.

Р. 6.1. Якщо (X, Y) має вл. проз. зак., то $X/Y \overset{\substack{\text{і } Y \text{ стягнений} \\ \text{(поком. ел.)}}}{\sim} X$.

$\Rightarrow$ Стягнутість Y означає, що $\exists$ законів $G: Y \times I \rightarrow Y$ така, що $G(\cdot, 0) = \text{id}_Y$, $G(\cdot, 1) = y$ (пост. відобр.) для кожної $y \in Y$. Беручи повн. з включенням $Y \rightarrow X$, можемо вважати $G: Y \times I \rightarrow X$. Застосуємо до G та id_X власт. проз. зак.: $\exists F \in C(X \times I, X): F(\cdot, 0) = \text{id}_X, F|_{Y \times I} = G$ (тут $\text{id}_X|_Y = \text{id}_Y$), де $i: Y \rightarrow X$ - вхлук. Розглянемо $f := F(\cdot, 1) \in C(X, X)$. Оскільки $f|_Y = G(\cdot, 1) = y$, f адгорта-

задана ^{нен.} $f: X/Y \rightarrow X$, тогда $\tilde{f} \circ p = f: \text{grn.}$

$X \xrightarrow{f} X$
 $p \downarrow \nearrow \tilde{f}$
 $X/Y \xrightarrow{\tilde{f}}$ комут., где p - канон. проекция. $\forall s \in I$

$F(\cdot, s)|_Y = G(\cdot, s)|_Y: Y \rightarrow Y$, тогда $p \circ F(\cdot, s): X \rightarrow X/Y$ постеп. на Y (переводит Y в относительно p инвариант $p(Y)$). Факторизуем $\forall s$, откуда $\tilde{F}: X/Y \times I \rightarrow X/Y$ - нен. (почему?) и так же, что $\forall s$ грн.

т.е. $p \circ F(\cdot, s) = \tilde{F}(\cdot, s) \circ p$. Проверим (при $s=1$)

$\tilde{F}$ - гомотопия $\tilde{F}(\cdot, 0) = \text{id}_{X/Y}$ (гн. $\forall p(x) \in X/Y \tilde{F}(p(x), 0) = p(F(x, 0)) = p(x)$) и $\tilde{F}(\cdot, 1) = p \circ \tilde{f}$ ($\tilde{F}(p(x), 1) = p(F(x, 1)) = p(f(x)) = p(\tilde{f}(p(x))) \forall p(x) \in X/Y$). Т.е., $p \circ \tilde{f} \sim \text{id}_{X/Y}$. Откуда $\tilde{f} \circ p = f \sim \text{id}_X$ (в силу существования F), p и $\tilde{f}$ - бз зам. отображ.

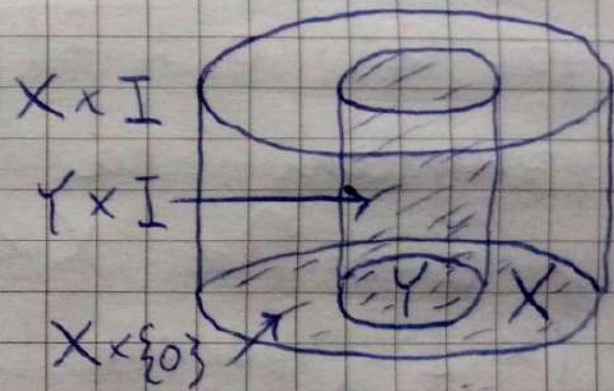
Пр. 6.2. Если X хаусдорфовый. Пара (X, Y) нас вл. проз. зам.
 $\Leftrightarrow X \times \{0\} \cup Y \times I$ - неперекр. $X \times I$.

⇒ Застосуємо вл. прог. 20.1. до

$$f = \text{id}_X \times \{0\} : X \rightarrow X \times \{0\} \cup Y \times I :$$

$$x \mapsto (x, 0) \quad \forall x \in X \text{ і виконена}$$

$$G : Y \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup Y \times I : (y, s) \mapsto (y, s)$$



$$\forall y \in Y, s \in I. \text{ Т.ч. } \exists F \in C(X \times I, X \times \{0\} \cup Y \times I) \text{ такє, що}$$

$$F(x, 0) = f(x) = (x, 0) \quad \forall x \in X \text{ і } F(y, s) = G(y, s) = (y, s)$$

$$\forall y \in Y, s \in I, \text{ тобто є ретрація } X \times I \text{ на } X \times \{0\} \cup Y \times I.$$

$$\underline{\Leftarrow} \text{ Якщо } X \times \{0\} \cup Y \times I \text{ - ретракт є хаусдорфровелу}$$

