

3. Інваріантність ℓ_d відкр. замикає параметра (не тільки лінійності) викликає з дов.: на довільних місцях вони не викликають.

4. Якщо $x \in U$ - відкр., то $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U$. Тоді $\forall \gamma \in C([a, b])$
 x) якщо $\gamma(a) = x$ і $\gamma(b) \notin U$, то $\ell_d(\gamma) > d(\gamma(a), \gamma(b)) > \varepsilon$.

Тепер перевіряємо напівнеперервність. Нехай $\gamma_n \rightarrow \gamma$ на $[a, b]$ поточково. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists$ розд. $T = \{t_i\}_{i=0}^m$ відкр. $[a, b]$ таке, що
 $\ell_d(\gamma) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_T(\gamma) \leq \ell_d(\gamma)$. За поточк. збіжністю $\exists N : \forall n > N$
 $\forall i = \overline{0, m} \quad d(\gamma_n(t_i), \gamma(t_i)) < \frac{\varepsilon}{4m}$ (просто взятиме наїдилове N
 для всіх i). За пер. тр-ка, $\forall i = \overline{1, m} \quad \forall n > N$

$$d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \leq d(\gamma(t_{i-1}), \gamma_n(t_{i-1})) + d(\gamma_n(t_{i-1}), \gamma_n(t_i)) + d(\gamma_n(t_i), \gamma(t_i)) < d(\gamma_n(t_{i-1}), \gamma_n(t_i)) + \frac{\varepsilon}{2m}.$$

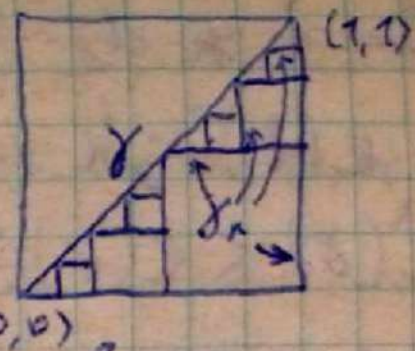
Додамо за i :

$$\ell_d(\gamma) < \sum_T(\gamma) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_T(\gamma_n) + \varepsilon \leq \ell_d(\gamma_n) + \varepsilon.$$

Тим $\varepsilon \rightarrow 0$ отримувемо потрібну нерівність. $\blacktriangle$

Рем. Неперервності відкр. поточної збіжності, взагалі

какими, не буде: розглянемо приклад "сходи"



γ_n і діагоналі γ у $\mathbb{R}^2$ з евкл. м-кою:

$\gamma_n \rightarrow \gamma$ поточково, $\forall n \quad l_d(\gamma_n) = 2$, але $l_d(\gamma) = \sqrt{2}$.

Рем. Нехай метр (X, Γ, ℓ) - ПБМ і d_ℓ - його внутр. м-ка.

Потім для метр. пр-гу (X, d_ℓ) (взаємні кансули, розширеною; звичайною у зв'язну випадку) наведе деб. далі для нової ф-ї зв'язності $\hat{\ell} := l_{d_\ell}$ і нової внутр. м-ки $\hat{d} := d_{\hat{\ell}}$ etc.

Априорі отримаємо несиметричну посл. ф-цій і метрику. Але }
насправді це не так: (Потім $(X, \hat{\Gamma}, \hat{\ell})$ - ПБМ, де $\hat{\Gamma}$ - усі множини, за Рл. 1.)

Рл. 2 у ПБМ (X, Γ, ℓ) якщо $\hat{\ell} = l_{d_\ell}$, то $d_{\hat{\ell}} = d_\ell$. Крім того, $\hat{\ell}(x) \leq \ell(x) \quad \forall x \in \Gamma$.

► Нехай $x \in \Gamma$, $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ і $\Gamma = \{t_i\}_{i=0}^m$ - розбиття $[a, b]$. $\forall i = \overline{1, m} \quad d_\ell(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \leq \ell(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]})$ за деб. d_ℓ , бо $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in \Gamma$ і з'єднує $\gamma(t_{i-1})$ і $\gamma(t_i)$.

Оскільки, $\forall d_e \quad \Sigma_{\Gamma}(x) = \sum_{i=1}^m d_e(x(t_{i-1}), x(t_i)) \leq \sum_{i=1}^m l(x|_{[t_{i-1}, t_i]}) =$
 $= l(x)$ за адитивності l . Переходячи до суп за Γ , маємо
 $\hat{e}(x) \leq l(x)$. Також за лев. внутр. м-ки $d_{\hat{e}} \leq d_e$ (бо $\forall x \in \Gamma$,
 що $z' \in \gamma \cap x$ і $y \in X$, допустимий і для $\hat{e}$, а його довжина
 $\text{sign. } \hat{e}$ не більша ніж $\text{sign. } l$). З іншого боку, $\forall x, y \in X$
 $\forall \gamma \in C([a, b], X)$ такого, що $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$, $\hat{e}(x) \geq d_e(x, y)$
 за власт. $\hat{e}$ з Ри.1. Переходячи до інф, маємо $d_{\hat{e}}(x, y) \geq d_e(x, y)$. Δ

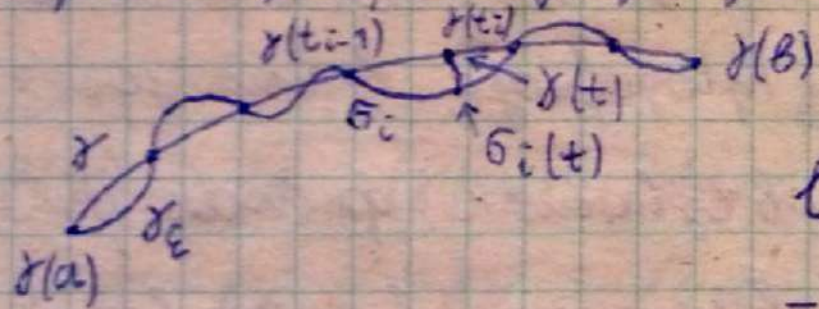
Ри.3. Якщо γ ПБМ (X, Γ, l) і напівнеперервний знизу,
 то $\forall \gamma \in \Gamma \quad l(x) = \hat{e}(x)$ (де, як і раніше, $\hat{e} = l_{d_e}$).

