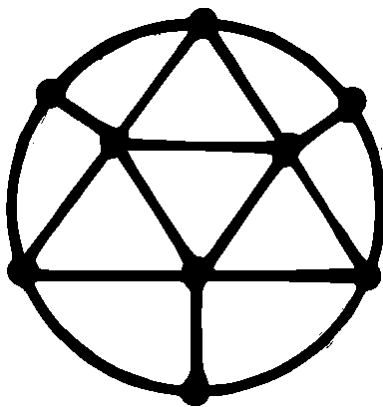


Варіант 1

- Розглянути триангуляцію проєктивної площини $\mathbb{R}P^2$, що зображено на наступному рисунку, та відповідний симпліційний ланцюговий комплекс з коефіцієнтами у цілих числах. Тут ми використовуємо опис $\mathbb{R}P^2$ як замкненого круга D^2 , діаметрально протилежні точки на межі S^1 якого ототожнюються.



- Описати групи ланцюгів $C_0(\mathbb{R}P^2)$, $C_1(\mathbb{R}P^2)$, $C_2(\mathbb{R}P^2)$.
 - Описати граничний гомоморфізм $\partial_2: C_2(\mathbb{R}P^2) \rightarrow C_1(\mathbb{R}P^2)$.
 - Знайти другу групу гомологій $H_2(\mathbb{R}P^2) \simeq Z_2(\mathbb{R}P^2) = \text{Ker } \partial_2$.
 - Знайти друге число Бетті $b_2 = \text{rank } H_2(\mathbb{R}P^2)$.
- Дано наступну множину точок евклідової площини (координати декартові):

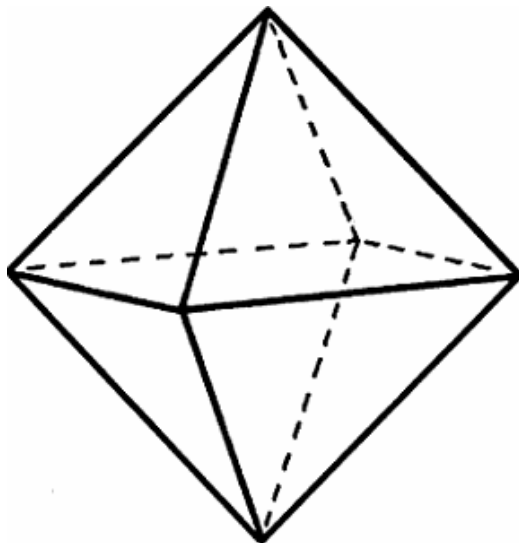
$$X = \left\{ (1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), (-1, 0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\},$$

тобто вершини правильного шестикутника.

- Знайти усі значення параметра $\varepsilon > 0$, у яких комплекс Чеха $\check{C}(X, \varepsilon)$ змінює топологію.
- Описати (зробити рисунки реалізацій) комплекси $\check{C}(X, \varepsilon)$ на проміжках між цими значеннями для $\varepsilon \in (0, 1)$.
- Знайти числа Бетті b_0 і b_1 комплексів $\check{C}(X, \varepsilon)$ на цих проміжках (для груп гомологій з коефіцієнтами у довільному полі).

Варіант 2

1. Розглянути триангуляцію сфери S^2 у вигляді поверхні октаедра, що зображено на наступному рисунку, та відповідний симпліційний ланцюговий комплекс з коефіцієнтами у цілих числах.



