

Оск. комб. скінченна, леві й праві коор. можна переписувати: $0 = \Psi \left(\sum_{i=0}^n g_i \varphi x_i + B_0(X, G) \right) = \sum_{i=0}^n g_i$, тобто

$$g_0 = -\sum_{i=1}^n g_i. \quad X - \text{ліа. зв'язний} \Rightarrow \forall i = \overline{1, n} \exists \text{ шлях}$$

f_i , що $z' \in f_i \in x_0$ та x_i . Поді за встан. вище

$$\begin{aligned} \partial_1 \left(\sum_{i=1}^n g_i \varphi f_i \right) &= \sum_{i=1}^n g_i \partial_1 \varphi f_i = \sum_{i=1}^n g_i (\varphi f_i(1) - \varphi f_i(0)) = \\ &= \sum_{i=1}^n g_i (\varphi x_i - \varphi x_0) = \sum_{i=1}^n g_i \varphi x_i + \underbrace{\left(-\sum_{i=1}^n g_i \right)}_{=g_0} \varphi x_0 = \sum_{i=0}^n g_i \varphi x_i, \end{aligned}$$

$$\text{тобто } \sum_{i=0}^n g_i \varphi x_i \in B_0(X, G) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n g_i \varphi x_i + B_0(X, G) = B_0(X, G) (=0). \quad \Delta$$

Тепер встановимо зв'язок між H_1 і функ. групою π_1 :

Лем. 5.1. $\forall$ топ. гр-пу X і точки $x \in X$ відображення

$$\Psi: \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X): [f] \mapsto \varphi f + B_1(X)$$

коректно визначене і є гомоморфізмом, якщо X лінійно зв'язний, то Ψ - епі, а $\ker \Psi = \pi_1(X, x)'$ (комітат)

Отже, нехай $[f] \in \pi_1(X, x)$ - гомот. клас, а $f \in C(I, X)$ - клас петлі, що його представляє: $f(0) = f(1) = x$, $\varphi f(x^0, x^1) =$

для $(x^0, x^1) \in \mathcal{B}^1$,
 $= f(x^1)$ (Ел. 5.2.), тож $\exists_1 \varphi_f$

$$\varphi = f(1) - f(0) =$$

$= \varphi_x - \varphi_x = 0 \Rightarrow \varphi_f \in \mathbb{Z}_1(X)$, тож дійсно $\varphi_f + \mathcal{B}_1(X) \in$

$\mathcal{K}_1(X)$. Перевіримо коректність. Нехай $f \sim g$ (як перші), і

$F \in C(I \times I, X)$ - відр. гомотопія. Покладемо для $(x^0, x^1, x^2) \in \mathcal{B}^2$

$$\varphi(x^0, x^1, x^2) := \begin{cases} F(1-x^0, \frac{x^2}{1-x^0}) & , x^0 \neq 1 \\ F(0,0) & , x^0 = 1 \end{cases} \quad (\leftarrow \text{це одна точка } (1,0,0))$$

$(\forall (t,s) \in I \times I$ відрінаємо т. з параметром s

на відр., що сполучає $(0,1,0)$ і $(0,0,1)$: $(0,1-s,s)$;

на відр., що сполучає $(1,0,0)$ і цю точку відрінаємо

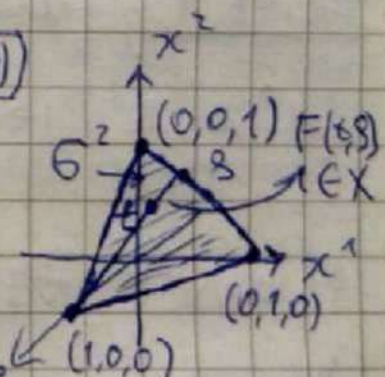
т. з параметром t : $(1-t)(1,0,0) + t(0,1-s,s) = (1-t, t(1-s), ts)$ і

її переводимо у $F(t,s)$; тож $t = 1-x^0$, $s = \frac{x^2}{1-x^0}$ (і $(0,0)$ при $x^0=1$).

Це коректно визн. перер. $\varphi: \mathcal{B}^2 \rightarrow X$ (супр. симплекс), бо F

перер. і $F(0,s) = x (= F(0,0)) \quad \forall s$, бо це гомотопія петель.