$\Rightarrow \hat{e}(x) \leq l(x)$ за Ри.2, залишилося перевірити $l(x) \leq \hat{e}(x)$.

Нехай $\gamma: [a, b] \rightarrow X$. $\forall \varepsilon > 0 \exists$ розбиття $\Gamma = \{t_i\}_{i=0}^m$ sign.
 $[a, b]$ таке, що $l(x|_{[t_{i-1}, t_i]}) < \varepsilon \quad \forall i = \overline{1, m}$ (згідно, покрит-
 твом $[0, l(x)]$ інтервалами довжини ε і нехай $\delta > 0$ - число
 Лебега мощн. образа цього покр. на $[a, b]$ під дією непер.

(за deb. ℓ) φ -yii $t \mapsto \ell(\gamma|_{[a,t]})$; моги гда $t_i := \frac{i}{m}$, ге $\frac{1}{m} < \delta$,
 $\forall i = \overline{1, m}$ за леном ледера $\ell(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) \underset{\uparrow}{=} \ell(\gamma|_{[a, t_i]}) - \ell(\gamma|_{[a, t_{i-1}]})$
 $< \varepsilon$, до $t_i - t_{i-1} < \delta$). (агументацмо ℓ)

За deb. d_ℓ , $\forall i = \overline{1, m} \exists \sigma_i \in \Gamma$, $\sigma_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow X$ максим, ко
 $\sigma_i(t_{i-1}) = \gamma(t_{i-1})$, $\sigma_i(t_i) = \gamma(t_i)$ и $\ell(\sigma_i) \leq d_\ell(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) + \frac{\varepsilon}{m}$.
 (область визнач. консна зробиати максим за ген. ливитиної зариву
 параметра, як у введених вище). Позначимо $\gamma_\varepsilon := \sigma_1 * \dots * \sigma_m$:



$[a, b] \rightarrow X$, $\forall \varepsilon \in \Gamma$. За агументацмо ℓ ,

$$\ell(\gamma_\varepsilon) = \sum_{i=1}^m \ell(\sigma_i) \leq \sum_{i=1}^m d_\ell(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) + \varepsilon =$$

$$= \sum_j \ell(\gamma) + \varepsilon \leq [\text{deb. } \hat{\ell}] \leq \hat{\ell}(\gamma) + \varepsilon.$$

При цьому $\forall i = \overline{1, m} \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ за нер-сно мн-ка і deb. d_ℓ :

$$d_\ell(\underbrace{\gamma_\varepsilon(t)}_{\sigma_i(t)}, \gamma(t)) \leq d_\ell(\underbrace{\sigma_i(t)}_{\sigma_i(t)}, \gamma(t_i)) + d_\ell(\gamma(t_i), \gamma(t)) \leq \ell(\sigma_i|_{[t, t_i]}) +$$

$$+ \ell(\gamma|_{[t, t_i]}) \leq \ell(\sigma_i) + \ell(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) \leq d_\ell(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) + \frac{\varepsilon}{m} + \ell(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) \leq$$

$$\leq 2 \ell(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) + \frac{\varepsilon}{n} < 3\varepsilon.$$

Звідси, $\gamma_\varepsilon \rightarrow \gamma$ поточково при $\varepsilon \rightarrow 0$ (тако, наприклад, $\gamma_{\frac{1}{n}} \rightarrow \gamma$) у топології d_ℓ , а отже і в слабшій вихідній топ. X . Тоді за напівнеперервністю знизу і отримано нер-стю,

$$\ell(\gamma) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ell(\gamma_\varepsilon) \leq \hat{\ell}(\gamma)$$

(знову ж можна покласти $\varepsilon = \frac{1}{n}$ і отримати посл-ть шляхів). $\triangle$
 Гпр. Що буде, якщо деякі з цих шляхів неспрямлені?

Рем. Отже, для ПБМ з напівнеперервним знизу $\ell \in \text{lim inf}$ одна внутр. м-ка (d_ℓ) , а $\hat{\ell} = \ell d_\ell$ продовжує ℓ на усі шляхи. У подальшому будемо за задоведенням ф. лог дов-кати вважати $\hat{\ell}$ (у випадку, коли вихідний ℓ напівнепр. знизу).