- Описати групи ланцюгів $C_0(S^2)$, $C_1(S^2)$, $C_2(S^2)$.
 - Описати граничний гомоморфізм $\partial_2: C_2(S^2) \rightarrow C_1(S^2)$.
 - Знайти другу групу гомологій $H_2(S^2) \simeq Z_2(S^2) = \text{Ker } \partial_2$.
 - Знайти друге число Бетті $b_2 = \text{rank } H_2(S^2)$.
2. Дано наступну множину точок евклідової площини (координати декартові):

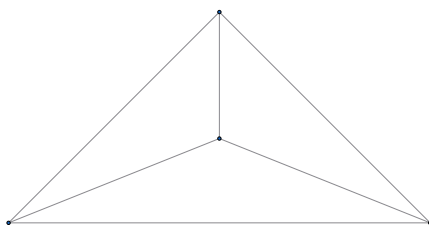
$$X = \left\{ (1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), (-1, 0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\},$$

тобто вершини правильного шестикутника.

- Знайти усі значення параметра $\varepsilon > 0$, у яких комплекс Вієторіса – Ріпса $VR(X, \varepsilon)$ змінює топологію.
- Описати (зробити рисунки реалізацій) комплекси $VR(X, \varepsilon)$ та на проміжках між цими значеннями для $\varepsilon \in (0, 2)$.
- Знайти числа Бетті b_0 і b_1 комплексів $VR(X, \varepsilon)$ на цих проміжках (для груп гомологій з коефіцієнтами у довільному полі).

Варіант 3

1. Розглянути одновимірний симпліційний простір з триангуляцією (симпліційний комплекс) X , що зображено на наступному рисунку, і його симпліційний ланцюговий комплекс з коефіцієнтами у цілих числах.



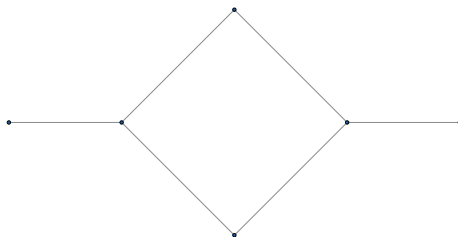
- Описати групи ланцюгів $C_0(X)$, $C_1(X)$.
 - Описати граничний гомоморфізм $\partial_1: C_1(X) \rightarrow C_0(X)$.
 - Знайти першу групу гомологій $H_1(X) \simeq Z_1(X) = \text{Ker } \partial_1$.
 - Знайти перше число Бетті $b_1 = \text{rank } H_1(X)$.
2. Дано наступну множину точок евклідової площини (координати декартові):

$$X = \{(-3, -1), (-3, 1), (3, -1), (3, 1)\}.$$

- Знайти усі значення параметра $\varepsilon > 0$, у яких комплекс Чеха $\check{C}(X, \varepsilon)$ змінює топологію.
- Описати (зробити рисунки реалізацій) комплекси $\check{C}(X, \varepsilon)$ на проміжках між цими значеннями.
- Знайти числа Бетті b_0 і b_1 комплексів $\check{C}(X, \varepsilon)$ на цих проміжках (для груп гомологій з коефіцієнтами у довільному полі).

Варіант 4

1. Розглянути одновимірний симпліційний простір з триангуляцією (симпліційний комплекс) X , що зображено на наступному рисунку, і його симпліційний ланцюговий комплекс з коефіцієнтами у цілих числах.



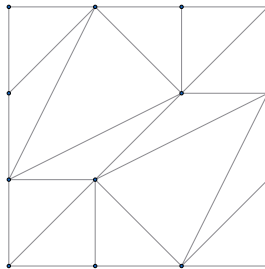
- Описати групи ланцюгів $C_0(X)$, $C_1(X)$.
 - Описати граничний гомоморфізм $\partial_1: C_1(X) \rightarrow C_0(X)$.
 - Знайти першу групу гомологій $H_1(X) \simeq Z_1(X) = \text{Ker } \partial_1$.
 - Знайти перше число Бетті $b_1 = \text{rank } H_1(X)$.
2. Дано наступну множину точок евклідової площини (координати декартові):

$$X = \{(-3, -1), (-3, 1), (3, -1), (3, 1)\}.$$

- Знайти усі значення параметра $\varepsilon > 0$, у яких комплекс Вієторіса – Ріпса $VR(X, \varepsilon)$ змінює топологію.
- Описати (зробити рисунки реалізацій) комплекси $VR(X, \varepsilon)$ та на проміжках між цими значеннями.
- Знайти числа Бетті b_0 і b_1 комплексів $VR(X, \varepsilon)$ на цих проміжках (для груп гомологій з коефіцієнтами у довільному полі).

