

► Якщо $f \in C(X, Y)$ і $g \in C(Y, X)$ задано ком. екв.,
тобто $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$, то за Лем. 5.2. і Рл. 5.4.

$\forall G: k \quad f_{k*} \circ g_{k*} = (f \circ g)_{k*} = (id_Y)_{k*} = id_{H_k(Y, G)}$ і
 $g_{k*} \circ f_{k*} = (g \circ f)_{k*} = (id_X)_{k*} = id_{H_k(X, G)}$, тобто $f_{k*}: H_k(X, G) \rightarrow H_k(Y, G)$
 $\rightarrow H_k(Y, G)$ і $g_{k*}: H_k(Y, G) \rightarrow H_k(X, G)$ - вза. обернені ізоморфізми. $\triangle$

Впр. 5.5. Показати, що синг. гомології тес. гомотопічно
 ів. (як тут вимагає аналог Рл. 1.2.?).

Лем. 5.5. Якщо $X \sim Y$, і для простору X визначена синг.
 єйлерова кар-ка, то вона визначена і для Y , і вони рівні:
 $\chi(X) = \chi(Y)$.

Рем. $\forall$ підпростору Y топ. пр-ру X (топ. пари (X, Y)) $\bigwedge_{k \in \mathbb{Z}_+}$ синг.
 k -вип. симплекси $y \in Y \quad \varphi \in C(\sigma^k, Y)$ є також синг. k -вип.
 симплексами $y \in X: \varphi \in C(\sigma^k, X)$ (формально тут треба
 говорити про комп. і φ з (пер.) відобр. вкриття

$i: Y \rightarrow X: x \mapsto x$. Тому i ланцюгом з такою самою, Y
 можна вважати ланц. $Y: C_k(Y, G) \subset C_k(X, G) \forall k$ і
 ад. гр. G і $\in$, от, підгрупною (знову не, формально ми
 говоримо про мономорфізм $i_k: C_k(Y, G) \rightarrow C_k(X, G)$ і його
 образ, що $\cong C_k(Y, G)$ і $\in$ підгр. $C_k(X, G)$). За побудовою,
 границі $C_*(Y, G)$ — це обм. границь $C_*(X, G)$ на ці підгр.:
 $C_*(Y, G) = \{ C_k(Y, G), \partial_k|_{C_k(Y, G)} \}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ для $\partial_k: C_k(X, G) \rightarrow C_{k-1}(X, G)$
 (зокр., $\partial_k(C_k(Y, G)) \subset C_{k-1}(Y, G)$), Тл.ч., за доб. 1.9 і Рл. 1.5,

Сол. 5.6. $\forall$ підпростору $Y \subset X$ і $\forall$ ад. гр. G $C_*(Y, G)$ — підкомплекс
 $C_*(X, G)$, тому визначений факторкомплекс $C_*(X, Y, G) :=$
 $= C_*(X, G) / C_*(Y, G)$ і його групи гомологій $H_k(X, Y, G) := H_k(C_*$
 $(X, Y, G))$ для $k \in \mathbb{Z}_+$.

def. 5.8. $H_k(X, Y, G)$ зветься k -тою групою (відносних)

сингулярних гомологій пари (X, Y) з коэф. у G .

Рем. Також очевидним чином визн. групи (визн.) синг. циклів $Z_k(X, Y, G)$ і границь $B_k(X, Y, G)$ пари; при $G = \mathbb{Z}$, як завжди, група не пишеться: $H_k(X, Y) := H_k(X, Y, \mathbb{Z})$ etc.

3 Тн. 1.1. (там все див. деталі):

Сол. 5.4. (довга точна послідовність (визн.) гомологій пари).

У відкр. $Y \subset X$ і H ад. гр. G визначена точна послідовність

$$\dots \rightarrow H_k(Y, G) \rightarrow H_k(X, G) \rightarrow H_k(X, Y, G) \rightarrow H_{k-1}(Y, G) \rightarrow \dots$$

Рем. Розглянемо ще одну довгу точну послідовність у гомологіях. Її використання нагадує застосування теореми Зейделя-

ван Кампена до обчислення фундамент. груп (див. попередн. курс). Для H відкр. покр. $\{U, V\}$ топ. пр-ру X пом. $U \cap V$ виключена $i_U: U \rightarrow X, i_V: V \rightarrow X, i_{UV}: U \cap V \rightarrow U, i_{UV}: U \cap V \rightarrow V$

$$\begin{array}{ccccc} & & i_{UV} & \rightarrow & U & \xrightarrow{i_U} & X \\ & & & & \searrow & & \downarrow \\ & & & & U \cap V & \rightarrow & V & \xrightarrow{i_V} & X \\ & & & & \searrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & & & & \end{array}$$

Th. 5.3. ((Dobru)^(точна) послідовність Маєра-Вієторіса). Нехай $\{U, V\}$ - відкрите покриття топ. пр-ру X . Нехай $\forall$ аб. гр. G $\exists$ гомоморфізми $\Delta_k : H_k(X, G) \rightarrow H_{k-1}(U \cap V, G)$, $k \in \mathbb{N}$ такі, що послідовність груп сингулярних гомологій з коеф. у G та їх прямих сум

$$\dots \xrightarrow{\Delta_{k+1}} H_k(U \cap V, G) \xrightarrow{(\bar{i}_{Uk*}, \bar{i}_{Vk*})} H_k(U, G) \oplus H_k(V, G) \xrightarrow{\bar{i}_{Uk*} - \bar{i}_{Vk*}} H_k(X, G) \xrightarrow{\Delta_k} H_{k-1}(U \cap V, G) \rightarrow \dots$$

є точною.