Ех. Для річковою (зокрема евклідовою) випадку: якщо к-м. $(k \geq 1)$ $\gamma_n : [a, b] \rightarrow M$ збігаються до к-м. $(k \geq 1)$ $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ поточково (у к-м. річковому (M, d)), то

нехай t_0 належить до проміжків щільності усіх $t_n \in T$.
 Множина мажор t_0 - це $[a, b]$ без $\leq$ злім. множини (множів
 проміжків щільності усіх $t_n \in T$). Для таких $t_0 \in E^m \forall n$

$$\gamma'_n(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma_n(t) - \gamma_n(t_0)}{t - t_0}$$
 (де t дост. близькі до t_0 , щоб
 нех брину γ пром. щільності). У зог. (M, g) використовую
 лок. коорд. в околі $\gamma(t_0)$ (де містяться також $\gamma_n(t_0)$ поч.
 з деякого моменту), тоді нашу транзитну мову можна записати
 для векторів з $\mathcal{F}$ -їм лок. коорд. задань дмс кривих.
 У ан-норму сенси $\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$. Нехай $\varepsilon > 0$
 довільне і $\delta > 0$ - з дов. цієї транзити, тобто $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left| \gamma'(t_0) - \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right| < \frac{\varepsilon}{6}$. Тим і гай $|\cdot|$ - евал.
 норма для E^m і $\sqrt{g(\cdot, \cdot)}$ для (M, g) (що можна записати

у лок. коорд.). Зокр., $\left| \left| \gamma'(t_0) \right| - \left| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right| \right| < \frac{\varepsilon}{6}$ за нек.

н.-м. Фіксуємо $\forall$ мале t , і нехай $N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$

$$|\gamma(t) - \gamma_n(t)| < \frac{\varepsilon}{6} |t - t_0|, \quad |\gamma(t_0) - \gamma_n(t_0)| < \frac{\varepsilon}{6} |t - t_0|. \text{ Може}$$

для деякого ε^m

(з помічч. $\uparrow$ з'єднаності)

$$\begin{aligned} |\gamma'(t_0)| &< \frac{1}{|t - t_0|} \left(|\gamma(t) - \gamma(t_0)| + \frac{\varepsilon}{6} |t - t_0| \right) \leq \frac{1}{|t - t_0|} \left(|\gamma(t) - \gamma_n(t)| + \right. \\ &+ |\gamma_n(t) - \gamma_n(t_0)| + |\gamma_n(t_0) - \gamma(t_0)| + \frac{\varepsilon}{6} |t - t_0| \Big) \leq [n > N] \leq \\ &\leq \left| \frac{\gamma_n(t) - \gamma_n(t_0)}{t - t_0} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \underbrace{\left(\text{для } \frac{\varepsilon}{2} \right)} \end{aligned}$$

$\forall n > N$ нехай менше $\delta_n^{>0}$ з дов. границі для γ_n' .

Можемо вважати $\delta_n < \delta$ і $|t - t_0| < \delta_n$:

$$\leq |\gamma_n'(t_0)| + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = |\gamma_n'(t_0)| + \varepsilon.$$

Вир. Узагальнимо це твердження на $\forall (M, g)$, використову-
ючи лок. коорд. і неперервну залежність g_p від p .

Пл. 4, справувавши $\varepsilon \rightarrow 0$ (як у дов. Рм.1.) маємо

$$|\gamma'(t)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma'_n(t)|$$

Для всіх $t \in [a, b]$ крім деякої $\leq$ зліч. підмножини.

Путь φ -ція зліва інтегровна за Риманом, бо куск. непрер-
вна, справа - взагалі куск. н, але випірнана на $[a, b]$.

Чи φ -ція ≥ 0 , тому можна застосувати лему Раму:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma'_n(t)| dt \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\gamma'_n(t)| dt = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n).$$

Путь φ -ція інтеграл - взагалі куск. н, інт. Лебега, а
 $|\gamma'_n(t)| \forall n$ знову інтегровні за Риманом на $[a, b]$ як куск.
непер.

Сол. L напівнепер. знову, і побудована конструкція
розширяє його на всі непер. н. Це також виправдовує
викор. нерівності $L(\gamma) \geq d_e(\gamma(a), \gamma(b))$ вище (у евл. випадку).
Впр. Розглянути інші приклади, що були раніше (зокрема,
субліментарній та різноточивій функціонали).

Лем. Нехай γ ПВМ X $\gamma \in C([a, b], X)$ - спрямний. Аналогічно до ріманового випадку (і регулярною шліху) можна розглянути його "натуральний параметр" $s = \varphi(t) := \ell(\gamma|_{[a, t]})$. Події $\varphi: [a, b] \rightarrow [0, \ell(\gamma)]$ неперервна і неспадає (див. дов. Рл. 1.) за власт. ℓ . При цьому $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ для $t_1 \leq t_2$ означає, що $0 = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \ell(\gamma|_{[a, t_2]}) - \ell(\gamma|_{[a, t_1]}) = [\text{agg. } \ell] = \ell(\gamma|_{[t_1, t_2]}) \geq [\text{div } d_\ell] \geq d_\ell(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \Rightarrow \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Аж-но $\forall t \in [t_1, t_2]$ $\varphi(t) = \varphi(t_1)$ (бо φ неспадає), тому $\gamma(t) = \gamma(t_1)$. Тобто γ постійний на $[t_1, t_2]$. Можливо придбати цю проблему наступним чином:

Рл. 4. Для спрямного $\gamma \in C([a, b], X)$ і $\varphi(t) = \ell(\gamma|_{[a, t]})$ існує $\mu \in C([0, \ell(\gamma)], X)$ такий, що $\gamma = \mu \circ \varphi$, і натурально параметризований: $\forall s \in [0, \ell(\gamma)] \quad \ell(\mu|_{[0, s]}) = s$ (зокрема, $\ell(\mu) = \ell(\gamma)$)
 $\Rightarrow \forall s \in [0, \ell(\gamma)]$ нехай $\psi(s)$ - являє $t \in [a, b]$ таке, що $s = \varphi(t)$ (тобто $\varphi(\psi(s)) = s \quad \forall s$).

