

(2/3) 5. За допомогою посл. Λ -B. знайти сит. розкладіння

$$X = \underbrace{S^T V \dots V S^T}_n.$$

Будемо вихити за индукцією, доводячи $M_k(X, G) \simeq \begin{cases} G^n, & k=1 \\ G, & k=0 \\ 0 & \text{і інш. вар.} \end{cases}$
 $\forall G$. Ми вже знаємо це для $n=1$ (з лекцій) і $n=2$
 (з поперед. задачі). (випр.)

$n \times n \times n+1$ Корреляционная $\{u, v\}$ матрица $X = \underbrace{S^T V \dots V S^T}_{n+1}$

$$U = \begin{pmatrix} \text{matrix} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \text{matrix} \end{pmatrix} : U \sim \underbrace{S^\dagger V \cdot V S^\dagger}_n, V \sim S^\dagger, U \text{ and } V \text{ commute.}$$

Theory $H_k(U, G) \simeq \begin{cases} G^n, & k=1 \\ G, & k=0 \\ 0 & \text{if imm. bun.} \end{cases}$ for a group G , $H_k(V, G) \simeq \begin{cases} G, & k=0, 1 \\ 0 & \text{if imm. bun.} \end{cases}$

$$H_k(U \cap V, G) \cong \begin{cases} G, & k=0 \\ 0, & \text{if imm. bun.} \end{cases}$$

Поч. М.-В. bun. an-no go nonex.

задачі: для $k \geq 2 \rightarrow H_k(U, G) \oplus H_k(V, G) \rightarrow H_k(X, G) \rightarrow H_{k-1}(U \cap V, G) \rightarrow \dots$,
тобто $H_k(X, G) = 0$ з точністю, і кінець!

$$\dots \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H_2(U \cap V, G)} \rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ G^n}}{H_2(U, G)} \oplus \underset{\substack{\parallel \\ G}}{H_2(V, G)} \rightarrow H_2(X, G) \rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ G}}{H_0(U \cap V, G)} \rightarrow$$

$$\rightarrow H_0(U, G) \oplus H_0(V, G) \rightarrow H_0(X, G) \rightarrow 0, \text{ де } H_0(X, G) \cong G \text{ за лн зв.},$$

$\begin{smallmatrix} \mathbb{Z} \\ G \end{smallmatrix}$

$\begin{smallmatrix} \mathbb{Z} \\ G \end{smallmatrix}$

$\begin{smallmatrix} \mathbb{Z} \\ G \end{smallmatrix}$

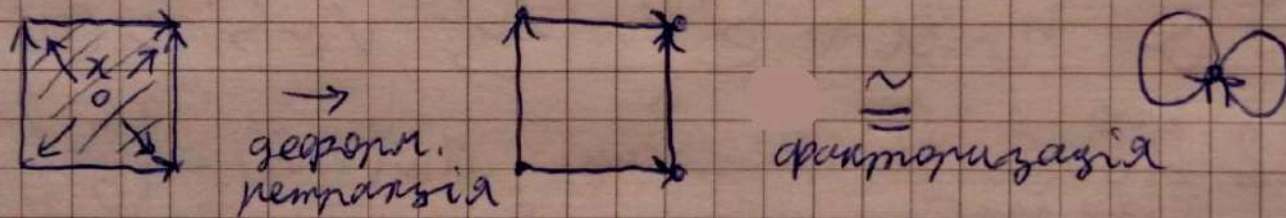
тобто після переходу до ізоморфізмів

$$0 \rightarrow G^{n+1} \rightarrow H_1(X, G) \xrightarrow{\Delta_1} G \xrightarrow{(q, q)} G^2 \rightarrow G \rightarrow 0,$$

$(q, h) \mapsto q-h$

де знову $\text{Im } \Delta_1 = \text{Ker } (q \mapsto (q, q)) = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 0$, тож
 $H_1(X, G) \cong G^{n+1}$, що й потрібно.

(9/3) 6. Знайтимо, що $\forall x \in T^2 \quad T^2 \setminus \{x\} \sim S^1 \vee S^1$:



Використавши це і посл. л.-в.

знайти сингулярні гомології двовимірного тора T^2 з коефіцієнтами у фіксованому числі.

Нехай $U = T^2 \setminus \{x\}$, V - стягнутий диск x (максимо, $\cong B^2$); його можна побудувати за допомогою карти T^2 в ок. x .