$$X \times I \text{ (} \Leftarrow \text{ з хаусд. } X, \text{ до додаток хаусд. - хаусд.) , то}$$

$$\text{він замкнений. Поді і його перетин з замкненою (до}$$

$$\text{додовнення } X \times [0, 1) \text{ відкрите) } X \times \{1\}, \text{ тобто } Y \times \{1\} -$$

$$\text{замкн. , зокр. , з } X \times \{1\} \Rightarrow [(x, 1) \mapsto x \text{ - зомео-зм } X \times \{1\}$$

$$\text{на } X] \Rightarrow Y \text{ замкнена в } X.$$

$$\text{Нехай } f \in C(X, Z) \text{ і } G \in C(Y \times I, Z) \text{ - довільні такі,}$$

що $G(\cdot, 0) = f|_Y$. Це означає, що $(x, 0) \mapsto f(x)$ є G -визначені на $(X \times \{0\}) \cap (Y \times I) = Y \times \{0\}$ непер. відкр. $y \in Z$. Оскільки $X \times \{0\}$ (до гомеом. $Y \times [0, 1]$ відкр.) і $Y \times I$ (гомеом. $(X \setminus Y) \times \{0\}$ відкр., до Y звичайн. $\neq X$) замкнені у $X \times \{0\} \cup Y \times I$ (тв. замкнене функц. покр.), відкр. $X \times \{0\} \cup Y \times I \rightarrow Z : (x, 0) \mapsto f(x), (y, s) \mapsto G(y, s)$ неперервне, а отже непер. і його композиція F з ретракцією: $F: X \times I \rightarrow Z, F(x, 0) = f(x) \forall x \in X$ і $F(y, s) = G(y, s) \forall y \in Y, s \in I$ за лев. ретракції. Тому це і є продовження гомотопії. $\triangle$

Рез. Пут заусдорфовість суттєва лише для $\leq$, причому насправді суттєва лише замкненість Y . Це тв. замкнутість вірний і без припущень про заусдорф. X або замкненість Y .

Th. 6.1 (Борсух). Будь-яка клітинна пара (X, Y) має
власність продовження комотів.

► В силу лем. Рч 6.2.1 хаусдорфовості, дост. показати,
що $X \times \{0\} \cup Y \times I$ — нетракт $X \times I$. Дск. $X \times I =$

$$= \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k \times I, \quad X \times \{0\} \cup Y \times I = \bigcup_{k=0}^{\infty} (X_k \times \{0\} \cup Y_k \times I), \text{ для цього}$$

дост. побудувати $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ ретракцію $X_k \times I \rightarrow X_k \times \{0\} \cup Y_k \times I$, що при $k \in \mathbb{N}$ узгоджується з попередньою на $X_{k-1} \times I$. Оскільки кінц. розбиття $\in$ функц. покриттям, це дає відображення $X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup Y \times I$, що буде неперервним, а отже ретракцією за побудовою. Дійсно, якщо про $f: X \rightarrow Z$ відомо, що воно непер. на $X_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$, то $\forall$ замкн.

$V \subset \mathbb{Z}$ $\forall$ клітини B^k з $\bigcup_{k \in \mathbb{N}}$ розбиття X , оск. $B^k \subset X_k$,
 $B^k \cap f^{-1}(V) = B^k \cap (X_k \cap f^{-1}(V))$ — замкнена, оск. $f|_{X_k}$ —
 перер. $\Rightarrow (f|_{X_k})^{-1}(V) = X_k \cap f^{-1}(V)$ замкн. Тоді $f^{-1}(V)$ замкн.
 за фундаментальністю, оск. f — перер. (Для $f: X \times I \rightarrow \mathbb{Z}$
 аналогічно. (взявши наочу, в тов. X_k , але $B^k \cap (X_k \cap f^{-1}(V))$ замкн. і в X , бо B^k замкн.)

Щоб побудувати для $k \in \mathbb{N}$ у узору (індуктивному)
 контексті ретракції $X_k \times I \rightarrow X_k \times \{0\} \cup Y_k \times I$, дост.
 побудувати ретракцію $X_k \times I \rightarrow X_k \times \{0\} \cup (Y_k \cup X_{k-1}) \times I$.
 Дійсно, даві можна взяти її какн. з ретракцією
 $X_{k-1} \times I \rightarrow X_{k-1} \times \{0\} \cup Y_{k-1} \times I$, що вже побудована (та id
 у решті точок), отримавши ретр. на $X_k \times \{0\} \cup (Y_k \cup Y_{k-1}) \times I$
 $\times I = X_k \times \{0\} \cup Y_k \times I$.