Отримано $\Psi: [0, \ell(\gamma)] \rightarrow [a, b]$ - взаємні кансуни, не неперер-
вну (але строго зростаючу - Впр.). Покладено $\mu := \gamma \circ \Psi$.

За побудовою, $\forall t \in [a, b]$ $\varphi(\Psi(\varphi(t))) = \varphi(t)$, тому за Рем.

вище, $\gamma(t) = \gamma(\Psi(\varphi(t))) = \mu(\varphi(t))$. Отже, $\gamma = \mu \circ \varphi$. $\forall s_1, s_2 \in$
 $[0, \ell(\gamma)]$, $s_1 \leq s_2$ за лев. d_e :

$$d_e(\mu(s_1), \mu(s_2)) = d_e(\gamma(\Psi(s_1)), \gamma(\Psi(s_2))) \leq \ell(\gamma|_{[\Psi(s_1), \Psi(s_2)]}) = [\text{лев. } \varphi] = \\ = \varphi(\Psi(s_2)) - \varphi(\Psi(s_1)) = s_2 - s_1.$$

Звичайно, для $s_1 \geq s_2$ справе буде $s_1 - s_2$. Отже, μ - лінійне
відобн. (вигн. d_e), а тому неперервне. $\forall s$ за лев. φ маємо

$$\ell(\mu|_{[0, s]}) = \ell(\gamma|_{[\Psi(0), \Psi(s)]}) = \varphi(\Psi(s)) - \varphi(\Psi(0)) = s - 0 = s.$$

Зокрема, при $s = \ell(\gamma)$ маємо $\ell(\mu) = \ell(\mu|_{[0, \ell(\gamma)]}) = \ell(\gamma)$. Δ

Впр. Як можуть відрізнятися різні μ , що задов. умовам Рл. 4?

Рем. У подальшому μ з Рл. 4 будемо називати канонич-
ною (пере)параметризацией γ . Оскільки вона має ту ж

довільну, вона зберігає, наприклад, властивість бути найкоротшою.
Ex. Діагональ мет. параметризації.

Def. Найкоротший шлях є спрямованим: якщо $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ -найкор., то $\gamma(a)$ і $\gamma(b)$ лежать в одній конн. лік. зв'язності (як завжди, в топ. д.е), яка є конн. скінченності, тому
$$L(\gamma) = d_e(\gamma(a), \gamma(b)) < +\infty$$

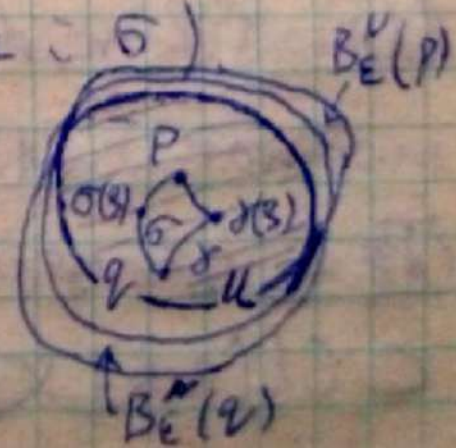
def. Крива $\gamma \in C(I, X)$ у ПБМ X , де $I \subset \mathbb{R}$ -проміжок, будемо зважити найкоротшою, якщо $\forall [a, b] \subset I$ $\gamma|_{[a, b]}$ -найкор. шлях.

Rem. Звичайно, самі найкор. шляхи задов. умову def.: $\gamma \in C([a, b], X)$ -найкор. $\Rightarrow \forall [c, d] \subset [a, b]$ $\gamma|_{[c, d]}$ найкор., як-но до lem. в метріку варіацій.

Рч. 5. Крива (M, g) -річ. лік. (к-м., $k \geq 3$), $\gamma \in C(I, M)$ -найкоротша. Поді після заміни параметра γ перетворюється на геодезичну (зокрема, на регулярну, якщо вона не є постійною).

Лем. Потрібно ми реалізувати необхідну умову, встановлену у 2
 поперед. темах, з кусково гладкою випадку на неперервній. Залиши-
 лися тут допускатися як у Рл. 7.

► В силу Рл. 3. поперед. теми, $\forall t \in I \exists$ функ. $U \ni \gamma(t) : \epsilon > 0$
 такі, що $U \in B_\epsilon^N(P) \forall p \in U$. Оберемо $a < b$ так, що $t \in [a, b] \subset I$
 і $\gamma([a, b]) \subset U \subset B_\epsilon^N(P)$, де $P = \gamma(a)$. Нехай σ - геодезична,
 що з'єднує P і $q = \gamma(b)$ у $B_\epsilon^N(P)$ (як зазначено з Рл. 4. поперед.
 теми, це єдина з точністю до залиши пар. найкоротша, що
 їх з'єднує). Перейдемо до наш. параметризації $\gamma|_{[a, b]} \subset \sigma$ і
 вважатимемо тепер $\gamma, \sigma : [0, l_0] \rightarrow M$, де $l_0 = d_e(P, q)$ ($\gamma|_{[a, b]}$ -
 тепер найкоротша за довж., тому має довжину l_0 , як і σ).
 $\nexists \tau \in [0, l_0] : \sigma(\tau) \neq \gamma(\tau)$. Оскільки $\gamma(\tau) \in U \subset$
 $B_\epsilon^N(P) \cap B_\epsilon^N(q)$, $\exists$ наш. параметризовані
 найкоротші геодезичні $\mu : [0, \delta] \rightarrow B_\epsilon^N(P)$ і



