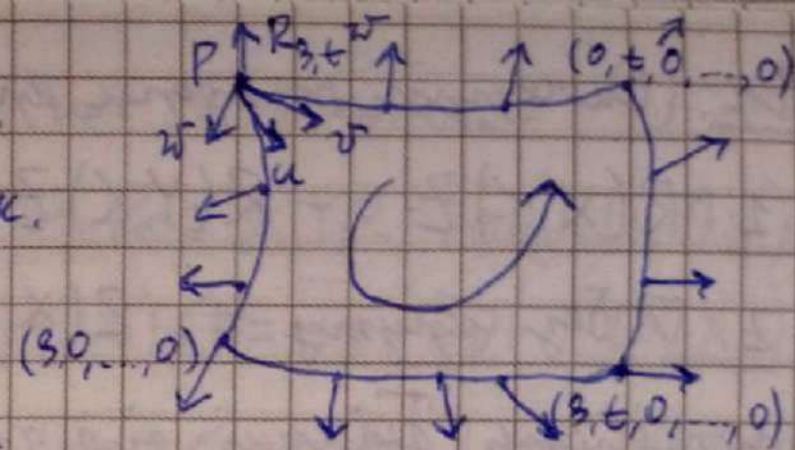


Лем. (Геометрический смысл R). Пусть $p \in M$,
 $u, v \in T_p M$ - лин. независимы, $i(x^1, \dots, x^n)$ - лок.

координаты на окрестности p таковы, что p имеет
 коорд. $(0, \dots, 0)$, $u = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p$, $v = \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p$. По-



значению через $P_{a,b}$ оператор параллельного переноса вдоль
 коорд. линии x^1 з $x^1=a$ в $x^1=b$ (не лин. видообр. глв. выше), через
 $Q_{a,b}$ - он. паралл. перен. вдоль коорд. линии x^2 з $x^2=a$ в $x^2=b$, и

$R_{3,t} := Q_{t,0} \circ P_{3,0} \circ Q_{0,t} \circ P_{0,3}$ для гом. матриц $3, t$. Тогда

$$R_p(u, v)w = \lim_{3, t \rightarrow 0} \frac{1}{3t} (w - R_{3,t}w) \quad \forall w \in T_p M.$$

(Вопр.). Все одна мотивация для
 введенная R (в римановом пространстве) - ее ф-ла II вариаций гравитационных полей.

Лем. Карацасево, что нов. присigna м.н. R и паралл. в.н. X - ее

$Y, Z, W \mapsto (\nabla_X R)(Y, Z)W = \nabla_X (R(Y, Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W -$
 $- R(Y, Z)\nabla_X W$. Пусть $k \geq 4$. При этом $\nabla_X R$ - $(k-4)$ -м. $(3,1)$ -тенз. н.

Pr. (Свойства тензора кривизны). $\forall$ в. полей X, Y, Z, W (тип. значений):

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$.

2. ∇ без кручения $\Rightarrow R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (первая тождество Бианки, а то второе Риччи).

3. ∇ без кручения $\Rightarrow (\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W + (\nabla_Z R)(X, Y)W = 0$.
(группа тождество Бианки).

4. ∇ согласен с римановым метрическим g на $M \Rightarrow g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$.

5. ∇ - риманова зв. рим. м-ка g на $M \Rightarrow g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$.

2. Визначає з деб. і кососиметричності $[.,.]$.

$$R(X, Y)Z = \underline{\nabla_X \nabla_Y Z} - \underline{\nabla_Y \nabla_X Z} - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

$$R(Y, Z)X = \underline{\nabla_Y \nabla_Z X} - \underline{\nabla_Z \nabla_Y X} - \nabla_{[Y, Z]} X,$$

$$R(Z, X)Y = \underline{\nabla_Z \nabla_X Y} - \underline{\nabla_X \nabla_Z Y} - \nabla_{[Z, X]} Y$$

Додаючи та враховуючи $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (∇ -без скрутки),

отримуємо $\underline{\nabla_X [Y, Z]} - \nabla_{[Y, Z]} X + \underline{\nabla_Y [Z, X]} - \nabla_{[Z, X]} Y + \underline{\nabla_Z [X, Y]} - \nabla_{[X, Y]} Z = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ за тем Якобі.

3. Доведемо для випадку ріманової зв-сті ∇ (Задальний - див.)

Впр. 1.1.1.

