Продовжимо досліджувати метрику гіперболічного простору в моделі Пуанкаре:

$$H^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$$

$$g = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 \Leftrightarrow g_{ij} = \frac{1}{(x^n)^2} \delta_{ij} \quad \forall i,j$$

Діагональна і конф. еквівалентна E^n.

Далі обчислимо с. к.:

$$\Gamma^i_{ii} = \begin{cases} 0, & i = \overline{1,n-1} \\ -\frac{1}{x^n}, & i = n \end{cases}$$

$$\Gamma^i_{ij} = \Gamma^i_{ji} = \begin{cases} 0, & j = \overline{1,n-1} \\ -\frac{1}{x^n}, & j = n,\ i = \overline{1,n-1} \end{cases}$$

$$\Gamma^j_{ii} = \begin{cases} 0, & j = \overline{1,n-1} \\ \frac{1}{x^n}, & j = n,\ i = \overline{1,n-1} \end{cases}$$

$\Gamma^k_{ij} = 0$ при попарно різних $i, j, k = \overline{1,n}$

Формула для компонент тензора кривини:

$$R^i_{jke} = \frac{\partial \Gamma^i_{je}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^e} + \Gamma^m_{je}\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{me} \quad (*)$$

Звідси $R^i_{jke} = -R^i_{jek}$, зокрема, $R^i_{jkk} = 0$.

Інші симетрії виведено з симетрій компонент тензора Річчі: $R_{ijke} = g_{im} R^m_{jke}$.

Для діагональної м-ки т. ч. $R_{ijke} = g_{ii} R^i_{jke}$.

$R_{ijke} = -R_{ijek} \Leftrightarrow R^i_{jke} = -R^i_{jek}$ - вже бачили

$R_{ijke} = -R_{jike} \Leftrightarrow g_{ii} R^{i}_{jke} = -g_{jj} R^{j}_{ike}$.
Зокрема, $R^{i}_{ike} = 0$, бо $g_{ii} > 0$, $g_{jj} > 0$.
Якщо усі g_{ii} рівні (як у нас), тобто м-ка конф. екв-на E^n: $R^{i}_{jke} = -R^{j}_{ike}$.
$R_{ijke} = R_{keij} \Leftrightarrow g_{ii} R^{i}_{jke} = g_{kk} R^{k}_{eij}$.
Для конф. екв. E^n: $R^{i}_{jke} = R^{k}_{eij}$

У нас: якщо серед i, j, k, l немає n, у (*) ненульовими можуть бути лише доданки

$$\Gamma^{n}_{je}\Gamma^{i}_{nk} - \Gamma^{n}_{jk}\Gamma^{i}_{ne} = \begin{cases} \neq 0 \text{ лише при} \\ j = l < n,\ i = k < n \\ \text{або} \\ j = k < n,\ i = l < n \end{cases} = -\frac{1}{(x^n)^2}(\delta_{je}\delta_{ik} - \delta_{jk}\delta_{ie}) = \begin{cases} -\frac{1}{(x^n)^2}, & j = l \neq i = k \\ \frac{1}{(x^n)^2}, & j = k \neq i = l \\ 0 & \text{у інших випадках} \end{cases}$$

Т.ч., $R^{i}_{jij} = -R^{i}_{jji} = -\frac{1}{(x^n)^2}$ $\forall\ i \neq j = \overline{1, n-1}$
і 0 для інших $i, j, k, l = \overline{1, n-1}$. Тензор R''^{i}_{jke}
Дімана: $R_{ijke} = g_{ii} R^{i}_{jke} = \frac{1}{(x^n)^4}(\delta_{je}\delta_{ik} - \delta_{jk}\delta_{ie}) = -(g_{je}g_{ik} - g_{jk}g_{ie})$ $\forall\ i, j, k, l = \overline{1, n-1}$.
Зокрема, виконуються усі наведені вище симетрії.