$\gamma : [0, l_0] \rightarrow B_\varepsilon^N(q)$ такі, що $\mu(0) = p$, $\mu(s) = \gamma(s) = \gamma(s) \cap$
 $\gamma(l_0) = q$. Тоді $\mu * \gamma : [0, l_0] \rightarrow M$ - куск. гладкий кат.
 парам. шнур, що $z' \in \gamma \cap p \cap q \in B_\varepsilon^N(p)$

та має довжину $l_0 = d_e(p, q)$, тобто є найкоротшим. В
 силу єдиності, $\mu * \gamma = \gamma$, звідси, $\gamma(s) = (\mu * \gamma)(s) = \gamma(s) \downarrow$.
 Отже $\gamma|_{[a, b]}$ - геодезична лінія переходу до кат. пар. За-
 мінимося зробити так в околі $\forall$ точки. $\triangle$

Рч.6. Якщо $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset C([a, b], X)$ - найкоротший у ПВМ X , і
 $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma \in C([a, b], X)$ поточково, то γ - найкоротша.

$\Rightarrow \forall n$ γ_n - найкор. $\Leftrightarrow l(\gamma_n) = d_e(\gamma_n(a), \gamma_n(b))$. l - напіввек. з'явля.
 $l(\gamma) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_e(\gamma_n(a), \gamma_n(b)) = [\text{нерів. } d_e] = d_e(\gamma(a), \gamma(b)) \leq [\text{дов. } d_e] \leq l(\gamma)$,
 тобто $l(\gamma) = d_e(\gamma(a), \gamma(b)) \Rightarrow \gamma$ - найкор. $\triangle$

Тл.1. (Арцела - Асколі). Кожна X - компактний ПВМ, $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset$
 $C([a, b], X)$ - посл. шнурів з рівномірно обмеженими

доведенням: $\exists C > 0$ таке, що $\ell(\gamma_n) \leq C \forall n$. Тоді з $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$
 $\exists$ підпослідовність $\{\gamma_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, що рівномірно збігається до
 $\gamma \in C([a, b], X)$: $\forall \varepsilon > 0 \exists K: \forall k \geq K \forall t \in [a, b] d_c(\gamma_{n_k}(t), \gamma(t)) < \varepsilon$.

В Дов. В. - В. - 7. або Впр. - довести ас-но теоремі 1.1.

для φ -гнї (хоча δ поточкову збігність). Δ

Рл. 7. Нехай X - компактний ПБМ. $\forall x, y \in X$, що належать
одній зв'язній компоненті, $\exists$ найкоротша, що їх з'єднує.

Рем. x і y в одній комп. (ліа.) зв-сті $\Leftrightarrow d_c(x, y) < +\infty$.

В За дов. де $\forall n \in \mathbb{N} \exists$ шлях γ_n , що з'єднує x і y , і

$$d_c(x, y) \leq \ell(\gamma_n) < d_c(x, y) + \frac{1}{n}.$$

Заміняючи параметри (канонічно, лінійно), можна вважати,
що $\forall n \gamma_n \in C([a, b], X)$. Тоді за Тл. 1. $\exists$ рівномірно

(зокрема поточково) збіжна підпосл. $\gamma_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \gamma$, де $\gamma \in C([a, b], X)$,

$$\gamma(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{n_k}(a) = x, \gamma(b) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{n_k}(b) = y, \text{ і}$$

$d_e(x, y) \leq [\text{deb. } d_e] \leq \ell(\gamma) \leq [\text{найвищий} \text{ знизу}] \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \ell(\gamma_{n_k}) \leq [\text{найвищий} \text{ вгору}] \leq d_e(x, y)$, отже $\ell(\gamma) = d_e(x, y) \Rightarrow \gamma$ - найкоротша. $\triangle$

def. Метричний простір зветься обмежено компактним, якщо $\forall$ його обмежена замкнена підмножина компактна.

Rem. Обмежене відрізне $\forall$ метр. пр-ру.

Ex. $\mathbb{R}^n$, компактні простори (тут і обмеженість не потрібна).

$(0, 1)$ з евл. n -кою не є обм. комп. (бо він сам некомпактний, але обмежений і замкнений в собі).

Рч. 8. Нехай X - метр. простір зі скінченною n -кою (не розширений). Наступні тв. еквівалентні:

► 1. X обм. компактний

2. $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{D}_\varepsilon(x)$ компактна

3. $\exists x \in X : \forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{D}_\varepsilon(x)$ компактна

► 1. $\Rightarrow$ 2. вірно, бо $\mathcal{D}_\varepsilon(x)$ обмежена і замкнена; 2. $\Rightarrow$ 3. очевидно

3. $\Rightarrow$ 1. : $\forall$ обм. замкн. $\mathcal{Q} \subset X \exists \varepsilon > 0$ таке, що $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_\varepsilon(x)$.

Оскільки це замкн. підмн. компакта, $\mathcal{Q}$ - компакт. $\triangle$

Рем. Поняття обмеженості ($\exists x \in X, \varepsilon > 0 : \mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_\varepsilon(x)$) і обмеженої комп. мають сенс і для розширеної n -ми, і там

1 $\Leftrightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3., але, взагалі кажучи, 3. $\nRightarrow$ 1.

Рч.9. Кожна X - обмежено компактний ПБМ. $\forall x, y \in X$, що належать одній зв'язній компоненті, $\exists$ найкоротша, що їх з'єднує.

$\Rightarrow$ Отже, $d_c(x, y) < +\infty \Rightarrow y \in \mathcal{Q}_{d_c(x, y)}(x)$ - компакт в силу обмеж. комп. X . Поді $\exists$ -на найкоротшої випливає з Рч.7.

