

1. До попер. задания: для $X = \mathbb{R}^2$: $L = \{(0,0), (1,2), (-2,1)\}$
 указать слабый ε -комплекс точек для $\varepsilon > 0$:

$$[x_1, x_2] \in W^w(X, L, \varepsilon) \Leftrightarrow \exists x : \begin{cases} \rho(x_1, x) \leq \rho(x_3, x) + \varepsilon \\ \rho(x_2, x) \leq \rho(x_3, x) + \varepsilon \end{cases}$$

$\uparrow$
 слабый
 ε -комплекс

$x_3 \notin \{x_1, x_2\}$

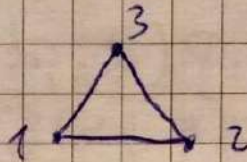
Use max $\forall \varepsilon > 0$: $x = (1,1)$ (also $(0,1)$)

$$[x_1, x_3] \in W^w(X, L, \varepsilon) \Leftrightarrow \exists x : \begin{cases} \rho(x_1, x) \leq \rho(x_2, x) + \varepsilon \\ \rho(x_3, x) \leq \rho(x_2, x) + \varepsilon \end{cases}$$

Знов $\forall \varepsilon > 0$: $x = (-1, 0)$ (або $(-1, 1)$).

$$[x_2, x_3] \in W^w(X, L, \varepsilon) \Leftrightarrow \exists x: \begin{cases} \rho(x_2, x) \leq \rho(x_1, x) + \varepsilon \\ \rho(x_3, x) \leq \rho(x_1, x) + \varepsilon \end{cases}$$

Тим $\varepsilon > 0$ $x = (-1, 2)$.

Тому $W^w(X, L, \varepsilon)$:  $\forall \varepsilon$. Членність $[x_1, x_2, x_3]$ до якої короткото не визначена.

2. Впр. 5.4 лемми. Для сил, гомологій (пр-пу X з коэф. $\neq G$) описати ядро індукції між зм $\neq$ коаналогіях:

$$f_k^*: H^k(Y, G) \rightarrow H^k(X, G) \text{ для } f \in C(X, Y), k \in \mathbb{Z}_+$$

Дані f_k^* індукції позначати f_k^* .

$\forall k$ визначені $f_k: C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$ (лапзот з коэф. $\neq \mathbb{Z}$). Поді $C^k(X, G) = \text{Hom}(C_k(X), G)$ — k -та група спів. комплекс. Спрямовані відображення $\xrightarrow{f_k^*} f^k: C^k(Y, G) \rightarrow C^k(X, G)$: $\forall \varphi \in C^k(Y, G), \varphi: C_k(Y) \rightarrow G, \forall a \in C_k(X)$
 $(f^k \varphi)(a) = \varphi(f_k a) \in G$ Раніше вже показували, що f^k —

зом-зм, а $\{f^k\}$ - морфізми $C^*(Y, G) : C^*(X, G)$.

Потому ^{кор.}важно $\forall k \quad f_*^k : H^k(Y, G) \rightarrow H^k(X, G) :$

$$\varphi \in B^k(Y, G) \mapsto f_*^k \varphi \in B^k(X, G).$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $Z^k(Y, G)$ $Z^k(X, G)$

3 Впр. 5.5. лемми. Показать гомотопичную инвариантность сингулярных когомологий.

Направлѣи докт. показать, что $\forall f, g \in C(X, Y) \quad f \sim g \Rightarrow f_*^k = g_*^k \quad \forall k$.

Дійсно, моги для вз. гомот. одернених $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$:
 $f \circ g \sim id_Y, g \circ f \sim id_X \quad \forall k \quad f_*^k \circ g_*^k = (f \circ g)_*^k = (id_Y)_*^k = id_{H^k(Y, G)},$
 $g_*^k \circ f_*^k = (g \circ f)_*^k = (id_X)_*^k = id_{H^k(X, G)},$ можно
 f_*^k, g_*^k - вз. одернени из-м.

Отмеч, нескѣи $f \sim g$. У доведени Рч. 5.4. показати
 E -на алгебраичної когомології $(\forall G)$ - набути

лем. $\{\mathcal{D}_k: C_k(X, G) \rightarrow C_{k+1}(Y, G)\} \rightarrow C_{k-1}(X, G) \xrightarrow{\partial_{k+1}^X} C_k(X, G) \xrightarrow{\partial_k^X} C_{k-1}(X, G) \rightarrow \dots$
 таких, что

$$f_k - g_k = \mathcal{D}_{k+1}^Y \circ \mathcal{D}_k + \mathcal{D}_{k-1} \circ \partial_k^X$$

 (показали с протал. знаком, а не тут дост. значения знака $\mathcal{D}_k$).
 Замечание, все так для $G = \mathbb{Z}$.