Дя, $\forall$ поля X полізна $\nabla_X R$ - (3,1)-тенз. поле, $\forall p \in M$ визначено його значення у p - (3,1)-тензор $(\nabla_X R)_p$. Ан-но до ков. диференціювання вект полів, $\forall p \in M$ можна визначити ков. диференціювання тенз полів у p що вектору $\vec{v} \in T_p M$ і полю (в нашому випадку) R стають у вигл. (3,1)-тензор $\nabla_{\vec{v}} R$ у p , при цьому

$\nabla_{X_p} R = (\nabla_X R)_p \quad \forall$ ~~поле~~ поле X (Вектр.) для операція, зокрема, лінійна за ∇ . В силу цього і лінійності $(\nabla_X R)_p$ за його трьома аргументами, потім існує достатньо перевірити $\forall p \in M$ для ел-тів деякого базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ нр-ну $T_p M$. Подмо дост. перевірити, що

$$(\nabla_{e_i} R)(e_j, e_k)e_i + (\nabla_{e_j} R)(e_k, e_i)e_j + (\nabla_{e_k} R)(e_i, e_j)e_k = 0 \quad \forall i, j, k = \overline{1, n}$$

Лем. Нехай (M, g) - рим. мн. з римановою зв-стю ∇ . $\forall p \in M$: базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ нр-ну $T_p M \exists$ відкр. $U \ni p$ і поля $\{E_i \in \mathbb{R}^{k-1}(U)\}_{i=1}^n$ такі, що $\{(E_i)_q\}_{i=1}^n$ - базис $T_q M \quad \forall q \in U, (E_i)_p = e_i, (\nabla_{E_i} E_j)_p = 0$ і $[E_i, E_j] = 0 \quad \forall i, j = \overline{1, n}$ (т.зв. лок. геодезичний базис).

► Нехай U - норм. окіл p , тоді $\exp_p : \exp_p^{-1}(U) \rightarrow U$ - диффео-зм, а $(x^1, \dots, x^n)$ - норм. координата на U , що відн. базису $\{e_i\}_{i=1}^n$, тоді якщо для $q \in U \quad \exp_p^{-1}(q) = x^i e_i$, то $(x^1, \dots, x^n)$ - коорд. точки q . Покладемо $E_i := \frac{\partial}{\partial x^i}, i = \overline{1, n}$. Поді це дійсно базис у касат. точці $U, [E_i, E_j] = [\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0 \quad \forall i, j. \forall v = v^i e_i \in$

$\in \exp_p^{-1}(U)$ $\gamma_v(t) := \exp_p(t\sigma)$ — кривая, соединяющая p с $\gamma_v(1) = v$.
 заданная $t \mapsto (t\sigma^1, \dots, t\sigma^n)$. При $t=0$ имеем $\gamma_v(0) = p$ (с координатами $(0, \dots, 0)$) и $\dot{\gamma}_v = \gamma'_v(0) = \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, поэтому $e_i = \gamma'_v(0) = \frac{\partial}{\partial x^i} = (E_i)_p \quad \forall i$.
 Остаток для нас очевиден: $|\dot{\gamma}_v| = |\sigma|$ постоянна, вектор $\dot{\gamma}_v$ — касательный к кривой.

$$0 + \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t)) \sigma^i \sigma^j = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

где $\{\Gamma_{ij}^k\}$ — с. к. ∇ в точке p . При $t=0$ имеем $\forall k \in \overline{1, n}$ и $\forall (\sigma^1, \dots, \sigma^n) \in T_p M$ — вектор $\dot{\gamma}_v$ в $T_p M$ $\Gamma_{ij}^k(p) \sigma^i \sigma^j = 0$, поэтому $\Gamma_{ij}^k(p) = 0, \quad \forall i, j, k = \overline{1, n}$,
 т.е. $(\nabla_{E_i} E_j)_p = \Gamma_{ij}^k(p) (E_k)_p = 0 \quad \forall i, j$. Δ (лем.) (до $\Gamma_{ij}^k(p) = \Gamma_{ji}^k(p)$ см. лем.)

Остаток проясняется: E_i — векторы e_i для $i = \overline{1, n}$ в лем. За означением $\forall i, j, k, l = \overline{1, n}$ имеем:

$$\begin{aligned}
 (\nabla_{E_i} R)(e_j, e_k) e_l &= ((\nabla_{E_i} R)(E_j, E_k) E_l)_p = (\nabla_{E_i} (R(E_j, E_k) E_l))_p \\
 &= R_p((\nabla_{E_i} E_j)_p, e_k) e_l - R_p(e_j, (\nabla_{E_i} E_k)_p) e_l - R_p(e_j, e_k) (\nabla_{E_i} E_l)_p = \\
 &= (\nabla_{E_i} (\nabla_{E_j} \nabla_{E_k} E_l - \nabla_{E_k} \nabla_{E_j} E_l - \nabla_{[E_j, E_k]} E_l))_p \quad \text{в силу лем.} \\
 \text{полю } E_i. \quad \text{П.ч., представляя индексы, получаем:}
 \end{aligned}$$