Рем. Путь, навпаки, пряма сума - те ж саме, що прямий добуток груп. Відображення будуться з індукованими гом-зв'язків вхлючень (факт. перен. Рем.) наступним чином: $\forall k \in \mathbb{Z}_+ \forall a \in Z_k(U \cap V, G)$

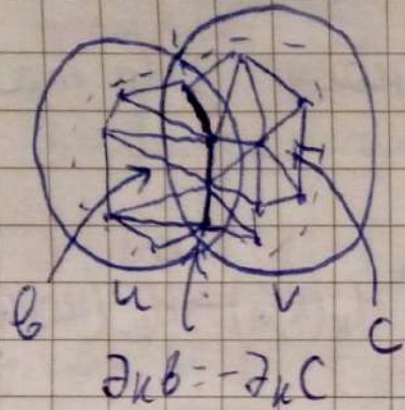
$$(\bar{i}_{Uk*}, \bar{i}_{Vk*})(a + B_k(U \cap V, G)) = (\bar{i}_{Uk}(a) + B_k(U, G), \bar{i}_{Vk}(a) + B_k(V, G)),$$

$$\forall a \in Z_k(U, G), b \in Z_k(V, G)$$

$$(\bar{i}_{Uk*} - \bar{i}_{Vk*})(a + B_k(U, G), b + B_k(V, G)) = \bar{i}_{Uk}(a) - \bar{i}_{Vk}(b) + B_k(X, G).$$

Впр. 5.6. Перевірити, що це коректно визначені гом-зми.
Аналогічна послідовність існує і в когомологіях.

▷ Дуб. [Katcher, p. 149-153].



Ідея побудови гом-змів Δ_k наступна:

$\forall a + B_k(X, G) \in H_k(X, G)$ знай $a \in Z_k(X, G)$

можна представити як суму ланцюгів, що
лежать в U і V (напр., за допомогою гарн-

центрічних відношень, див. далі), тобто $a = b + c$, де

$b \in i_{uk}(C_k(U, G))$, $c \in i_{vk}(C_k(V, G))$. $\partial_k a = 0 \Rightarrow \partial_k b = -\partial_k c$,

причому ця спільна границя лежить у $U \cap V$: $\partial_k b =$

$= -\partial_k c = i_{k-1}(d)$, де $d \in C_{k-1}(U \cap V, G)$, а $i = i_u \circ i_{uv} =$

$= i_v \circ i_{vu}$ - вкочення $U \cap V$ у X . Оскільки $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, $d \in Z_{k-1}$

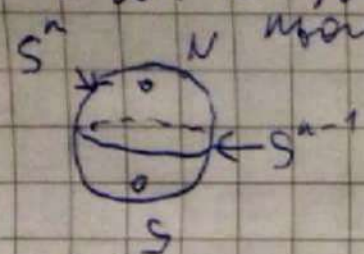
$(U \cap V, G)$. Тоді $\Delta_k: a + B_k(X, G) \mapsto d + B_{k-1}(U \cap V, G)$.

$H_{k-1}(\cap U \cap V, G)$



Ex. 5.11. Обчислимо за допомогою посл. М.-В. симпліціальні гомології S^n з носір. у аб. гр. G для $n \in \mathbb{Z}_+$. За Ex. 5.4, $S^0 = \{-1, 1\}$ (з носір. топ.) $\Rightarrow H_k(S^0, G) \cong \begin{cases} G, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$, причому ізоморфізми має вигляд $\sigma: g\varphi_{-1} + h\varphi_1 + B_0(S^0, G) \mapsto (g, h)$ (для $k=0$). За Pr. 5.2, $H_0(S^n, G) \cong G$ при $n \in \mathbb{N}$ для ізоморфізму $\psi: \sum_{x \in S^n} g_x \varphi_x + B_0(S^n, G) \mapsto \sum_{x \in S^n} g_x$. Покладемо $U := S^n \setminus \{N\}$, $V := S^n \setminus \{S\}$. Вони стягнені, тому за гомотопічною ів-цією Ex. 5.4. $H_k(U, G) \cong H_k(V, G) \cong \begin{cases} G, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$. Оскільки виключення $\forall$ точки $x \in U$ задає

є гомот. єв-сть, за л. 5.4. і доведення л. 5.4.,
 ізоморфізм $\chi: G \rightarrow H_0(U, G)$ можна побудувати як $g \mapsto g \varphi_x + B_0(U, G)$,
 і ан-но для $\chi: G \rightarrow H_0(V, G)$ (вважаємо, що $x \in U \cap V$), і одержимо го
 ан-но $\psi \in \Psi$ згідно з доведенням л. 5.4. (і ан-но для V).