Л0 и ин. фак.
 При $k \geq 3$ и точности $\rightarrow H_k(U) \oplus H_k(V) \rightarrow H_k(T^2) \rightarrow H_{k-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$

$$\rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \rightarrow H_0(T^2) \rightarrow 0$$

$\begin{matrix} \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}^2 & & 0 & & \mathbb{Z} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{matrix}$

← 6 ссылок
36' функции

$$0 \rightarrow H_2(T_2) \xrightarrow{\Delta_2} H_1(U \cap V) \xrightarrow{i_{U \cap V}^*} H_1(U) \xrightarrow{i_U^*} H_1(T^2) \rightarrow 0$$

выявить Тн. 5.1. лекции.

Наприклад, ми знаємо, що $H_1(T^2) \cong \pi_1(T^2, x) \cong \mathbb{Z}^2$. З
точності, $i_{u1*} : H_1(u) \rightarrow H_1(T^2)$ - мономорфізм, тоді
 $\mathbb{Z}^2 \cong H_1(T^2) = \text{Im } i_{u1*} \cong H_1(u) / \text{Ker } i_{u1*}$. Але в $H_1(u) \cong \mathbb{Z}$
Єдина підгрупа, факторизація за якою $\cong \mathbb{Z}^2$ - це 0 (бо
це так для $\mathbb{Z}^2$, підгр. якої мають вигляд $\{n_1(z_1, w_1) + n_2(z_2, w_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ - решітки) $\Rightarrow \text{Ker } i_{u1*} = 0 (\Rightarrow i_{u1*} - \text{із-м})$.
Плоді $\text{Im } i_{uv1*} = \text{Ker } i_{u1*} = 0 \Rightarrow i_{uv1*} = 0$ за точністю.
В силу точн., Δ_2 - ізоморфізм $\Rightarrow H_2(T^2) \cong H_2(u) \cong \mathbb{Z}$.

Або можна безпосередньо дослідити $i_{uv1*} : H_1(u \cap v) \rightarrow H_1(u)$
(ал-по до застосування Тл. 3 - в.к. до T^2).

Лем. Нехай $f \in C(X, Y)$, $f(x) = y$, $i \Psi_x :$
 $\pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X)$, $\Psi_y : \pi_1(Y, y) \rightarrow H_1(Y)$ - ізоморфізми з Тл. 5.1. Плоді
діаграма $\pi_1(X, x) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y)$ там комутативна (це f_* , f_{1*} -
 $\Psi_x \downarrow$ $H_1(X) \xrightarrow{f_{1*}} H_1(Y) \downarrow \Psi_y$)

эквивалентный та же коммутативный индуцированный диаграмм.)

⇒ Значит, что $\forall [g] \in \pi_1(X, x) \quad \psi_x([g]) = \varphi_g + B_1(X)$

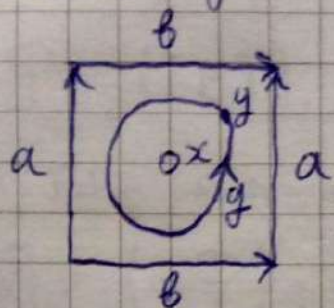
где φ_g — симп. 1-симпл., из $\text{bign. } g$, и аналогично для Y . Тогда $\xrightarrow{(\varphi_1)}$

$$(\varphi_{1*} \circ \psi_x)([g]) = \varphi_{1*}(\varphi_g + B_1(X)) = \varphi_1(\varphi_g) + B_1(Y) \stackrel{(\varphi_1)}{=} \varphi_g \circ g + B_1(Y) =$$

$$= \psi_Y([f \circ g]) = (\psi_Y \circ \varphi_*)([g]). \quad \triangle$$

g нас т.ч. для любой $g \in U \cap V$ $i_{U \cap V, X} \circ \Psi_{U \cap V} = \Psi_U \circ i_{U \cap V, X}$,
 отображение $\Psi_{U \cap V} : \pi_1(U \cap V, g) \rightarrow H_1(U \cap V)$ — изоморфизм, до
 $\pi_1(U \cap V, g) \cong \mathbb{Z}$ абелева (и $U \cap V$ зв'язна), $\text{Hess}_{\text{an}} [g] - i_i'$

мбінна, подто g - перна в g :



$[a] \in [b]$ - мбінні вільні групи $\pi_1(u, g)$. Тоді $i_{uv*}([g]) =$
 $= [i_{uv} \circ g] = [a][b]^{-1}[a]^{-1}[b] \Rightarrow \Psi_u(i_{uv*}([g])) =$
 g як перна в u

$= \Psi_u([a]) - \Psi_u([b]) - \Psi_u([a]) + \Psi_u([b]) = 0$. Тоді, $\Psi_u \circ i_{uv*} = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow i_{uv*} \circ \Psi_{uv} = 0 \Rightarrow [\Psi_{uv} - i_{uv*}] = 0 \Rightarrow i_{uv*} = 0$. Тоді з