Для алгебраической геометрии требуется для $f_*^k = g_*^k \forall k$?
 лем. $\{\mathcal{D}^k: C^k(Y, G) \rightarrow C^{k+1}(X, G)\} \rightarrow C^{k-1}(Y, G) \xrightarrow{d_Y^{k-1}} C^k(Y, G) \xrightarrow{d_Y^k} C^{k+1}(Y, G) \rightarrow \dots$
 таких, что

$$f^k - g^k = d_X^{k-1} \circ \mathcal{D}^k + \mathcal{D}^{k+1} \circ d_Y^k$$

Далее, пусть $\forall \varphi \in B^k(Y, G)$, где $\varphi \in Z^k(Y, G)$.

$$(f_*^k - g_*^k)(\varphi + B^k(Y, G)) = (f^k - g^k)(\varphi) + B^k(X, G) =$$

$$= \underbrace{d_X^{k-1}(\mathcal{D}^k \varphi)}_{B^k(X, G)} + \mathcal{D}^{k+1}(\underbrace{d_Y^k \varphi}_{0, \text{ так } \varphi \in Z^k}) + B^k(X, G) = B^k(X, G), \text{ поэтому}$$

$$f_*^k = g_*^k$$

Як побудувати $\{\mathcal{D}^k\}$? Використаємо $\{\mathcal{D}_k\}$:

$$\forall \varphi \in C^k(Y, G), \varphi: C_k^{\bullet}(Y) \rightarrow G \quad \forall a \in C_{k-1}(X)$$

$$(\mathcal{D}^k \varphi)(a) := \varphi(\mathcal{D}_{k-1} a) \in G. \quad \mathcal{D}^k \varphi \in C^{k-1}(X, G), \text{ то } \forall a, b \in$$

$$\begin{array}{c} C_{k-1}(X) \quad (\mathcal{D}^k \varphi)(a+b) \quad C_k^{\bullet}(Y) \\ \text{Це так-зм!} \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \mathcal{D}_{k-1}\text{-зм-зм} \quad \varphi\text{-зм-зм} \end{array} \quad \varphi(\mathcal{D}_{k-1} a + \mathcal{D}_{k-1} b) \xrightarrow{\varphi\text{-зм-зм}} \varphi(\mathcal{D}_{k-1} a) + \varphi(\mathcal{D}_{k-1} b) = (\mathcal{D}^k \varphi)(a) + (\mathcal{D}^k \varphi)(b)$$

$$\forall \varphi, \psi \in C^k(Y, G) \quad \forall a \in C_{k-1}(X)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^k(\varphi + \psi))(a) &= (\varphi + \psi)(\mathcal{D}_{k-1} a) = \varphi(\mathcal{D}_{k-1} a) + \psi(\mathcal{D}_{k-1} a) = (\mathcal{D}^k \varphi)(a) + (\mathcal{D}^k \psi)(a) \\ &= (\mathcal{D}^k \varphi + \mathcal{D}^k \psi)(a). \end{aligned}$$

Щоб перевірити, що це алгебра, знаємо, що
визн. кограниць!

$$d_x^k: C^k(X, G) \rightarrow C^{k+1}(X, G): \forall \varphi \in C^k(X, G), \varphi: C_k^{\bullet}(X) \rightarrow G, \\ a \in C_{k+1}(X) \quad (d_x^k \varphi)(a) = \varphi(\partial_{k+1}^x a) \in G, \text{ іди по } d_Y^k.$$

$$\text{Тому } \forall \varphi \in C^k(Y, G), a \in C_k(X)$$

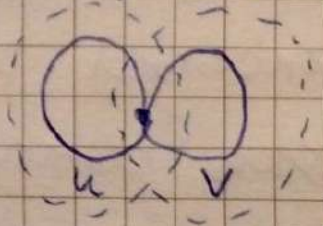
$$\begin{aligned}
 (d_X^{k-1} \circ \mathcal{D}^k + \mathcal{D}^{k+1} \circ d_Y^k)(\varphi)(a) &= (d_X^{k-1}(\mathcal{D}_k^k \varphi))(a) + \\
 &+ (\mathcal{D}^{k+1}(d_Y^k \varphi))(a) = (\mathcal{D}^k \varphi)(\partial_k^X a) + (d_Y^k \varphi)(\mathcal{D}_k a) = \\
 &\quad \substack{\cap \\ C^{k+1}(Y, G)} \quad \substack{\cap \\ C^{k-1}(X, G)} \quad \{\mathcal{D}_k\}\text{-ан. гом.} \\
 &= \varphi(\mathcal{D}_{k-1}(\partial_k^X a)) + \varphi(\partial_{k+1}^Y(\mathcal{D}_k a)) \stackrel{\downarrow}{=} \varphi((f_k - g_k)(a)) = \\
 &= (f^k - g^k)(\varphi)(a), \text{ що й потрібно.}
 \end{aligned}$$