(на $\mathcal{Q}_{d_c(x, y)}$ розм. індуковану внутр. n -ю). $\triangle$

дов. Криву $\gamma \in C(I, X)$ у ПБМ X будемо звати геодезичною, якщо $\forall t \in I \exists a < b$ такі, що $t \in [a, b] \subset I$ і $\gamma|_{[a, b]}$ - найкоротша.

Ех.1. Найкоротші (у них усі відр. - найкор.).

2. У рімановому випадку це в точності ріманові

геодезичні (з результатів поперед. теми і Рч. 5.), звичайно,
з точністю до заміни параметра.

~~Відома теорема: якщо X — метричний простір, то X компактно тоді і тільки тоді, коли X повністю скінченний.~~

def. Нехай X — метр. простір. $U \subset X$ наз. передкомпактною, якщо $\bar{U}$ — компакт. X наз. локально компактною, якщо $\forall x \in X$
 $\exists$ відкритий ^и передкомпакт $U \ni x$.

Ex. Компактні; многовиди (Втр.), зокрема $\mathbb{R}^n$.

Th. 1. (Холл, Вілов, Кон-Россен).

Нехай X — метр. компактний зв'язний ПБМ. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1. X повний.

2. X обмежено компактний.

3. $\forall x \in X \exists$ натурально параметризованої геодезичної
 $\gamma: [0, a) \rightarrow X: \gamma(0) = x \exists$ її неперервне продовження $\bar{\gamma}: [0, a] \rightarrow X$.

4. $\exists x \in X: \forall$ конт. параметризованої геодезичної $\gamma: [0, a) \rightarrow X$:
 $\gamma(0) = x \quad \exists$ ii непер. продовження $\bar{\gamma}: [0, a] \rightarrow X$.

~~Вказується~~ Якщо виконується будь-яке з цих тверджень, то
 $\forall x, y \in X \exists$ найкоротша, що з'єднує x і y .

Рем. У пев'язному випадку можна застосовувати теорему до
конкретної зв. компоненти.

2. $\Rightarrow$ 1. Вірно $\forall$ метр. простору.

3. 4. (або тільки в 4.) можна замінити геодезичну на найкоротшу (це
буде видно з доведення). Це буде (формально) слабші умови.

~~Вказується~~ Остання частина - це Ри. 9. (з 2).

2. $\Rightarrow$ 1. $\forall$ фундамент. послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ можна вважати,
що $x_n \in \mathcal{D}_\varepsilon(x) \quad \forall n > N$ для деяких $x \in X, \mathcal{D}_\varepsilon(x)$ комп. за 2.

$\Rightarrow \nexists \{x_n\} \exists$ збіжна підпослідовність $\Rightarrow \{x_n\}$ збігається
в силу фундаментальності.

1 $\Rightarrow$ 3. Побудуємо $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, a)$ так, ^{$z_n \rightarrow a$} що для дов. великих n, m $\gamma|_{[z_n, z_m]}$ була б найкоротшою (тут знова відр. $[z_n, z_m]$ "уздовженим"). Тоді для таких n, m

$$d_e(\gamma(z_n), \gamma(z_m)) = l(\gamma|_{[z_n, z_m]}) = \left[\begin{smallmatrix} \text{параметр} \\ \text{напруговий} \end{smallmatrix} \right] = |z_n - z_m| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Тобто $\{\gamma(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна в X і в силу повноти збігається до $x \in X$. Покладемо $\bar{\gamma}(a) := x$ і отримавмо $\bar{\gamma}: [0, a] \rightarrow X$ - продовження γ (Впр. воно неперервне). Для найкор. γ так само.

3 $\Rightarrow$ 4. Очевидно.

4 $\Rightarrow$ 2. В силу Рч. 8 достатньо довести для даної $x \in X$, що $\mathcal{Q}_\epsilon(x)$ - компакт $\forall \epsilon > 0$.

Впр. γ внутр. л-ції $\overline{B_\epsilon(x)} = \mathcal{Q}_\epsilon(x)$.

Отже, доводимо, що всі $B_\epsilon(x)$ - передкомпактні. З лем. компактності X , $\exists$ відр. передкомпакт $U \ni x \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset U$. Тоді $\mathcal{Q}_\epsilon(x) = \overline{B_\epsilon(x)} \subset \bar{U}$ буде замкн. підмножиною компакта,

отже компакт, тобто $B_\epsilon(x)$ - передкомп. Покладемо

$R := \sup \{ \epsilon > 0 \mid B_\epsilon(x) \text{ - передкомпакт} \}$. Ми покажемо, що $R > 0$.

Треба показати, що $R = +\infty$.

✓ $R < +\infty$. Зокрема, $\forall \epsilon < R \exists \tilde{\epsilon} \in (\epsilon, R)$ таке, що $B_{\tilde{\epsilon}}(x)$ - передкомп. $\Rightarrow \overline{B_\epsilon(x)} \subset B_{\tilde{\epsilon}}(x)$ - комп. $\Rightarrow B_\epsilon(x)$ передкомп. Оведено, що $B_R(x)$ - також передкомпакт. Для цього достатньо по-

казати (в силу скелетного підходу до компактності), що $\forall$ посл. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset B_R(x)$ має часткову границю у $\mathcal{D}_R(x) = \overline{B_R(x)}$.