Якщо один з індексів дорівнює n, то

згідно з симетріями маємо:

$R^n_{nnn} = R^n_{nni} = R^n_{ni n} = R^n_{jnn} = R^j_{nnn} = 0 \quad \forall i,j = \overline{1,n-1}$

$(i\ R_{nnnn} = R_{nnni} = R_{nnin} = R_{njnn} = R_{jnnn} = 0)$.

$\forall\ i,j = \overline{1,n-1}$:

$R^i_{njn} \left(= -R^n_{ijn} = -R^i_{nnj} = R^n_{inj} = \dots\right) =$

$= \frac{\partial \Gamma^i_{nn}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^i_{nj}}{\partial x^n} + \Gamma^m_{nn}\Gamma^i_{mj} - \Gamma^m_{nj}\Gamma^i_{mn} = 0 -$

($\Gamma^i_{nn} = 0$ при $m < n$; $\Gamma^m_{nj} = 0$ при $m \neq i$)

$- \frac{\partial}{\partial x^n}\left(-\frac{1}{x^n}\delta_{ij}\right) + \Gamma^n_{nn}\Gamma^i_{nj} - \Gamma^i_{nj}\Gamma^i_{in} =$

$= \delta_{ij}\left(-\frac{1}{(x^n)^2} + \frac{1}{(x^n)^2} - \frac{1}{(x^n)^2}\right) = -\frac{1}{(x^n)^2}\delta_{ij}$

Тому $R_{injn}\left(= -R_{nijn} = \dots\right) = g_{ii}R^i_{njn} = -\frac{1}{(x^n)^4}\delta_{ij} =$

$= -\left(g_{ij}g_{nn} - g_{in}g_{jn}\right)$.

($g_{nn} = 1/(x^n)^2$; $g_{in} = 0$; $g_{jn} = 0$)

$\forall\ i,j,k = \overline{1,n-1}$:

$R^i_{njk}\left(= -R^n_{ijk} = -R^i_{nikj} = R^n_{ikj} = R^j_{kin} = \dots\right) =$

$= \frac{\partial \Gamma^i_{nk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^i_{nj}}{\partial x^k} + \Gamma^m_{nk}\Gamma^i_{mj} - \Gamma^m_{nj}\Gamma^i_{mk} = 0 - 0 +$

$+ \Gamma^k_{nk}\Gamma^i_{kj} - \Gamma^j_{nj}\Gamma^i_{jk} = 0$, тому й

($\Gamma^i_{kj} = 0$; $\Gamma^i_{jk} = 0$)

$R_{injk}\left(= -R_{nijk} = \dots\right) = g_{ii}R^i_{njk} = 0 = -\left(g_{ij}g_{nk} - g_{ik}g_{nj}\right)$ ($g_{nk} = 0$; $g_{nj} = 0$)

(аналогічна загальна формула для R_{ijke}: $-\frac{1}{(x^n)^2}(\delta_{ik}\delta_{je} - \delta_{ie}\delta_{jk})$)

Т.ч. $R_{ijke} = -\left(g_{ik}g_{je} - g_{ie}g_{jk}\right)\ \forall\ i,j,k,e = \overline{1,n}$, тобто $R_{ijij}\left(= -R_{jiij} = \dots\right) = -\frac{1}{(x^n)^4}$

$\forall\ i \neq j$, решта компонент нульові.

Секційна кривина у напрямку площини G, натягнутої на $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (або поля площин, якщо $\{u^i\}$, $\{v^i\}$ - ф-ції):

$$K(G) = \frac{R_{ijkl} u^i v^j u^k v^l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) u^i v^j u^k v^l}$$

В силу ф-ли для R_{ijkl}, у нас це завжди -1, як і повинно бути.

Якщо потрібно знайти сек. кр. у напр. площин, породжених $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial x^j}$ $(i \neq j)$, $(u^1, \dots, u^n) = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$, $(v^1, \dots, v^n) = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0)$, тому $K(G) = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj} - (g_{ij})^2}$, і треба знайти лише R_{ijij}.