точності $0 \rightarrow H_2(T^2) \xrightarrow{\Delta_2} H_1(u \cap v) \xrightarrow{0} H_1(u) \xrightarrow{i_{u*}} H_1(T^2) \rightarrow 0$

Видно, що Δ_2 і i_{u*} - ізоморфізми:

$$H_2(T^2) \cong H_1(u \cap v) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(T^2) \cong H_1(u) \cong \mathbb{Z}^2$$

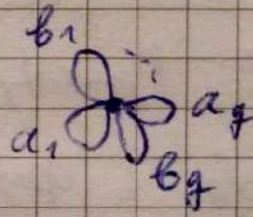
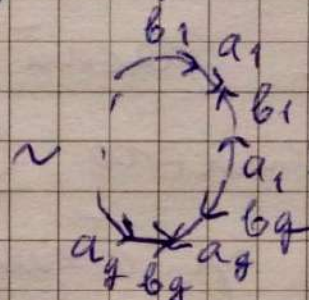
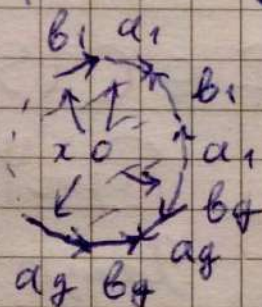
$$\text{Отже, } H_k(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0,2, \\ \mathbb{Z}^2, & k=1, \\ 0 & \text{я ин. вкл.} \end{cases}$$

7. Знайти цілочислові сити, зокремі орієнтовані конт.

зв'язної поверхні $M_g^2 (= T^2 \# \dots \# T^2)$ розу $g > 0$.

Ал-но ~~яко~~ тога $T^2 = M_1^2$, $M_g^2 \setminus \{x\} \sim \underbrace{S^1 \cup \dots \cup S^1}_{2g}$:

для розгортки



малу діаметру

$U = M_g^2 \setminus \{x\}$, V - стягнений диск x , $U \cap V \sim S^1$. Ал-но до T^2 встановлюємо $H_k(M_g^2) = 0$ при $k \geq 3$ ($\cap H_0(M_g^2) \simeq \mathbb{Z}$ за лік. зв.)

$\cap$ зводимо до "суттєвої" частини

$$0 \rightarrow H_2(M_g^2) \xrightarrow{\Delta_2} H_1(U \cap V) \xrightarrow{i_{U \cap V}^*} H_1(U) \oplus 0 \xrightarrow{i_U^*} H_1(M_g^2) \rightarrow 0$$

$\simeq \mathbb{Z} \quad \quad \quad \simeq \mathbb{Z}^{2g}$

$\cap$ далі так само використовуємо Лем. 5.1. : $i_{U \cap V}^* = 0$ (див.

розгортку) $\Rightarrow \Delta_2 \cap i_U^*$ - ізоморфізми. Тл.ч.,

$$H_k(M_g^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0,2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & k=1 \\ 0 & \text{якщо інше.} \end{cases}$$

Зокрема, ейл. хар-ка $\chi(M_g^2) =$

$$= 1 - 2g + 1 = 2 - 2g \quad (\text{для } g=1 \quad \chi(T^2) = 0)$$

8. Впр. 5.7. лекції: показати, що "гомотопічний" і "гомотопічний" степені відрізняються.

Покажемо для $n=1$. Нехай $f \in C(S^1, S^1)$, і $[g]$ - клас
(тут власн. $x \mapsto x$)
Класу $\pi_1(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$. Використаємо лем. Тоді $\Psi := \Psi_{S^1}$ - ізоморфізм,
бо S^1 лін. зв. і функц. гр. абелева. Якщо $\deg f$ - "гомотопічний"
степені, тоді $f_*([g]) = \deg f \cdot [g]$, то $f_{1*}(\Psi([g])) = \Psi(f_*([g]))$
 $= \Psi(\deg f \cdot [g]) = [\Psi - \text{ком-змі}] = \deg f \cdot \Psi([g])$. Але $\Psi([g])$ -
класу $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, бо Ψ - із-м. Тому "гомотопічний" степені $= \deg f$.
Для вищих n дов. аналогічне, де Ψ - із-м Тюрінга.
(Ψ_{S^n})

Д/з. 1. (на оцінку). За допомогою посл. Масна-Вітторіа
знайти гомотопії (сукц.) букетів $S^2 \vee S^1$.

2. (не на оцінку). Знайти цілісесельні сукц. гомотопії
компл. зв. неорієнтованої поверхні роду g ($N_g^2 = \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2}_g$).