Крім того, $U \cap V = S^n \setminus \{N, S\} \sim S^{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$,

причому гомот. єв-сть задається вищомою
 S^{n-1} у $U \cap V$ (як $(x, 0)$, $x \in S^{n-1}$), бо це деформ. ретракт. За
 гомот. єв-стю (і її доведенням), $H_k(U \cap V, G) \cong H_k(S^{n-1}, G)$
 $\forall k$, причому при $k=0$ ізоморфізм $\omega: H_0(S^{n-1}, G) \rightarrow H_0(U \cap V, G)$ за-
 дається: $\sum_{x \in S^{n-1}} g_x \varphi_x + B_0(S^{n-1}, G) \mapsto \sum_{x \in S^{n-1}} g_x \varphi_{x,0} + B_0(U \cap V, G)$.

Кінцеву послідовність M - B . $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow H_1(U, G) \oplus H_1(V, G) & \xrightarrow{0} & H_1(S^n, G) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(U \cap V, G) & \xrightarrow{(i_{U \cap V}, i_{V \cap U})} & H_0(U, G) \oplus H_0(V, G) & \xrightarrow{i_{U \cap V} - i_{V \cap U}} & H_0(S^n, G) & \rightarrow 0 \\
 \underbrace{\quad \quad \quad}_{0} & & & & \omega \uparrow \downarrow & & \begin{array}{c} \chi \oplus \chi \uparrow \downarrow \psi \oplus \psi \\ G \oplus G = G^2 \end{array} & & \begin{array}{c} \psi \downarrow \downarrow \\ G \end{array} & \\
 & & H_0(S^{n-1}, G) & & & & & & & \\
 & & \downarrow \downarrow & & \psi \downarrow \downarrow & & & & & \\
 & & G^2 & & G & & & & & \\
 & & n=1 & | & n>1 & & & & &
 \end{array}$$

Визначаючи композиції гом-зв'язів послідовності з цими ізо-
морфізмами, отримуюємо точну послідовність

$$0 \xrightarrow{\alpha} H_1(S^n, G) \xrightarrow{\beta} \begin{cases} G^2, & n=1 \\ G, & n>1 \end{cases} \xrightarrow{\gamma} G \rightarrow 0,$$

де $\alpha := \beta \circ \omega^{-1} \circ \Delta_1$ при $n=1$ і $\psi \circ \omega^{-1} \circ \Delta_1$ при $n>1$. При $n=1$:

$$\begin{aligned} \beta &:= (\chi \oplus \chi)^{-1} \circ (i_{u \otimes x}, i_{v \otimes x}) \circ \omega \circ \beta^{-1} : (g, h) \xrightarrow{\beta^{-1}} g\varphi_{-1} + h\varphi_1 + \beta_0(S^0, G) \\ &\xrightarrow{\omega} g\varphi_{(-1,0)} + h\varphi_{(1,0)} + \beta_0(U \cap V, G) \xrightarrow{(i_{u \otimes x}, i_{v \otimes x})} (g\varphi_{(-1,0)} + h\varphi_{(1,0)} + \beta_0(U, G), \\ &g\varphi_{(-1,0)} + h\varphi_{(1,0)} + \beta_0(V, G)) \xrightarrow{\psi \oplus \psi} (g+h, g+h). \end{aligned}$$

При $n>1$:

$$\beta := (\psi \oplus \psi) \circ (i_{u \otimes x}, i_{v \otimes x}) \circ \omega \circ \psi^{-1} : g \xrightarrow{\psi^{-1}} g\varphi_x + \beta_0(S^{n-1}, G) \mapsto \begin{cases} \text{анотакс-} \\ \text{ично} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} x \in S^{n-1} \\ (x,0) \in U \cap V \end{array} \right] &\xrightarrow{\omega} g\varphi_x + \beta_0(U \cap V, G) \xrightarrow{(i_{u \otimes x}, i_{v \otimes x})} (g\varphi_x + \beta_0(U, G), g\varphi_x + \beta_0(V, G)) \\ &\xrightarrow{\psi \oplus \psi} (g, g). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &:= \psi \circ (i_{u \otimes x} - i_{v \otimes x}) \circ (\chi \oplus \chi) : (g, h) \xrightarrow{\chi \oplus \chi} (g\varphi_x + \beta_0(U, G), h\varphi_x + \beta_0(V, G)) \\ &\xrightarrow{i_{u \otimes x} - i_{v \otimes x}} (g-h)\varphi_x + \beta_0(S^n, G) \xrightarrow{\psi} g-h. \end{aligned}$$

Зокрема, гісто γ - єм $((g,0) \mapsto g \forall g \in G)$ і $\text{Ker } \gamma =$

$$= \{ (g, g) \mid g \in G \} = \Delta_G \text{ в } G \times G.$$

При $n=1$: $\text{Ker } \beta = \{ (g, -g) \mid g \in G \}$. За матрицы, d -изм.,
мы $H_1(S^1, G) \simeq \text{Im } d = \text{Ker } \beta \simeq G$.

При $n \geq 1$: $\text{Ker } \beta = 0$. Так само, $H_1(S^n, G) \cong \text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta = 0$.
 $\forall k \geq 1$ частинка посл. М.-В.!