Позначимо $\epsilon_n := d(x, x_n) < R, n \in \mathbb{N}$. Можемо вважати, що

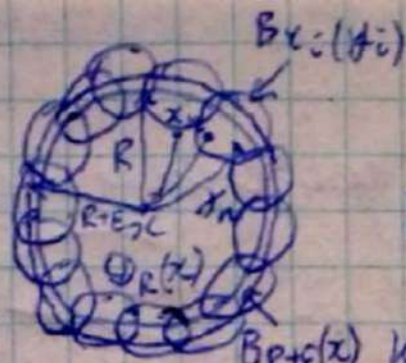
$\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R$, бо інакше у $\{x_n\}_{n=1}^\infty \exists$ підпослідовність, що збігає

у $\mathcal{D}_\epsilon(x)$ для деякого $\epsilon < R$, а у ній $\exists$ збіжна підпослідовність. В силу компактності $\mathcal{D}_\epsilon(x)$. Оскільки $\forall n \ x, x_n \in \mathcal{D}_{\epsilon_n}(x)$ - компакта,

в силу Рл. 7. $\exists$ найкоротша $\gamma_n : [0, \epsilon_n] \rightarrow \mathcal{D}_{\epsilon_n}(x) \subset B_R(x)$,

що $\gamma'_n(0) = x$ і $\gamma_n(\epsilon_n) = x_n$. Згідно Рл. 4., параметр можемо вважати

натуральним. Оскільки $\chi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R$, $\exists \{ \chi_n \}_{n=1}^{\infty} \exists$ піднос.,
 що визначена на $[0, \chi_1]$. Оскільки ми вже цієї підноси.
 відображення $[0, \chi_1]$ у компакт $\mathcal{D}_{\chi_1}(x)$, а їхні довільні
 об'єкти зберу R , за Лем. 1. $\exists$ неї $\exists$ піднос., що збігається
 на $[0, \chi_1]$ (рівномірно). Тоді само, з неї можна вибрати
 ту піднос., що рівн. збігається на $[0, \chi_2]$ etc. Далі
 використовуємо діагональну процедуру: будемо $\{ \chi_{n_m} \}_{m=1}^{\infty}$,
 де χ_{n_m} - m -тий ел-т m -тої підноси. (що збігається
 на $[0, \chi_m]$). $\forall t \in [0, R)$ тоді $\chi_{n_m}(t)$ визначене починаючи
 з деякого m , і $\chi_{n_m}(t) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \chi(t)$ для деякої $\chi: [0, R) \rightarrow B_R(x)$.
 Вона неперервна і конт. параметризована (Впр.) А-по доведенню
Лем. 6., χ - найкоротша (зокрема геодезична). Тоді в силу Л.
 $\exists$ непер. продовження $\bar{\chi}: [0, R] \rightarrow \mathcal{D}_R(x)$, і $\bar{\chi}(R) = \lim_{m \rightarrow \infty} \chi_{n_m}$
 (Впр.) Отже, $\mathcal{D}_R(x)$ - дійсно компакт.



З лок. компактності, $\forall y \in D_R(x) \exists \epsilon_y > 0$:

$B_{\epsilon_y}(y)$ - передкомпакт, $\{B_{\epsilon_y}(y)\}_{y \in D_R(x)}$ - фікр. покр.

$B_{R+\epsilon}(x)$ компактна $D_R(x) \Rightarrow \exists$ скінченне підпокривання

$\{B_{\epsilon_i}(y_i)\}_{i=1}^k$. Тоді $\exists \epsilon > 0$ таке, що $B_{R+\epsilon}(x) \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\epsilon_i}(y_i)$

$\Rightarrow D_{R+\epsilon}(x) \subset \bigcup_{i=1}^k D_{\epsilon_i}(y_i)$ - компакт, отже $B_{R+\epsilon}(x)$ - перед-
компакт, $\uparrow$ (закінч. підм. комп.) R - не суп, $\downarrow \Delta$

def. Рімановий многовид (M, g) (тут і до кінця теми $k=2$, $k \geq 3$) зветься геодезично повним $\forall p \in M$, якщо $\forall v \in T_p M$
 $\exists$ геодезична $\gamma_v: \mathbb{R} \rightarrow M$, що прох. через p у напр. v : $\gamma(0) = p$,
 $\gamma'(0) = v$. (M, g) наз. геодезично повним, якщо $\forall p$ геоф.
повний $\forall p$.

Лем. З геоф. повністю $\forall p$ випливає, зокрема, що

$\exp_p: v \mapsto \gamma_v(1)$ визначене на усьому $T_p M$. $\exists$ півліній:
якщо визначене $\exp_p(v) \forall v$, то $\gamma_v(\pm t) = \exp_p(\pm v)$

$V \neq 0$ задає потрібну геодезію.

Ек. E^n, S^n, H^n геодезично повні (див. отже геодезичних),
а відкр. підмножини в них, що не стівають з H^n  E^2
усім площини — геодез. неповні 

Рч. 10. Геодезична повнота (M, g) у p еквівалентна умові
на $x=p$ з т. 3 і 4. Тн. 2. $\forall$ нат. пар. геодезичної
 $\gamma: [0, a) \rightarrow M: \gamma(0)=p \exists$ її неперервне продовження $\bar{\gamma}: [0, a] \rightarrow M$.
 $\Rightarrow$ Достатньо вивести $\bar{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow M$ так, що $\bar{\gamma}(0)=\gamma(0)$,
 $\bar{\gamma}'(0)=\gamma'(+0)$. В силу єдиності геодез., вона продовжується γ .