Варіант 5

1. Розглянути триангуляцію тора T^2 , що зображено на наступному рисунку, та відповідний симпліційний ланцюговий комплекс з коефіцієнтами у цілих числах. Тут ми використовуємо опис T^2 як квадрата з ототожненими точками на сторонах.



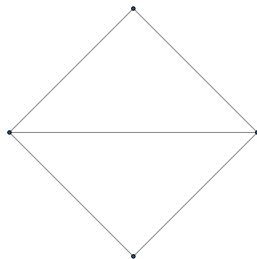
- Описати групи ланцюгів $C_0(T^2)$, $C_1(T^2)$, $C_2(T^2)$.
 - Описати граничний гомоморфізм $\partial_2: C_2(T^2) \rightarrow C_1(T^2)$.
 - Знайти другу групу гомологій $H_2(T^2) \simeq Z_2(T^2) = \text{Ker } \partial_2$.
 - Знайти друге число Бетті $b_2 = \text{rank } H_2(T^2)$.
2. Дано наступну множину точок евклідової площини (координати декартові):

$$X = \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}.$$

- Знайти усі значення параметра $\varepsilon > 0$, у яких комплекс Чеха $\check{C}(X, \varepsilon)$ змінює топологію.
- Описати (зробити рисунки реалізацій) комплекси $\check{C}(X, \varepsilon)$ на проміжках між цими значеннями.
- Знайти числа Бетті b_0 і b_1 комплексів $\check{C}(X, \varepsilon)$ на цих проміжках (для груп гомологій з коефіцієнтами у довільному полі).

Варіант 6

1. Розглянути одновимірний симпліційний простір з триангуляцією (симпліційний комплекс) X , що зображено на наступному рисунку, і його симпліційний ланцюговий комплекс з коефіцієнтами у цілих числах.



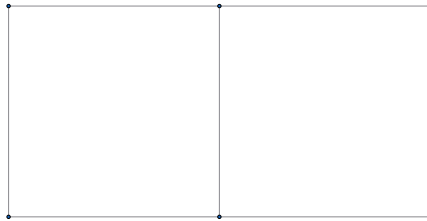
- Описати групи ланцюгів $C_0(X)$, $C_1(X)$.
 - Описати граничний гомоморфізм $\partial_1: C_1(X) \rightarrow C_0(X)$.
 - Знайти першу групу гомологій $H_1(X) \simeq Z_1(X) = \text{Ker } \partial_1$.
 - Знайти перше число Бетті $b_1 = \text{rank } H_1(X)$.
2. Дано наступну множину точок евклідової площини (координати декартові):

$$X = \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}.$$

- Знайти усі значення параметра $\varepsilon > 0$, у яких комплекс Вієторіса – Ріпса $VR(X, \varepsilon)$ змінює топологію.
- Описати (зробити рисунки реалізацій) комплекси $VR(X, \varepsilon)$ та на проміжках між цими значеннями.
- Знайти числа Бетті b_0 і b_1 комплексів $VR(X, \varepsilon)$ на цих проміжках (для груп гомологій з коефіцієнтами у довільному полі).

Варіант 7

1. Розглянути одновимірний симпліційний простір з триангуляцією (симпліційний комплекс) X , що зображено на наступному рисунку, і його симпліційний ланцюговий комплекс з коефіцієнтами у цілих числах.