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H_k(U, G) \oplus H_k(V, G) & \xrightarrow{0} & H_k(S^n, G) & \xrightarrow{\Delta_k} & H_{k-1}(U \cap V, G) & \xrightarrow{0} & H_{k-1}(U, G) \oplus H_{k-1}(V, G) \rightarrow \dots \\ & \parallel & & & \parallel & & \parallel \\ & 0 & & & H_{k-1}(S^{n-1}, G) & & 0 \end{array}$$

Помы

$$\Delta_k - \text{изоморфизм, а также } H_k(S^n, G) \cong$$

$\cong \pi_{k-1}(S^{n-1}, G)$. Все вписывается в теорему Фрейденшталя! Поэтому мы

$$k=n \quad H_n(S^n, G) \cong H_{n-1}(S^{n-1}, G) \cong \dots \cong H_1(S^1, G) \cong G. \text{ Type } k \neq n:$$

$$H_k(S^n, G) \cong H_{k-1}(S^{n-1}, G) \cong \dots \cong \begin{cases} H_1(S^{n-k+1}, G) = 0, & k < n \quad (n-k+1 > 1), \\ H_{k-n}(S^0, G) = 0, & k > n \quad (k-n > 0). \end{cases}$$

Пр.ч. $H_k(S^4, G) \cong \begin{cases} G^2, & k=n=0 \\ G, & k=0, n>0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

Ці гомології збігаються з симпліційними при $n=0$ (Ек. 2.5.),
 $n=1$ (Ек. 2.6.), $n=2$ (Впр. 2.7.), ... (див. також практику і
 далі заг. теорему про ізоморфізм). При $G = \mathbb{Z}$:

$$H_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & k=n=0; \\ \mathbb{Z}, & k=0, n>0 \text{ або } k=n>0; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

(при $k=1, n$ ми також виводимо це з теорем Турсевича і Хопфа),
 тому (скалярна) $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ (і при $n=0$ також).

Реш. Задаймо, що в курсі "Осн. алг. топ." ізоморфізм
 $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ дозволяла визначити ступінь довільного
 $f \in C(S^n, S^n)$ (для $n \in \mathbb{N}$): якщо 1 - твірна (порочна,
 ел-т неск. зв'язності) групи, тобто образ $1 \in \mathbb{Z}$ при із-мі)
 $\pi_n(S^n)$, то для індукованого гом-зма $f_* : 1 \mapsto \deg f \cdot 1$.
 Так само можна зробити і тут! ($\mathbb{Z}$)

деф. 5.9. Позначимо через 1 твірну нескінченної

изоморфизм групи $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Нехай $f \in C(S^n, S^n)$

і $f_{n*}(1) = \deg f \cdot 1$. Може $\deg f \in \mathbb{Z}$ зветься (комісивним) степенем f .

З Пр. 5.4. і Лем. 5.2. може наємо

Лем. 5.8. Степень є комісивним інваріантом відображення, тобто $f \sim g \Rightarrow \deg f = \deg g$. Крім того, $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

Насправді це той же степінь!

Впр. 5.4. Використавши ізоморфізми з Лем. 5.1. при $n=1$ та ізоморфізми Пуанкаре з попередня після Лем. 5.2. при $n>1$, показати, що $\deg f$ дорівнює "комісивному" степеню з поперед. курсу.

Реш. Тому і решта відомих фактів про степінь залишаються вірними, зокр., Лем. Хопфа: $f \sim g \Leftrightarrow \deg f = \deg g$, тобто степінь — невільний ком. інв. непер. відображень сфер.

6. Клітинні простори

(евкл. норма)

Згадаємо, що для $k \in \mathbb{Z}_+$ $\mathcal{D}^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| \leq 1\}$ — станд. k -вимірний замкнений куб. При цьому $\text{int } \mathcal{D}^k = \mathcal{B}^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| < 1\}$ — станд. k -вим. відкрита куля (при $k=0$ $\mathcal{D}^0 = \mathcal{B}^0 = \{0\}$) і при $k \in \mathbb{N}$ $\partial \mathcal{D}^k = \partial \mathcal{B}^k = S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| = 1\}$ — станд. $(k-1)$ -вим. сфера.

def. 6.1. Для $k \in \mathbb{Z}_+$ k -вимірною (замкненою) клітиною (closed cell) у топ. пр-ті X зветься $\varphi(\mathcal{D}^k) \subset X$, де $\varphi: \mathcal{D}^k \rightarrow X$ (характеристичне відобр. клітини) задов. наступним умовам:

($\exists$ індуц. z)
 $\downarrow$ X топ.

— φ неперервне;

— $\varphi|_{\mathcal{B}^k} \in \text{вкладення}$, тобто $\varphi|_{\mathcal{B}^k}: \mathcal{B}^k \rightarrow \varphi(\mathcal{B}^k)$ — гомео-зм.

— при $k \in \mathbb{N}$ $\varphi(S^{k-1}) \subset \partial \varphi(\mathcal{B}^k)$.

$\varphi(\mathcal{B}^k)$ при цьому $(\partial \mathcal{B}^k)$ зветься k -вим. відкритою клітиною.

Ех. 6.1. При $k=0$ $\varphi(\mathcal{D}^0) = \varphi(\{0\})$ — це точка X і нав-
паки $\forall x \in X \in \mathcal{O}$ -вм. (замкн.) кл. для $\varphi: \mathcal{O} \mapsto x$.

Ех. 6.2. При $k=1$ $\varphi: \mathcal{D}^1 = [-1, 1] \rightarrow X$ задає мн-во $\mathcal{Z} \subset X$
(до перер.) з додатковими умовами: $\varphi|_{B^1}: B^1 = (-1, 1) \rightarrow X$ —
вкладення (замкн., у цьому мн-в-і немає B^1 внутрішніх т.
самоперетинів), і $\varphi(S^0) = \varphi(\{-1, 1\}) \subset \partial \varphi((-1, 1))$.