$$(\nabla_{E_i} R)(E_j, E_k) E_l = (\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} \nabla_{E_k} E_l - \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} \nabla_{E_j} E_l)_p,$$

$$(\nabla_{E_j} R)(E_k, E_i) E_l = (\nabla_{E_j} \nabla_{E_k} \nabla_{E_i} E_l - \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} E_l)_p,$$

$$(\nabla_{E_k} R)(E_i, E_j) E_l = (\nabla_{E_k} \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_l - \nabla_{E_k} \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_l)_p.$$

Додаючи ці вирази, з дов. R і з умов. $[E_i, E_j] = 0 \forall i, j$, маємо:

$$\begin{aligned} & (R(E_i, E_j)(\nabla_{E_k} E_l) + R(E_j, E_k)(\nabla_{E_i} E_l) + R(E_k, E_i)(\nabla_{E_j} E_l))_p = \\ & = R_p(E_i, E_j) \underbrace{(\nabla_{E_k} E_l)_p}_{=0} + R_p(E_j, E_k) \underbrace{(\nabla_{E_i} E_l)_p}_{=0} + R_p(E_k, E_i) \underbrace{(\nabla_{E_j} E_l)_p}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

знову не за власт. E_i , що й потрібно.

Впр. Показати, що можна побудувати аналог експоненціального виразу і довести лем. і для Керіманової ∇ ^(дея сумнів: де це симметрично?) що даєть з у заг. випад.

9. В силу узгодженості з g , $\forall$ полів X, Y, Z маємо

$$X(Y(g(Z, Z))) = X(Zg(\nabla_Y Z, Z)) = Z(g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z)).$$

$$\text{Ан-но, } Y(X(g(Z, Z))) = Z(g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z)),$$

$$[X, Y](g(Z, Z)) = Zg(\nabla_{[X, Y]} Z, Z).$$

Визначимо другу і третю рівність біг релакси, за дов. [1, 3] отр.:

$0 = 2g(R(X, Y)Z, Z)$. Зрозуміло представимо: $\forall$ нрив X, Y, Z, W

може $0 = g(R(X, Y)(Z+W), Z+W) = \underbrace{g(R(X, Y)Z, Z)}_{=0} + g(R(X, Y)Z, W) +$
 $+ g(R(X, Y)W, Z) + \underbrace{g(R(X, Y)W, W)}_{=0}$, звідки маємо наслідок.

5. 3. 2. $\forall$ нрив X, Y, Z, W :

$$\underline{g(R(X, Y)Z, W) + g(R(Y, Z)X, W) + g(R(Z, X)Y, W) = 0}, \quad (1)$$

$$g(R(Y, Z)W, X) + \underline{g(R(Z, W)Y, X) + g(R(W, Y)Z, X) = 0}, \quad (2)$$

$$\underline{g(R(Z, W)X, Y) + g(R(W, X)Z, Y) + g(R(X, Z)W, Y) = 0}, \quad (3)$$

$$g(R(W, X)Y, Z) + \underline{g(R(X, Y)W, Z) + g(R(Y, W)X, Z) = 0}. \quad (4)$$

Обчислюючи $(1) + (2) - (3) - (4)$ з урах. 1. і 4., отримуюмо наслідок. $\triangle$

Лем. З устоо вышываюць амаючыя самерныі (улік 3.) манэра $R_p \forall p \in M$.

Лем. Для фіксаваных $X \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$, $Y \in \mathcal{X}^{k-2}(M)$ выодн $R(\cdot, Y)X: \mathcal{X}^{k-2}(M) \rightarrow \mathcal{X}^{k-3}(M)$

(мамо $Z \mapsto R(Z, Y)X$) задае $(1,1)$ -манэрнае поле (поле аператараў) з

власн. R вышывае, што насправдзі ёно $(k-3)$ -м., ака і доо снэг.

def. Тензором Річчі адр. зв'язності ∇ на M зветься

$$\text{Ric} : \mathcal{X}^{k-1}(M) \times \mathcal{X}^{k-2}(M) \rightarrow \mathcal{C}^{k-3}(M) : X, Y \mapsto \text{Ric}(X, Y) := \text{Tr}(R(\cdot, Y)X).$$

Рем. Тоді $\forall p \in M$ $\text{Ric}(X, Y)(p) = \text{Tr}((R(\cdot, Y)X)_p) = \text{Tr}(R_p(\cdot, Y_p)X_p) =$
 $= \sum_{i=1}^n \langle R_p(e_i, Y_p)X_p, e_i \rangle \quad \forall$ стандартній базис $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $T_p M$ (на-

приклад, g_p для деякої рим. м-ки g на M) і $\{e_i\}_{i=1}^n$ - ортонормовано відносно $\text{вигн. } \langle \cdot, \cdot \rangle$ базиса $T_p M$.

