

## Варіант 1

Згадаймо, що лему Зауера було доведено за допомогою двох нерівностей: для будь-якого класу гіпотез  $\mathcal{H}$  скінченної VC-вимірності  $d$  у задачі бінарної класифікації на множині  $\mathcal{X}$  та для будь-якої  $m$ -елементної підмножини  $C \subset \mathcal{X}$  кількість обмежень функцій  $\mathcal{H}$  на  $C$  задовольняє

$$|\mathcal{H}_C| \leq |\{B \subset C \mid \mathcal{H} \text{ розбиває } B\}| \leq \sum_{i=0}^d C_m^i.$$

Навести приклади  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{H}$  і  $C$ , для яких

- обидві нерівності є рівностями ( $=$ );
- перша нерівність є строгою ( $<$ ), друга є рівністю ( $=$ );
- перша нерівність є рівністю ( $=$ ), друга є строгою ( $<$ );
- обидві нерівності є строгими ( $<$ ).

## Варіант 2

Нехай  $\mathcal{F}$  – векторний простір функцій  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , тобто довільні лінійні комбінації функцій з  $\mathcal{F}$  також належать до  $\mathcal{F}$ . Позначимо для  $f \in \mathcal{F}$  через  $POS(f)$  (від *positive*) відповідну ”порогову” функцію:

$$POS(f): \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, 1\}: x \mapsto \begin{cases} 1, & f(x) \geq 0, \\ 0, & f(x) < 0. \end{cases}$$

Тоді клас гіпотез  $POS(\mathcal{F}) = \{POS(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$  у задачі бінарної класифікації на  $\mathbb{R}^d$  зветься *класом Дадлі*, що відповідає  $\mathcal{F}$ .

- Нехай  $\mathcal{F}$  має вимірність  $n$ , а  $\{f_1, \dots, f_n\}$  – його базис. Показати, що відображення  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$  переводить будь-яку множину, що розбивається  $POS(\mathcal{F})$ , у множину, що розбивається класом однорідних напівпросторів  $\mathbb{R}^n$ .
- Нехай для будь-яких  $x \neq y$  з  $\mathbb{R}^d$  існує така  $f \in \mathcal{F}$ , що  $f(x) \neq f(y)$ . Вивести тоді з попереднього пункту, що VC-вимірність  $POS(\mathcal{F})$  не перевищує вимірність  $\mathcal{F}$ .
- Отримати з попереднього пункту оцінку зверху на VC-вимірність класу усіх поліномів степеня, що не перевищує  $m$ , на  $\mathbb{R}^d$ .