Ех. 6.3. Оск. k -вм. станд. симплекс $\mathcal{B}^k \cong \mathcal{D}^k$ (Лем. 2.1.),
а характеристичне відобр. топ. симплекса (k -вм.) $\varphi: \mathcal{B}^k \rightarrow X$ є вкладенням, топ. симплекс $\varphi(\mathcal{B}^k)$ є (замкн.)

критерия χ характеристический вид $\Phi \circ \chi =: \Psi$,
 где $\chi: \mathbb{D}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ — число-зн. Дифференциально Φ — вложенная $\Rightarrow$
 Ψ — бул. $\Rightarrow \Psi|_{\mathbb{B}^k}$ — бул. $\Rightarrow \Psi(S^{k-1}) = \Phi(\partial \mathbb{B}^k) = \partial \Phi(\mathbb{B}^k) =$
 $(\partial \mathbb{B}^k \cap \text{maney бул. } \leq k-1) / \text{Int}$

$= \partial \Psi(B^k)$. Тому наступне означення узгоджується поняття
симпліційного простору:

def. 6.2. Клітинний простір (CW-простір, CW-комплекс)
зветься пара $(X, \mathcal{A})$, де X - хаусдорфовий топ. пр-р, а
 $\mathcal{A}$ - клітинне розбиття X , тобто сукупність (закл.)
клітин σ X така, що

(C) (closure finiteness). $\forall$ клітин $\sigma(\mathbb{D}^k) \in \mathcal{A}$ $\bigvee_{k \in \mathbb{N}}$ з кар.
фігур. σ образ менш $\sigma(S^{k-1}) \in \mathcal{A}$ об'єднанням скінченної
кількості клітин $\mathcal{A}$ вимірностей $\leq k-1$.

(W) (weak topology) $\mathcal{A} \in$ (закл.) сукупності
покриває X : $V \subset X$ закл. $\Leftrightarrow \forall \sigma(\mathbb{D}^k) \in \mathcal{A} \quad V \cap \sigma(\mathbb{D}^k)$ закл.

Кліт. пр-р $(X, \mathcal{A})$ зветься скінченним, якщо $|\mathcal{A}| < \infty$;
скінченновимірним вимірності $n \in \mathbb{Z}_+$ ($n = \dim(X, \mathcal{A})$),
якщо n є найбільшою вимірністю клітин з $\mathcal{A}$.

$\forall n \in \mathbb{N}_+$ n -вимірним кістяком (skeleton) $X_n \subset X$ зв.
об'єднання усіх кістяків A вимірностей $\leq n$.

Рем. Оскільки $\mathbb{D}^k$ - компак., кістяки $\varphi(\mathbb{D}^k)$ компактні $\Rightarrow$
 $\Rightarrow [X \text{ хаус.}] \Rightarrow$ замкнені (при цьому $\varphi(B^k)$ необов'язово
відкриті). Тому умова W насправді означає, що топ.
кістяк пр-ру - найскелетніша з хаусдорфових на X , у
якій усі хар. відобр. кістяків з A неперервні (а отже
характеризується цією власт. однозначно). Дійсно $\forall$
такої топ. і $\forall$ замкненої в ній $V \subset X$, оскільки $\varphi(\mathbb{D}^k)$
замкнені, усі $V \cap \varphi(\mathbb{D}^k)$ замкн. $\Rightarrow V$ замкн. в топ. кістяк.
пр-ру. ($\Leftarrow$ найскелетніша з тих, у яких усі $\varphi(\mathbb{D}^k)$ замкн.).

Якщо (X, A) скінч., то він і скінченновимірний. Крім
того, він компактний як скінч. об'єднання компактів
 $\varphi(\mathbb{D}^k)$, а умова фундаментальності в W виконана авто.

нативно : $\forall V \cap \varphi(\mathbb{D}^k)$ замкн. $\Rightarrow V = \bigcup_{\varphi(\mathbb{D}^k) \in \mathcal{A}} V \cap \varphi(\mathbb{D}^k)$

замкн. як скінч. об'єд. замкнених.

Кістки утворюють неспадну послідовність:

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \dots \subset X$$

При цьому $\dim(X, \mathcal{A}) = n \Leftrightarrow X = X_n = X_{n+1} = \dots$ і

яке $X \neq X_{n-1}$ $\mathcal{A}$ ідеється. Дакі говоримо просто про клім. пр-р X , якщо відомо, що

Ек. 6.1. $\forall$ скінч. пр-р $(X, \mathcal{A})$ (де $\mathcal{A}$ - трианг.) $\in$ кліматичн з клім. розд. $\mathcal{A}$: він хаусдорфовий (Вопр. 6.1. Перевірити це тріангліні у скінч. випадку), $\mathcal{A}$ - (замкн.) група покриття, і, як Тільки у Ек. 6.3. $\forall \varphi(\mathbb{D}^k) = \psi(\mathbb{D}^k) \in \mathcal{A}$ $\psi(\mathbb{D}^{k-1})$ - це об'єднання усіх граней відр. топ. симплекса, що належать до $\mathcal{A}$ і макс скінч. кількості.