Р. Ric - $(k-3)$ -значна 2-форма на M , симетрична, якщо ∇ -рим. зв'язність деякої рим. м-ки на M .

$\triangleright$ $(k-3)$ -значність та лінійність над $\mathcal{C}^{k-3}(M)$ випливають з def., властивостей R та лінійності сліда у $\forall$ точці (див. маніф. локальну ф-лу тисня). Якщо ∇ -рим. зв. g , то в позн. вище $\forall X, Y$:

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y)(p) &= \sum_{i=1}^n g_p(R_p(e_i, Y_p)X_p, e_i) = \left[\begin{smallmatrix} \text{сл. } \tilde{Y} \\ \text{на } R_p \end{smallmatrix} \right] = \sum_{i=1}^n g_p(R_p(X_p, e_i)e_i, Y_p) = \\ &= \left[\begin{smallmatrix} \text{сл. } \tilde{X} \\ \text{на } R_p \end{smallmatrix} \right] = \sum_{i=1}^n g_p(R_p(e_i, X_p)Y_p, e_i) = \text{Ric}(Y, X)(p) \quad \forall p \in M. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Рем. У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U : $Ric|_U = Ric_{ij} dx^i \otimes dx^j (= Ric_{ij} dx^i dx^j)$
 у симетричному вигляді, де $Ric_{ij} = Ric(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \text{Tr}(R(\cdot, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^i}) =$
 $= \text{Tr}(\frac{\partial}{\partial x^k} \mapsto R^k_{ikj} \frac{\partial}{\partial x^k}) = R^k_{ikj}$ (зворотка R за індексом зверху і другим знизу)

Зокрема, ці коефіцієнти (а отже і Ric) дійсно $(k-3)$ -и.

Рем. Дано всього розкладаємо римановий (M, g) (k -м., де $k \geq 3$ або $k \geq 4$ за необхідності) і його рим. зв'язність ∇ .

вв. Тензори кривин та Річчі риманової n -ки g (або рим. многовиду (M, g)) зветься тензори кривин та Річчі відповідно рим. зв'язності g . Тензор Рімана g (або (M, g)) зветься 4-форма $R: \mathcal{H}^{k-3}(M) \times \mathcal{H}^{k-3}(M) \times \mathcal{H}^{k-3}(M) \times \mathcal{H}^{k-3}(M) \rightarrow \mathbb{C}^{k-3}(M): X, Y, Z, W \mapsto R(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W)$.

Рем. З властивостей тенз. кривини і g , це дійсно 4-форма на M , $(k-3)$ -мадка (що отримана з тенз. кривини спаданням індекса).
 Властивості її симетрії вил. з властив. симетрії тенз. кривини (1, 2, 4, 5). Локально у $(x^1, \dots, x^n)$ на U цей тензор (форма) задається:

$$R_{ijkl} := R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g\left(R_{jkl}^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g_{im} R_{jkl}^m \quad \forall i, j, k, l = \overline{1, n},$$

де $g|_U = g_{ij} dx^i dx^j$. Властивості тензора R такі:

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk} \quad (1), \quad R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0 \quad (2),$$

$$R_{ijkl} = -R_{jilk} \quad (4) \quad \text{і} \quad R_{ijkl} = R_{klij} \quad (5) \quad \forall i, j, k, l = \overline{1, n}.$$

Впр. $\forall$ n тензор R задається $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ лінійно незалежними компонентами.

Ек. При $n=2$ це, наприклад, R_{1212} .

При $n=3$: $R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{1223}, R_{1323}$.

Впр. Перевірити, що при $n=3$ R однозначно визначений тензор Річчі (що тенс має 6 "значущих" компонент).

def Скривинного кривого річч. кн. (M, g) у $p \in M$ у напрямку площини (тобто 2-вимірному векторному підпростору) $\mathcal{B} \subset T_p M$

зветься $K_p(\mathcal{B}) := \frac{g_p(R_p(v, w)w, v)}{g_p(v, v)g_p(w, w) - g_p(v, w)^2},$

де $\{v, w\}$ - якийсь базис $\mathcal{B}$ (тобто $v, w \in \mathcal{B}$ - лінійно незалежні, $\mathcal{B} = \text{span}\{v, w\}$).