Нарешті, задаємо, що $X_k \times I = (X_{k-1} \cup \bigcup_{\alpha \in A_k} B_\alpha^k) \times I$,
 де $\{B_\alpha^k = \varphi_\alpha^k(D^k)\}_{\alpha \in A_k}$ — усі k -вимірні клітини X з

кар. вгрозбн. $\varphi_{\alpha}^k: \mathbb{D}^k \rightarrow \mathbb{B}_{\alpha}^k \quad \forall \alpha$. Вони гідяться на такі,
що входить до $Y_k \subset Y$ (позн. вгн. підмножини індексів
через $B_k \subset A_k$) і такі, вгнр. клітини яких $\notin Y$. Тл.ч.,
 $X_k \times I = (X_{k-1} \times I) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in B_k} \mathbb{B}_{\alpha}^k \times I \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in A_k \setminus B_k} \mathbb{B}_{\alpha}^k \times I \right)$.

Визначимо тепер ретракцію наст. чином:

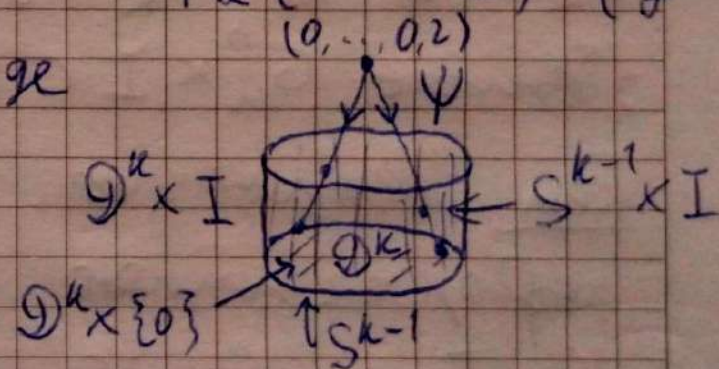
- на $(X_{k-1} \times I) \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A_k} \mathbb{B}_{\alpha}^k \times I \right)$ як ретракцію побудовану на $X_{k-1} \times I$
(у $X_{k-1} \times \{0\} \cup Y_{k-1} \times I$)

- на $\bigcup_{\alpha \in B_k} \mathbb{B}_{\alpha}^k \times I$ як тотожне вгрозбн. (у $Y_k \times I$).

- на кожній $\mathbb{B}_{\alpha}^k \times I = \hat{\varphi}_{\alpha}^k(\mathbb{D}^k \times I)$, де $\alpha \in A_k \setminus B_k$ і $\hat{\varphi}_{\alpha}^k =$
 $= \varphi_{\alpha}^k \times \text{id}_I: \mathbb{D}^k \times I \rightarrow \mathbb{B}_{\alpha}^k \times I$ - як тотожне на $\hat{\varphi}_{\alpha}^k(S^{k-1} \times I)$ (у
 $X_{k-1} \times I$) і $\hat{\varphi}_{\alpha}^k \circ \psi \circ \hat{\varphi}_{\alpha}^{k-1}$ на $\hat{\varphi}_{\alpha}^k(B^k \times I)$, де

$\psi: \mathbb{D}^k \times I \rightarrow \mathbb{D}^k \times \{0\} \times S^{k-1} \times I$ -

ретракція, яку можна побудувати
як, наприклад, обмеження на



$\mathbb{D}^k \times I$ уединеної проєкції з $(0, \dots, 0, z)$ для
вкладення $\mathbb{D}^k \times I$ у $\mathbb{R}^{k+1}$: $(x \in \mathbb{D}^k, s \in I) \mapsto (x^1, \dots, x^k, s)$
 $(x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k$

Це ретракція $\mathbb{D}_2^k \times I$ на $\hat{\Phi}_2^k(S^{k-1} \times I) = \Phi_2^k(S^{k-1}) \times I \subset X_{k-1} \times I$.

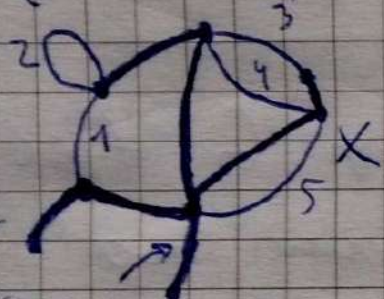
Ці відобр. узгоджені на $X_{k-1} \times I$ (чому?) а отже
ств. перен. відобр. - потрібну ретракцію.