Насправді ми говоримо наступне загальне тв. (з якого вибери гом. інв. когомологій):

Рл. Якщо між морфізмами $\{f_k\}$ і $\{g_k\}$ ланц. комплексів C_*^1 і C_*^2 $\exists$ алгебраїчна гомотопія $\{\mathcal{D}_k\}$, то $\{\mathcal{D}^k : \varphi \mapsto \varphi \circ \mathcal{D}_{k-1}\} \in$ алг. гомотопією морфізмів спрямлених комплексів $\{f^k\} : \{g^k\} (\forall G)$, а отже у когомологіях $f_*^k = g_*^k \forall k$.

Ч. За допомогою посл. Ласера - Вієториса знайти сит. гомології функта $S^1 \vee S^1$.

Розм. покриття (біжур.):



Побито $u = \bigcirc \sim S^1$, $v = \bigcirc \sim S^1$, $u \cap v = x$ єм'я перетину.
 П.ч. $\forall G \ H_k(u, G) \simeq H_k(v, G) \simeq \begin{cases} G, & k=0,1 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$, $H_k(u \cap v, G) \simeq \begin{cases} G, & k=0 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$.

Пам'я посл. М.-В.:

↑
показати в лекціїх
мені за М.-В.

$$\dots \rightarrow H_k(u, G) \oplus H_k(v, G) \rightarrow H_k(S^1 \vee S^1, G) \rightarrow H_k(u \cap v, G) \rightarrow \dots$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{k \geq 2 \quad \text{інакше-інакше} \quad \Delta_1}$

$$\dots H_1(u \cap v, G) \xrightarrow{0} H_1(u, G) \oplus H_1(v, G) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 12 \\ G^2 \end{smallmatrix}} H_1(S^1 \vee S^1, G) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 12 \\ G \end{smallmatrix}} H_0(u \cap v, G) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 12 \\ G \end{smallmatrix}}$$

$(i_{u \cap v, *}, i_{v \cap v, *})$

$$\rightarrow H_0(u, G) \oplus H_0(v, G) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 12 \\ G^2 \end{smallmatrix}} H_0(S^1 \vee S^1, G) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 12 \\ G \end{smallmatrix}} 0.$$

$i_{u \cap v, *} - i_{v \cap v, *}$

Тл.ч., $H_k(S^1 \vee S^1, G) = 0$ при $k > 2$ в силу точности. Крім того, $H_0(S^1 \vee S^1, G) \cong G$, бо цей простір лін. зв. Перейшовши до ізом. груп (взявши спрощення з ізоморфізмами) і записавши відомі ~~визначення~~ гомоморфізми, як у л. 5.11 лекції, маємо точну

$$0 \xrightarrow{\circ} G^2 \xrightarrow{\Delta_1} H_1(S^1 \vee S^1, G) \xrightarrow{\Delta_1} G \xrightarrow{\uparrow \varphi \mapsto (\varphi, \varphi)} G^2 \xrightarrow{\uparrow (\varphi, k) \mapsto \varphi - k} G \rightarrow 0$$

В силу точності, $\text{Im } \Delta_1 = \text{Ker}(\varphi \mapsto (\varphi, \varphi)) = 0$, тобто $\Delta_1 = 0$. Поділяючи за точністю $G^2 \rightarrow H_1(S^1 \vee S^1, G)$ - ізоморфізм (бо його ядро - це образ 0, а образ - ядро $\Delta_1 = 0$, тобто $H_1(S^1 \vee S^1, G)$).

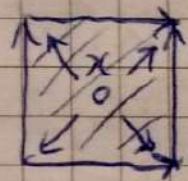
Тл.ч., $H_k(S^1 \vee S^1, G) \cong \begin{cases} G^2, & k=1 \\ G, & k=0 \\ 0 & \text{в інш. випад.} \end{cases}$ Далимо стр.

той же рез-т за допомогою ссил. гомологій.

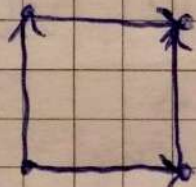
(2/3) За допомогою нас. А-В знайти сир. розміри

$$X = S^T \underbrace{V \dots V}_n S^T$$

(9/3) 6. Знайтимо, що $\forall x \in T^2 \quad T^2 \setminus \{x\} \sim S^1 \vee S^1$:



→
геометр.
ретранзія



~~фрагмент~~ $\cong$
факторизація



~~Використавши~~ Використавши це і посл. л.-в.,
знайти сингулярні гомології двовимірного тора T^2
коєфіцієнтами у цілих числах.