Реш $K_P(B)$ однозначно корректно, то есть не зависит от выбора v и w .

► Пусть $\{\tilde{v}, \tilde{w}\}$ — новый базис B : $\tilde{v} = \alpha v + \beta w$, $\tilde{w} = \gamma v + \delta w$.

Положим $C := \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ — матрица перехода между старым базисом, точнее,

$0 \neq \det C = \alpha\delta - \beta\gamma$. В числителе за власт. 1 и 4 симметрии:

$$\begin{aligned} g_P(R_P(\tilde{v}, \tilde{w}) | \tilde{w}, \tilde{v}) &= g_P(R_P(\alpha v + \beta w, \gamma v + \delta w)(\gamma v + \delta w), \alpha v + \beta w) = \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\delta - \beta\gamma) g_P(R_P(v, w) | w, v) \end{aligned}$$

В знаменателе строго вычислим n -ый определитель $g_P|_B$ в базисах $\{v, w\} : \{\tilde{v}, \tilde{w}\}$ ^(по той же причине, что и раньше, > 0) sign . Пусть же G_1 и $\tilde{G}_1$ — то $\tilde{G}_1 = C^T G_1 C \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \det \tilde{G}_1 &= (\det C)^2 \det G_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \det G_1. (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \text{ сокращается, отсюда} \\ \frac{g_P(R_P(\tilde{v}, \tilde{w}) | \tilde{w}, \tilde{v})}{g_P(\tilde{v}, \tilde{v}) g_P(\tilde{w}, \tilde{w}) - g_P(\tilde{v}, \tilde{w})^2} &= \frac{g_P(R_P(v, w) | w, v)}{g_P(v, v) g_P(w, w) - g_P(v, w)^2}. \triangle \end{aligned}$$

Реш Направлен R_P однозначно определен с помощью кривизны B_P и $\forall P \in M$ (Вопр. 2.50 гл. 1. п. 1.1).

Реш Пусть $\dim M = 2$ тогда E_P — $B = \text{Tr } M$, тогда sign

просто про (гауссову) кривину K у точці, що є φ -фіксо на M .

Локально нехай (у позначеннях як вище) $\bar{v} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\bar{w} = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

$$K_p(\bar{v}) = \frac{R_{ijkl} v^i w^j v^k w^l}{(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) v^i w^j v^k w^l} \quad \leftarrow \begin{pmatrix} \text{mya } R_{ijkl}(p), \\ g_{ij}(p) \end{pmatrix}$$

При $n=2$, взявши $v = \frac{\partial}{\partial x^1}$, $w = \frac{\partial}{\partial x^2}$, маємо $K(p) = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

Рем (внутрішній аналог кривини) Нехай $p \in M$, u - якийсь нормальний один p , $B \subset T_p M$ - площина. Тоді $\exp_p: \varphi_p^{-1}(u) \cap B \rightarrow M$ задає вкладену поверхню (двовимірний підпростір) у M , що містить p (і з додільною площиною B). Вона $\Rightarrow$ (її образ) складається з геодезичних (точніше, їхніх носіїв), що випускаються з p у напрямках векторів з B (зокрема, вона геодезична в p , тобто її II функц. форма у p нульова - за лем. Гаусса). Тоді гауссова кривина цієї поверхні у p (відп. I функц. форми) дорівнює $K_p(B)$ (Впр.).

def. Кривинною Риманової рим. мн. (M, g) у $p \in M$ у напрямку вектора $0 \neq v \in T_p M$ зветься $Ric_p(v) := \frac{Ric_p(v, v)}{g_p(v, v)} \leftarrow (g_p(v, v) > 0 \text{ для } v \neq 0)$

Rem. Подто вона залежить лише від напрямку v : $Ric_p(v) = Ric_p(\lambda v)$ $\forall \lambda \neq 0$. Іншими словами, у p це q -ція від напрямку (як K_p - від площин), подто на відп. представному просторі $PT_p M \rightarrow \mathbb{R}$.

З компактності пр. простору і очевидної неперервності випливає, що Ric_p приймає найменше і найбільше значення. Впр. Це вірно також для K_p ,

Інколи пр. Риманові ділять на $n-1$ (тоді вона, зокрема, дорівнює K_0 для кривавида постійної секц. кривави K_0 - гув. пачене).

Впр. Як пов'язані кривини Римані та секц. кривини у p ?

def. Скалярною кривинною рим. мн. (M, g) у $p \in M$ зветься слід тензора Римані у p відп. скалярною добутку g_p : $S(p) := \text{Tr}_{g_p} Ric_p$.