$\Leftarrow$ $\forall v \in T_p M$ (при $v \neq 0$ можна не обмежувати заг.
власність $|v|=1$; випадок $v=0$ очевидний) нехай $\gamma:$
 $(-a, a) \rightarrow M$ — геодез. з $\gamma(0)=p$ і $\gamma'(0)=v$, вона нат. пар.,
і нехай $(-a, a)$ при цьому — макс. симетричний
інтервал $\exists$ -ній розв'язку візновідної системи ЗДР

(можливо "зшити" цю гео. з розв'язків у кількох лок. с.к.)
 $\forall a < +\infty$. В силу умови, $\exists$ непер. продовження $\bar{f}: (-a, a] \rightarrow M$.
 Поді вилучити гео. μ ~~на~~: $(a-\epsilon, a+\epsilon) \rightarrow M$ таку,
 що $\mu(a) = \bar{f}(a)$ і $\mu'(a) = \bar{f}'(a-0)$. В силу єдиності,
 $\mu|_{(a-\epsilon, a]} = \bar{f}|_{(a-\epsilon, a]}$. Ані-но (застосовуючи умову до $t \mapsto \bar{f}(t)$),
 продовжено всього і отримав гео. на $(-a-\delta, a+\epsilon)$, що про-
 довжує $\bar{f}$, тобто інтервал був не макс. Δ

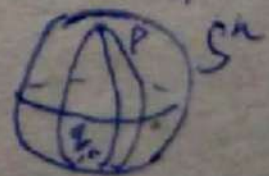
Соч. (Ріманова теорема Хопфа - Рінова - Кош - Россеа)
 Нехай (M, g) - зв'язний річ. мн. Каструні твердження еквівалентні:

1. M повний
 2. M обмежено компактний
 3. M геодезично повний
 4. $\exists p \in M$. M геодезично повний в p .
- } відносно внутрішньої метрики

Якщо виконає будь-яке з цих тверджень, то $\forall p, q \in M$ $\exists$
 найкоротша геодезична, що з'єднує p і q .

Рем. Геодезична - в силу Рч. 5. Ек. Отже, E^n, S^n, H^n повні.

Рем. На відміну від ситуації у кривому крм.
 околі, глобально найкоротша може бути не єдина:
 задаймо протилежні діам. протилежних точок S^n .



Тензор кривин та кривизни риманово метрики

M - k -м. многовид, $k \geq 3$, $\dim M = n \geq 2$.

Лем. Тензор (оператор) кривини афінної зв'язності ∇ на M зветься $R: \mathcal{K}^{k-2}(M) \times \mathcal{K}^{k-2}(M) \times \mathcal{K}^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{K}^{k-3}(M):$

$$X, Y, Z \mapsto R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Лем. У главах попередніх використувано лем. з протилежним знаком.

Річ. R задає $(k-3)$ -магле $(3, 1)$ -тензорне поле на M .

► Згідно з альтернативним лем. $(1, 1)$ -тенз. полів, тут потрібно

перевірити 3-лінійність відн. додавання вект. полів (що легко випливає з властивостей $\nabla \in [\cdot, \cdot]$) та мультілінійності на ф-ції (априорі з $\mathcal{K}^{k-1}(M)$ або $\mathcal{K}^{k-2}(M)$): $\forall X, Y, Z, f$

$$R(fX, Y)Z = f \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f \nabla_X Z) - \nabla_{f[X, Y]} Z - Y(f)X \cdot Z = f R(X, Y)Z - Y(f) \nabla_X Z + Y(f) \nabla_X Z = f R(X, Y)Z.$$

Аналогічно за Y (або можна використати власт. симетрії тензора).

$$R(X,Y)(fZ) = \nabla_X (f \nabla_Y Z + Y(f)Z) - \nabla_Y (f \nabla_X Z + X(f)Z) - f \nabla_{[X,Y]} Z - [X,Y](f)Z = f R(X,Y)Z + X(f) \nabla_Y Z + Y(f) \nabla_X Z + X(Y(f))Z - Y(X(f))Z - X(f) \nabla_Y Z - Y(X(f))Z - [X,Y](f)Z = f R(X,Y)Z.$$

Потім використаємо лев. [·,·]. Підприємство буде з лок. оп-ми у част. Рем. $\triangle$

Рем. Подімо $\forall p \in M$ визначимо значення R у p : 3-лінійне $R_p: T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ так, що $R_p(X_p, Y_p)Z_p = (R(X,Y)Z)_p \forall X,Y,Z$.

У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U : $R|_U = R_{ijk}^l dx^j \otimes dx^k \otimes dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$, тодімо $R_p(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}) \frac{\partial}{\partial x^i} = R_{ijk}^l(p) \frac{\partial}{\partial x^l} \forall p \in U$. Порядок індексів тут традиційний

для афінної та риманової геом. Подімо, якщо $\{\Gamma_{ij}^k\}$ -с.к.в, то на U

$$R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}]} \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\Gamma_{ki}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left(\Gamma_{ji}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) = \frac{\partial \Gamma_{ki}^m}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^m} + \Gamma_{ki}^m \Gamma_{jm}^l \frac{\partial}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^m}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^m} - \Gamma_{ji}^m \Gamma_{km}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \forall i,j,k.$$

П.ч., знімаючи за кожн. індекс, маємо $R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ki}^m \Gamma_{jm}^l - \Gamma_{ji}^m \Gamma_{km}^l$. Зокрема, оскільки Γ_{ij}^k - $(k-1)$ -мажн, ці коеф. $(k-3)$ -мажн, тому дійсно R - $(k-3)$ -м. поле (і може бути визначене для $X,Y,Z \in \mathcal{K}^{k-3}(M)$).