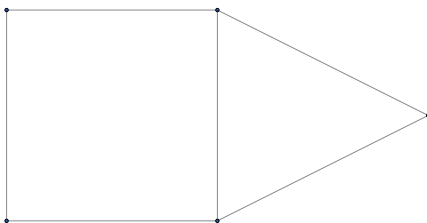
- Описати групи ланцюгів $C_0(X)$, $C_1(X)$.
 - Описати граничний гомоморфізм $\partial_1: C_1(X) \rightarrow C_0(X)$.
 - Знайти першу групу гомологій $H_1(X) \simeq Z_1(X) = \text{Ker } \partial_1$.
 - Знайти перше число Бетті $b_1 = \text{rank } H_1(X)$.
2. Дано наступну множину точок евклідової площини (координати декартові):

$$X = \{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}.$$

- Знайти усі значення параметра $\varepsilon > 0$, у яких комплекс Чеха $\check{C}(X, \varepsilon)$ змінює топологію.
- Описати (зробити рисунки реалізацій) комплекси $\check{C}(X, \varepsilon)$ на проміжках між цими значеннями.
- Знайти числа Бетті b_0 і b_1 комплексів $\check{C}(X, \varepsilon)$ на цих проміжках (для груп гомологій з коефіцієнтами у довільному полі).

Варіант 8

1. Розглянути одновимірний симпліційний простір з триангуляцією (симпліційний комплекс) X , що зображено на наступному рисунку, і його симпліційний ланцюговий комплекс з коефіцієнтами у цілих числах.



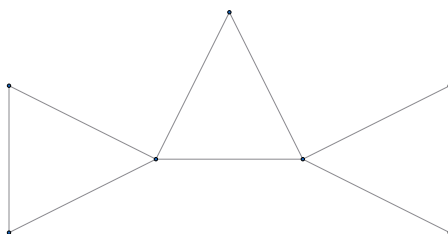
- Описати групи ланцюгів $C_0(X)$, $C_1(X)$.
 - Описати граничний гомоморфізм $\partial_1: C_1(X) \rightarrow C_0(X)$.
 - Знайти першу групу гомологій $H_1(X) \simeq Z_1(X) = \text{Ker } \partial_1$.
 - Знайти перше число Бетті $b_1 = \text{rank } H_1(X)$.
2. Дано наступну множину точок евклідової площини (координати декартові):

$$X = \{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}.$$

- Знайти усі значення параметра $\varepsilon > 0$, у яких комплекс Вієторіса – Ріпса $VR(X, \varepsilon)$ змінює топологію.
- Описати (зробити рисунки реалізацій) комплекси $VR(X, \varepsilon)$ та на проміжках між цими значеннями.
- Знайти числа Бетті b_0 і b_1 комплексів $VR(X, \varepsilon)$ на цих проміжках (для груп гомологій з коефіцієнтами у довільному полі).

Варіант 9

1. Розглянути одновимірний симпліційний простір з триангуляцією (симпліційний комплекс) X , що зображено на наступному рисунку, і його симпліційний ланцюговий комплекс з коефіцієнтами у цілих числах.



- Описати групи ланцюгів $C_0(X)$, $C_1(X)$.
 - Описати граничний гомоморфізм $\partial_1: C_1(X) \rightarrow C_0(X)$.
 - Знайти першу групу гомологій $H_1(X) \simeq Z_1(X) = \text{Ker } \partial_1$.
 - Знайти перше число Бетті $b_1 = \text{rank } H_1(X)$.
2. Дано наступну множину точок евклідової площини (координати декартові):

$$X = \{(0, 0), (1, 0), (2, 1), (-1, 1)\}.$$

- Знайти усі значення параметра $\varepsilon > 0$, у яких комплекс Чеха $\check{C}(X, \varepsilon)$ змінює топологію.
- Описати (зробити рисунки реалізацій) комплекси $\check{C}(X, \varepsilon)$ на проміжках між цими значеннями.
- Знайти числа Бетті b_0 і b_1 комплексів $\check{C}(X, \varepsilon)$ на цих проміжках (для груп гомологій з коефіцієнтами у довільному полі).