Rem. Подто $S(p) = \sum_{i=1}^n Ric_p(e_i, e_i) = \sum_{i,j=1}^n g_p(R_p(e_i, e_j) e_j, e_i)$ для деякого ортонорм. відп. g_p базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ пр. пр. $T_p M$.

Зауважимо, що $S(p) = \sum_{i \neq j} K_p(B; i, j)$ за p -ною вище, де $B; i, j := \text{span} \{e_i, e_j\}$. За дов. і власт. матриці Ric , $S \in C^{k-3}(M)$. (функція на M). Її інтеграл менше порівнюють, ділячи на $n(n-1)$, щоб була дов. k_0 для многовиду пост. секц. кр. k_0 (див. вище).

Впр. Перевірити (наприклад, аналогічно до середньої кривини інер. поверхні з курсу "Геом. підмножини", що S коректно визн. (не залежить від вибору $\{e_i\}_{i=1}^n$) і що локально $S = g^{ij} Ric_{ij}$ (у позн. як вище).

дов. Римановий мн. (M, g) зветься многовидом Ейнштейна (ейнштейновим), якщо $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ таке, що $Ric = \lambda g$.

Реш. У цьому випадку $\forall p \in M \quad S(p) = \sum_{i=1}^n Ric_p(e_i, e_i) = \lambda \sum_{i=1}^n g_p(e_i, e_i) = \lambda n$, тому S постійна і $\lambda = \frac{S}{n}$.

Ек. Якщо зв'язність ∇ плоска, то $\forall p \in M$ у деяких лок. коорд. в околі p $\Gamma_{ij}^k = 0$. Тому тенз. кривини (і Рим.) нульові. Зокрема, для плоск. рим. мн. (у м.ч. E^n) всі кривини нульові, зокрема вони єйнштейнівські.

Впр. Показати, що ~~якщо~~ ~~тенз. кривини~~ ^{якщо} тенз. кривини і скрутку ∇ нульові, то ∇ плоска.

Многовиди постійної секційної кривини (I)

def Говорять, що $(V-m, \text{де } l \geq 3 \text{ і } n\text{-вимірний, де } n \geq 2)$ рівновагий многовид (M, g) має постійну (секційну) кривину $k \in \mathbb{R}$, якщо $\forall p \in M \ \forall$ площини $\sigma \subset T_p M \quad K_p(\sigma) = k$. Якщо при цьому (M, g) повний і зв'язний, то він зветься простором постійної (секційної) кривини k (просторово формою). Воп. Далі спорожнемо ПСК.

Ex. 1. $\mathbb{E}^n$ і всі лок. ізометричні площі (пласки) мають ПСК 0 див. вище.
2. Для $k > 0$ стандартна сфера $S_{\frac{1}{\sqrt{k}}}^n$ (тобто $\{x \mid |x| = \frac{1}{\sqrt{k}}\}$) у $\mathbb{E}^{n+1}$ з I функ. формою має ПСК k . Простіше за все це перевірити за дов. рівняння Гаусса (див. курс "Геометрія підмноговидів"):

II функ. форма дорівнює $\sigma = \pm \sqrt{k} g$, тобто $\forall p \in S^n \ \forall \sigma \in T_p S^n, \sigma = \text{span}\{v, w\}$:

$$K_p(\sigma) = \frac{g_p(R_p(v, w)w, v)}{g_p(v, v)g_p(w, w) - g_p(v, w)^2} = \frac{g_p(v, v)g_p(w, w) - g_p(v, w)^2}{g_p(v, v)g_p(v, w) - g_p(v, w)^2} = k.$$

Вопр. Перевірити, обчислюючи секц. кривину у плоскостях лок. коорд. наприклад, з стереографічними, що встановлюють лок. коорд. ел-ти з $\mathbb{E}^n$.

Впр. Нехай (M, g) , (N, h) - річ. мн., $F: M \rightarrow N$ - ізометрія. Нехай R_g, R_h метр. кривини g і h відповідно. Тоді $\forall p \in M \forall u, v, w \in T_p M$

$$d_p F((R_g)_p(u, v)w) = (R_h)_{F(p)}(d_p F(u), d_p F(v))d_p F(w).$$

Сформулювати ан-лі тв. для метрич. Римані та Римана. Вивести, що F зберігає сек. кривину: $\forall p \in M \forall$ мн. $\sigma \subset T_p M$ $K_p(\sigma) = K_{F(p)}(d_p F(\sigma))$ ($d_p F$ - лін. ізоморфізм, тому переводить площину в мн.), і ан-но для кр. Римані та скалярної.