Нарешті, при $k=0$ $X_0 \times I = \bigcup_{\lambda \in A_0} \mathbb{D}_2^0 \times I = \bigcup_{\lambda \in B_0} \mathbb{D}_2^0 \times I \cup \bigcup_{\lambda \in A_0 \setminus B_0} \mathbb{D}_2^0 \times I$, де $\mathbb{D}_2^0$ - 0-вим. клітини, тобто точки,
а топ. X_0 дискретна. Тим ретракція просто переводить
 $\mathbb{D}_2^0 \times I$ в $\mathbb{D}_2^0 \times \{0\}$ для $\lambda \in A_0 \setminus B_0$ (це відобр. у $X_0 \times \{0\}$) і
зберігає $\mathbb{D}_2^0 \times I \subset Y_0 \times I$ для $\lambda \in B_0$ (у $Y_0 \times I$). Δ

Рез. Ретракцію з цього введення можна упростити
гефотракційною (див. [Катчер, р. 15] або вище), отже
 $X \times I \sim X \times \{0\} \times Y \times I \quad \forall$ клім. пари (X, Y) .

Соч. 6.1. Якщо γ - стягнений клітинний підпростір у клім. гр-ті X , то $X/\gamma \sim X$.

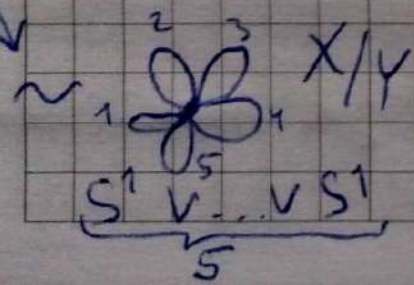
Ех. 6.14. Одновимірні клітинні простори утв. прилего-
ванням 1-вим. клітин (ребер) до диск. гр-ту X_0
(вершин) кілець, а отже є графом, де, на відм. від



максимальне
дерево γ

1-вим. симпл. гр-тів добуваються крапкі
ребра ($\bigcirc$) і ребра-петлі ($\bigcirc$). Оскільки
клітини, зокр. 1-вим., стягнені ($\cong B^k$),
стягненими є ребра, що не є петлями. За

переп. Соч. 6.1, кож. граф гом. екв. графу, де це ребро
стягнуте в точку. Крім того, $\forall$ скінч. (ліч.) зв'язного
графа X можна побудувати стягнену підграфію, що



містить усі вершини - максимальне (за
включенням) дерево γ . Оскільки підграф, то
взагалі не єдине! (Впр. 6.1)

оскільки всі вершини стягнутися в одну,
 кліт. підпростір, за помр. Соч. 6.1 $X \sim X/\gamma$, що є
 букетом кліт. Тому функц. група V зб'язною скінч.
 (насправді не мілохи) графа вілона (її ранг вики-
 рює "кількість незалежних циклів" у графі).

Ес. 6.15. Розглянемо розгортку, що схожа на розг.

$RP^2 = N_1^2$ з Ес. 6.10., але задана словом aa^{-1} :

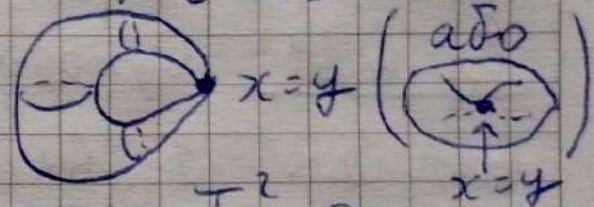
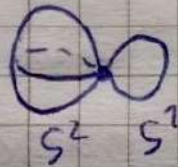
її факторизація є S^2 . Тл.ч., отримуємо
 іншу кліт. структуру (розбиття) на S^2 :

$\{B_x^0, B_y^0, B^1, B^2\}$, де B_x^0 і B_y^0 - 0-вим. кліт.,
 що вим. вершини x та y розгортки, а
 B^1 - її ребру a (B^2 вим. ап-но до Ес. 6.9-10.)

Приклаємо до $S_0^2 = \{B_x^0, B_y^0\}$ (точніше, $B_x^0 \cup B_y^0 = \{x, y\}$)

це одну 1-вим. клітинку $\tilde{B}^1$: S^2 $\tilde{B}^1$. Отримаємо
 кліт. гр-р X (сферу з "петелькою"),

у якій G^1 і $\tilde{G}^1$ є стягненими клім. підпросторами. Також
 за Соч. 6.1. $S^2 \vee S^1 \cong X/G^1 \sim X \sim X/\tilde{G}^1 \cong S^2/\{x, y\}$



$(S^2/\{x, y\}$ також каноничний факторизуюча тора T^2 за
 меридіаном: $T^2 \leftarrow S^1, T^2/S^1 \cong S^2/\{x, y\}$