Рем. Усі такі многовиди триангульовані, а звинс $\in$ скінч. $\Rightarrow$ клім. пр-р. Для заг. многовидів

це не так, але вірно, що $\mathbb{H}$ еквівалентний принаймні
 топологічно еквівалентний клітинному простору.

Ex. 6.5. Дискретні пр-ри (не обов'язково скінченні)
 $\in$ 0-вим. симплексіальним $\Rightarrow$ 0-вим. клітинним, і всі
 клітини - це усі точки, зокр., $S^0 = \{-1, 1\}$ - 0-вим. клім.

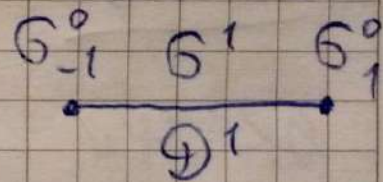
Ex. 6.6. Для $n \in \mathbb{N}$ розглянемо $\varphi^n : \mathbb{D}^n \rightarrow S^n$: $x \mapsto \begin{cases} (\varphi_N^{-1} \circ \psi)(x), & x \in B^n \\ N, & x \in S^{n-1} \end{cases}$
 де $\varphi_N : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ - стереографічна проекція
 відн. півн. полюса $N = (0, \dots, 0, 1)$, а $\psi : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - гомео-
 морфізм, скажімо, $x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{|x|} \cdot \tan \frac{\pi}{2} |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Тоді $\sigma^n :=$
 $= \varphi^n(\mathbb{D}^n) = S^n$ і $\varphi^n(B^n) = S^n \setminus \{N\}$, причому $\varphi^n|_{B^n} : B^n \rightarrow$
 $\rightarrow S^n \setminus \{N\}$ - гомеоморфізм, тобто $\varphi^n|_{B^n}$ - вкладення, і
 $\varphi^n(S^{n-1}) = \{N\} = \partial \varphi^n(B^n)$. Тому σ^n - к-вим. S^n
 клітина з хар. відобр. φ^n . Також пола-



демо $\mathcal{B}^0 := \{V\}$. Це 0-вим. клітина, і, як завжди,
 $\varphi^n(S^{n-1}) = \mathcal{B}^0$. Тоді, $(S^n, \{\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^n\})$ - (скінченний) n -ви-
 мірний клітинний простір.

Ек. 6.7. Тепер для $n \in \mathbb{N}$ покладемо $\varphi^n := \text{id}_{\mathcal{D}^n} : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$.

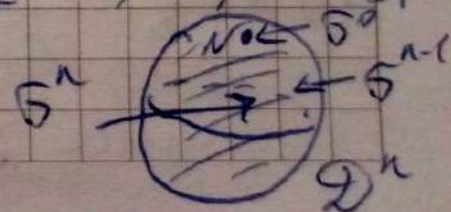
Оскільки $\varphi^n|_{B^n} = \text{id}_{B^n} : B^n \rightarrow B^n = \varphi^n(B^n)$ - гомеоморфізм, і
 $\varphi^n(S^{n-1}) = S^{n-1} = \partial \varphi^n(B^n)$, $\mathcal{B}^n := \varphi^n(\mathcal{D}^n) = \mathcal{D}^n \in n$ -вим.
 клітинного у $\mathcal{D}^n$ з хар. відобр. φ^n .



При $n=1$ покладемо $\mathcal{B}_{-1}^0 := \{-1\}$, $\mathcal{B}_1^0 := \{1\}$.

Це 0-вим. клітини, і $\partial \varphi^1(B^1) = \partial B^1 = S^0 = \mathcal{B}_{-1}^0 \cup \mathcal{B}_1^0$. Тоді,
 $(\mathcal{D}^1, \{\mathcal{B}_{-1}^0, \mathcal{B}_1^0, \mathcal{B}^1\})$ - (скінч.) 1-вим. кліт. пр-р.

При $n > 1$ визначимо $\mathcal{B}^{n-1} = \varphi^{n-1}(\mathcal{D}^{n-1})$ і $\mathcal{B}^0 = \{V\}$
 як у Ек. 6.6. (у S^{n-1}). Тоді $\partial \varphi^n(B^n) = S^{n-1} = \mathcal{B}^{n-1}$
 (і $\partial \varphi^{n-1}(B^{n-1}) = \mathcal{B}^0$ як раніше). Тоді $(\mathcal{D}^n, \{\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^{n-1}, \mathcal{B}^n\})$ -
 (скінч.) n -вим. кліт. пр-р.



Ex. 6.8. Задаємо один з описів дійсного проективного пр-ру
 $RP^n = \{ (x^0 : \dots : x^n) \mid (x^0, \dots, x^n) \neq 0 \} \text{ (де } (x^0 : \dots : x^n) = (\lambda x^0 : \dots : \lambda x^n) \forall \lambda \neq 0 \text{)}$

з курсу топології: при $n \in \mathbb{N}$

$$RP^n = \{ (x^0 : \dots : x^{n-1} : 0) \mid (x^0, \dots, x^{n-1}) \neq 0 \} \sqcup \{ (x^0 : \dots : x^n) \mid x^n \neq 0 \}$$