Рем. Отже, $\forall (M, g)$, що лок. ізометричний $S_{\frac{1}{\sqrt{k}}}^n$, має ПСК k : застосовуємо поперед. Впр. в околі $\forall$ точки. І ан-но у наступному прикладі для $k < 0$. Також ці приклади демонструють, що кривини не збер. при конформних евб-стях: ці простори лок. конф. еkv. E^n

З. Для $k < 0$: $H_k^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ з $g = -\frac{1}{k} \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$ має ПСК k (Впр. Перевірити безпосередньо).

Рем. Все, що було вище встановлено для $S^n = S_1^n \subset H^n = H_{-1}^n$

Вірно й у цих троях зазначених випадках: опис геометричних, повнова...
 Її перелічені простори одновимірні (сфери - бо $n \geq 2$), зокрема зб'язні. Ми
 далі позначатимемо їх всі через $M^n(k)$:

$$M^n(k) := \begin{cases} \mathbb{E}^n, & k=0 \\ S^1_{\frac{1}{\sqrt{k}}}, & k>0 \\ H^1_k, & k<0 \end{cases}$$

Інакше їх зовуть ^{n-вимірними} модельними просторами пост. (серед.) кривизни k .
 з тензором кривизни R .

Лем. 1. Кривина (M, g) -рим. кривизни R на $T_p M$ $K_p(B) = k \Leftrightarrow \forall u, v, w \in T_p M$

$$R_p(u, v)w = k(g_p(v, w)u - g_p(u, w)v).$$

Лем. 2. (M, g) -пск $k \Leftrightarrow \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}^{R-3}(M)$

$$R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y).$$

Лем. 3. Зокрема, тоді для (M, g) пск $k \forall$ в.а. $X, Y \forall p \in M$ (у позм. експрессіях):

$$\begin{aligned} Ric_p(X_p, Y_p) &= \sum_{i=1}^n g_p(R_p(e_i, X_p)Y_p, e_i) = k \left(\sum_{i=1}^n g_p(X_p, Y_p) g_p(e_i, e_i) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^n g_p(X_p, e_i) g_p(Y_p, e_i) \right) = k(n g_p(X_p, Y_p) - g_p(X_p, Y_p)) = k(n-1) g_p(X_p, Y_p). \end{aligned}$$

Соч. Усі многовиди ПСК є симплексними.

Вопр. При $n \leq 3$ V є симплексним n -вим. многовидом - ПСК.

Реш. Зокрема, усі кривини Річчі на ПСК k дорівнюють $(n-1)k$,
а скалярна кривина $S = \text{Tr}_g Ric = n(n-1)k$.

$\Rightarrow (P_c) \Leftarrow$ Для даної P $\exists$ 1. або $\forall P \in M$ $\exists$ 2. $\forall$ н. $\mathcal{B} = \text{span}\{v, w\} \subset T_P M$:

$$K_P(\mathcal{B}) = \frac{g_P(R_P(v, w)w, v)}{g_P(v, v)g_P(w, w) - g_P(v, w)^2} = \frac{g_P(k(g_P(w, w)v - g_P(v, w)w), v)}{g_P(v, v)g_P(w, w) - g_P(v, w)^2} = k.$$

$\Rightarrow$ Доведемо для 2., 1. доводиться довести так же (ми утворюємо 1 $\Rightarrow$ 2).

Для $\forall$ рим. многовида з власт. симетрії R випливає, що $\forall X, Y, Z$

$$g(R(X, Y)Y, Z) = \frac{1}{2}(g(R(X+Z, Y)Y, X+Z) - g(R(X, Y)Y, X) - g(R(Z, Y)Y, Z)) \Leftrightarrow$$

Для ПСК k за лев. сенс. кривини:

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2}(g(X+Z, X+Z)g(Y, Y) - g(X+Z, Y)^2 - g(X, X)g(Y, Y) + g(X, Y)^2 - g(Z, Z)g(Y, Y) + g(Z, Y)^2) = k(g(X, Z)g(Y, Y) - g(X, Y)g(Z, Y)) = kg(g(Y, Y)X - g(X, Y)Y, Z)$$

Оскільки Z -довільне, це означає, що $R(X, Y)Y = k(g(Y, Y)X - g(X, Y)Y)$

$\forall x, y$ Тензор зав'язаний, що для тенз. кривини $\forall$ ар зв. без суми

$$R(x, y)z = \frac{1}{6} (R(x, y+z)(y+z) - R(x, y-z)(y-z) - R(y, x+z)(x+z) + \\ + R(y, x-z)(x-z)) \quad (\forall x, y, z)$$

Дійсно, використовуючи лише лінійність і симетрію $R(x, y)z = -R(y, x)z$, після приведення подібних справа маємо

$$\frac{1}{3} (R(x, y)z + R(x, z)y - R(y, x)z - R(y, z)x) = \frac{1}{3} (zR(x, y)z - R(z, x)y - R(y, z)x),$$

 що дорівнює $R(x, y)z$ за I топомією Біанкі.

Рем. Зокрема, ці дві викладки демонструють, що $\forall$ рін. мнотовида його тензор кривини визначений $\blacktriangle$ однозначно виразом $g(R(x, y)y, x)$ ^{виразу}
 (а $\forall p \in M$ R_p ан-по визначений $g_p(R_p(v, w)w, v)$ для $v, w \in T_p M$ -ан-по)
 Це й означає, що тензор кривини визначається однією кривиною.

У нас для ПСК K з φ -м для $R(x, y)y$ маємо

$$\begin{aligned} \textcircled{=}& \frac{K}{6} (\underline{g(y+z, y+z)x} - \underline{g(x, y+z)(y+z)} - \underline{g(y-z, y-z)x} + \underline{g(x, y-z)} \\ & \underline{(y-z)} - \underline{g(x+z, x+z)y} + \underline{g(y, x+z)(x+z)} + \underline{g(x-z, x-z)y} - \underline{g(y, x-z)} \end{aligned}$$

$$\underline{(X-Z)} = \begin{bmatrix} \text{приводимо} \\ \text{носіями} \end{bmatrix} = k \left(\underline{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y} \right). \triangle$$

Th. (Muzn). Кесам (M, g) - зв'язний ℓ -м. n -варіантний рім. многовид,
де $\ell \geq 4, n \geq 3$. Якщо $\forall p \in M \ \forall$ множин $B_1, B_2 \subset T_p M \ K_p(B_1) = K_p(B_2)$,
то (M, g) - ПСК.

Rem. Це не так при $n=2$, інакше усі 2-варіантні рім. ма. буть ПСК.

► З умови і Рл.1, що використана $\forall p \in M$, випливає, що $\forall X, Y, Z$
 $R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$, де $k \in C^{\ell-3}(M)$ - ф-ція, що

задає загальну секц. кривану у кожній точці: $K_p(B) = k(p) \ \forall p \in M$,
 $\forall$ м. $B \subset T_p M$. Поді $\forall X, Y, Z, W$ вугн. м. (∇ -рім. зв. g):

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y, Z)W &= \nabla_X (R(Y, Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y, Z)\nabla_X W = \\ &= X(k) (g(Z, W)Y - g(Y, W)Z) + k(X(g(Z, W))Y + g(Z, W)\nabla_X Y - X(g(Y, W))Z - \\ &\quad - g(Y, W)\nabla_X Z - g(Z, W)\nabla_X Y + g(\nabla_X Y, W)Z - g(\nabla_X Z, W)Y + g(Y, W)\nabla_X Z - \\ &\quad - g(Z, \nabla_X W)Y + g(Y, \nabla_X W)Z) = \begin{bmatrix} \text{сирочують з викор.} \\ \text{уточненості } \nabla \text{ з } g \end{bmatrix} = X(k) (g(Z, W)Y - \\ &\quad - g(Y, W)Z). \end{aligned}$$

Моді II монотоність Біланки приймає вигляд:

$$X(k)(g(z,w)Y - g(Y,w)Z) + Y(k)(g(X,w)Z - g(Z,w)X) + Z(k)(g(Y,w)X - g(X,w)Y) = 0.$$

$\forall X \in \mathbb{R}^{l-3}(M) \quad \forall p \in M \quad \exists$ відкр. $U \ni p : Y, Z \in C^{l-3}(U)$ такі, що $\forall q \in U$

$\{X_q, Y_q, Z_q\}$ - ортогональна система, $Y_q \neq 0, Z_q \neq 0$ (Впр.; саме тут використано $n \geq 3$). На U , поклавши $W = Z$, моді маємо:

$$X(k)g(Z,Z)Y - Y(k)g(Z,Z)X = 0.$$

Оскільки в точках U $X \perp Y : Y \neq 0, Z \neq 0$, звідси $X(k) = 0$ на U .

Оскільки це так в околі $\forall p \in M$, $X(k) = 0$ на M . Оскільки M зв'язний, це означає, що k постійна, тобто (M, g) - ПСК k . (Впр.) $\triangle$