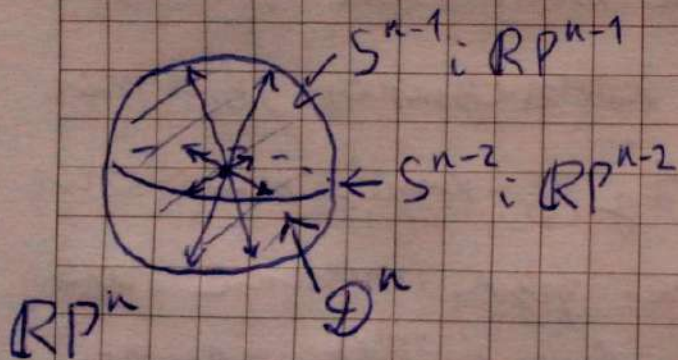
Ці підпр-ри гомеоморфні RP^{n-1} (як, якщо б було ототожнювати їх)
 і $\mathbb{R}^n \cong B^n \left((x^0 : \dots : x^n) \mapsto \left(\frac{x^0}{x^n}, \dots, \frac{x^{n-1}}{x^n} \right) \right)$ задає гомео-зм на $\mathbb{R}^n$
 (як використовуємо ψ^{-1} для ψ з Ex. 6.6.). Ототожнимо RP^{n-1}
 з $S^{n-1}/\mathbb{Z}_2$ (сферою S^{n-1} з ототожненими діам. протилежними т.)
 як завжди (зокрема, RP^0 - одноточковий), отримаємо гомео-
 зм $RP^n \cong D^n / \sim$, де $\sim$ ототожнює діам. прот. точки на

$S^{n-1} = \partial D^n$ (а решту точок лише з собою).

Тоді визначимо (непер.) $\varphi^n : D^n \rightarrow RP^n$ як

каноничну проєкцію цього факторпростору.

$\varphi^n|_{B^n} : B^n \rightarrow \varphi^n(B^n) = B^n$ можна вважати по-
 тинним (тут ототожн. т. B^n з їх 1-точковими



класами еків-стії) $\Rightarrow$ розко-зком, тобто $\varphi^n|_{B^n}$ - вкл. $\varphi^n(S^{n-1}) = S^{n-1}/\mathbb{Z}_2 =$
 $= \partial \varphi^n(B^n) = \mathbb{R}P^{n-1}$. Отже, $G^n := \varphi^n(D^n) = \mathbb{R}P^n$ - n -вим. кл. у $\mathbb{R}P^n$ з
 хар. відобр. φ^n . Тим $n \geq 2$ для описаного вище вклада $\mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$
 функ. $\varphi^{n-1}: D^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{R}P^n$ ан-но, тоді $G^{n-1} := \varphi^{n-1}(D^{n-1}) = \mathbb{R}P^{n-1}$ -
 $(n-1)$ -вим. кл. у $\mathbb{R}P^n$ з хар. відобр. φ^{n-1} , і $\varphi^n(S^{n-1}) = G^{n-1}$. Доді так само
 визначимо $\varphi^k: G^k := \varphi^k(D^k) = \mathbb{R}P^k$ - k -вим. клітини у $\mathbb{R}P^n$, до
 $\mathbb{R}P^0 = \{(1:0:\dots:0)\}$ - 0-вим. клітини. Оск. $\forall k \in \mathbb{N} \varphi^k(S^{k-1}) = \mathbb{R}P^{k-1} =$
 $= G^{k-1}$, $(\mathbb{R}P^n, \{G^0, \dots, G^n\})$ - (скінч.) n -вимірний клітинний простір.

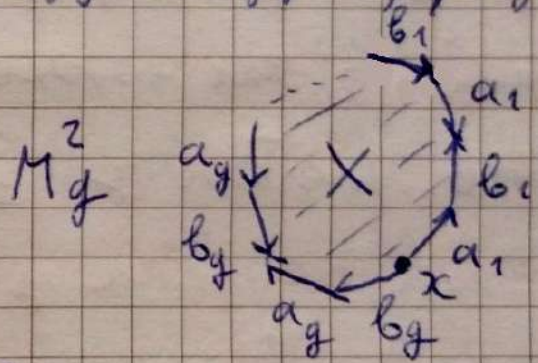
За побудовою, $\varphi^k(y) = \begin{cases} (\psi^1(y): \dots : \psi^k(y): 1: 0: \dots : 0) = (y^1: \dots : y^k: \underbrace{y}_{\text{tg } \frac{\pi}{2}|y|}: 0: \dots : 0), & y \in B^k \\ (y^1: \dots : y^k: 0: \dots : 0), & y \in S^{k-1} \end{cases}$

$\forall y = (y^1, \dots, y^k) \in D^k, k \in \mathbb{N}$, і $G^k = \mathbb{R}P^k = \{(x^0: \dots : x^k: 0: \dots : 0) \mid (x^0, \dots, x^k) \neq 0\}$.

Впр. 6.2. Описати класи, пр. пр-р $\mathbb{C}P^n$ як клітинний простір.

З. 6.9. Використаємо опис орієнтованої компакної зв'язної
 поверхні роду $g \in \mathbb{N}$ (при $g=0$ це S^2) M_g^2 з курсу топології
 (див. також обчислення фундаментальних груп поверхні по-
 версно за гол. Тн. Зейферта - ван Кампена в курсі "Ос. ал. топ.").

Для цього будеться розв'язка: опуклий q -континк X у $\mathbb{R}^2$ (або просто круг $\mathbb{D}^2$, менша якого розд. на дві) разом з біометричним еев-ті ν , що склеює його ребра за правилами, яке задається словом $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$:



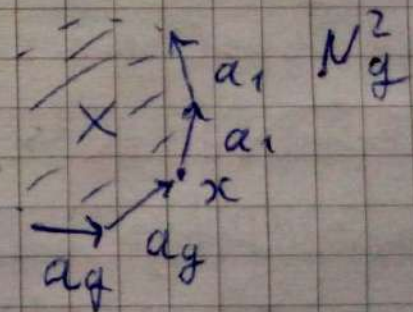
Тоді $M_g^2 \cong X/\nu$ (таким чином, це, нагадаємо, зв'язна група $\underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_g$). При цій факторизації всі вершини X переходять у єдину точку $x \in M_g^2$, а ребра у $2g$ петель (які тепер будемо позн. $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$).

Нехай $\varphi^2: \mathbb{D}^2 \rightarrow M_g^2$ — канонічна гомеоморфіза $\mathbb{D}^2 \rightarrow X$ (що будеться, напр., за гол. центральної проєкції) і канон. проєкції $X \rightarrow M_g^2$ (що ототожнює з X/ν за гомео-змом).

Тоді $\varphi^2|_{B^2}: B^2 \rightarrow \varphi^2(B^2) = \text{Int } X/\nu$ — гомео-зм, тобто $\varphi^2|_{B^2}$ — вкл., і $\varphi^2(S^1) = \partial \varphi^2(B^2) = \partial X/\nu$ — об'єднання (посіів) петель,

у які переходять ребра. П.ч., $\mathcal{B}^2 := \varphi^2(\mathcal{D}^2)$ - 2-вим. клітина у M_g^2 з хар. відображення φ^2 , $\forall i = \overline{1, g}$ нехай $\varphi_{a_i}^1, \varphi_{b_i}^1 : \mathcal{D}^1 \rightarrow M_g^2$ петлі, в які переходять ребра a_i, b_i sign , причому ці відобр. задов. умовам з Ех. 6.2., тобто $\mathcal{B}_{a_i}^1 := \varphi_{a_i}^1(\mathcal{D}^1), \mathcal{B}_{b_i}^1 := \varphi_{b_i}^1(\mathcal{D}^1)$ - 1-вим. клітини у M_g^2 з хар. відобр. $\varphi_{a_i}^1, \varphi_{b_i}^1$ sign . (кож. sign . петель). Нарешті, $\mathcal{B}^0 := \{x\}$ - 0-вим. клітина. Оскільки $\varphi^2(S^1) = \mathcal{B}_{a_1}^1 \cup \mathcal{B}_{b_1}^1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{a_g}^1 \cup \mathcal{B}_{b_g}^1$ і $\varphi_{a_i}^1(S^0) = \varphi_{b_i}^1(S^0) = \mathcal{B}^0 \forall i = \overline{1, g}$, $(M_g^2, \{\mathcal{B}^0, \mathcal{B}_{a_1}^1, \dots, \mathcal{B}_{b_g}^1, \mathcal{B}^2\})$ - (скінч.) 2-вимірний клім. пр-р (хаусд., бо це поверхня).

Ех. 6.10. Як-но до кожн. прикладу, неорієнтована конн. зв. поверхня N_g^2 роду $g \in \mathbb{N}$ має розгортку, що задається ор. 2 g -кутником $X \subset \mathbb{R}^2$ (або просто кругом $\mathcal{D}^2$, зокр., при $g=1$) і sign . елв. ν , що отождоснює ребра sign овісно до слова $W = a_1 a_1 \dots a_g a_g : N_g^2 \cong X/\nu$ (таким же зв. ємн $\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_g$).



Пусть такое при факторизации усі вершины переходят
 в точку $x \in N_g^2$, а ребра $a_1, \dots, a_g$ — в петли в x . Как само,
 як у Ex. 6.9, виходило $\varphi^2: \mathbb{D}^2 \rightarrow N_g^2$, $\mathcal{B}^2 := \varphi^2(\mathbb{D}^2)$, $\varphi_{a_i}^1: \mathbb{D}^1 \rightarrow$
 $\rightarrow N_g^2$, $\mathcal{B}_{a_i}^1 := \varphi_{a_i}^1(\mathbb{D}^1)$, $\mathcal{B}^0 := \{x\}$ ($i = \overline{1, g}$). Поді $\mathcal{B}^2, \mathcal{B}_{a_i}^1, \dots, \mathcal{B}_{a_g}^1, \mathcal{B}^0$ —
 клітини відр. вимірностей, а $(N_g^2, \{\mathcal{B}^0, \mathcal{B}_{a_i}^1, \dots, \mathcal{B}_{a_g}^1, \mathcal{B}^2\})$ — (акін.)
 2-варт. кліт. гр-р. При $g = 1$ ця стр. на $N_1^2 = \mathbb{R}P^2$ збіга-
 ється з побудованою у Ex. 6.8. (чому?).

Реш. Пусть $\mathbb{D}^n \cong \mathcal{B}^n$, S^n , $\mathbb{R}P^n$ (як магік многовиди), M_g^2 , N_g^2
 (як поверхні) є симп. гр-рами, але описані вище їс
 клітинні структури, як правило, значно простіші (та
 "праростіші") за триангуляції.