Тож $\forall (x^0, x^1) \in \mathcal{B}^1$



$$\partial_2 \varphi = ((x^0, x^1) \mapsto \varphi(0, x^0, x^1) - \varphi(x^0, 0, x^1) + \varphi(x^0, x^1, 0) = F(1, x^1) - F(1-x^0, \frac{x^1}{1-x^0}) + F(1-x^0, 0) = [x^0 + x^1 = 1] = F(1, x^1) - F(\underbrace{x^1}_x, 1) + F(\underbrace{x^1}_f(x^1), 0) = \varphi_x - \varphi_g + \varphi_f$$

(при $x^0 = 1$ не будет $F(1, 0) - F(0, 0) + F(0, 0) =$
 $= (\varphi_x - \varphi_g + \varphi_f)(1, 0)$)

Аналогично по прикладу

Ex. 5.4, для постоянного 2-век. симп. комплекса $\varphi_x : \mathbb{B}^2 \rightarrow X$:

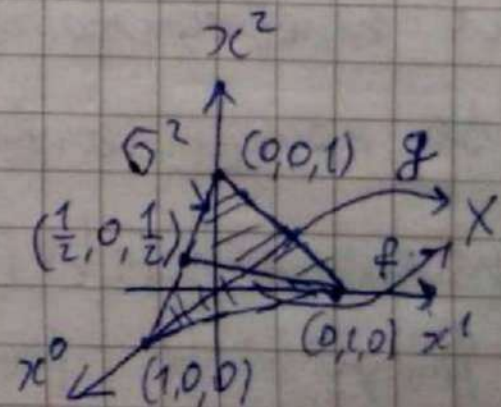
$$(x^0, x^1, x^2) \mapsto x \quad \partial_2 \varphi_x = \underbrace{\varphi_x - \varphi_x + \varphi_x}_{1\text{-век. симп. комплекса } \mathbb{B}^1 \rightarrow X} = \varphi_x. \text{ Тогда } \varphi_f - \varphi_g = \partial_2 \varphi_x +$$

$$+ \partial_2 \varphi = \partial_2 (-\varphi_x + \varphi) \in B_1(X) \Rightarrow \varphi_f + B_1(X) = \varphi_g + B_1(X); \text{ отсюда, } \varphi \text{ функ. корректно.}$$

$$\forall [f], [g] \in \pi_1(X, x) \text{ и функ. петель } f, g \text{ положено для } (x^0, x^1, x^2) \in \mathbb{B}^2$$

$$\varphi(x^0, x^1, x^2) := \begin{cases} f(1+x^2-x^0), & x^0 \geq x^2 \\ g(x^2-x^0), & x^0 \leq x^2 \end{cases}$$

(Поскольку разделили $\mathbb{B}^2$ на две части медианой, что случается $(0, 1, 0)$ и $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$)



$\varphi: G^2 \rightarrow X$ є коректно визн. сим. симплексом, то f і g переп. і при $x^0 = x^2$ $f(1) = g(0) = x$. $\forall (x^0, x^1) \in G^1$

$$\partial_2 \varphi = ((x^0, x^1) \mapsto \varphi(0, x^0, x^1) - \varphi(x^0, 0, x^1) + \varphi(x^0, x^1, 0) = g(x^1 - 0) -$$

$$- \begin{cases} f(1+x^1-x^0), & x^0 \geq x^1 \\ g(x^1-x^0), & x^0 \leq x^1 \end{cases} + f(1+0-x^0) = [x^0+x^1=1] = g(x^1) - \begin{cases} f(2x^1), & x^1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2x^1-1), & x^1 \geq \frac{1}{2} \end{cases} + f(x^1)) = \varphi_g - \varphi_{f \times g} + \varphi_f,$$

$\varphi_f + \varphi_g - \varphi_{f \times g} \in B_1(X)$, тому з доведеної викидає, що це точно не тільки для петель, а й $\forall f, g \in C(I, X): f(1)=g(0)$ точно

$$\Psi([f][g]) = \Psi([f \times g]) = \varphi_{f \times g} + B_1(X) = \varphi_f + \varphi_g + B_1(X) = (\varphi_f + B_1(X)) + (\varphi_g + B_1(X)) = \Psi([f]) + \Psi([g]) \quad \text{т.ч.}, \Psi - \text{гомоморфізм.}$$

Нехай тепер X - лін. зб. Згідно з означеннями і описом 1-вим. сим. симплексів у Ес. 5.2, $\forall$ ек-т $H_1(X)$ має вигляд

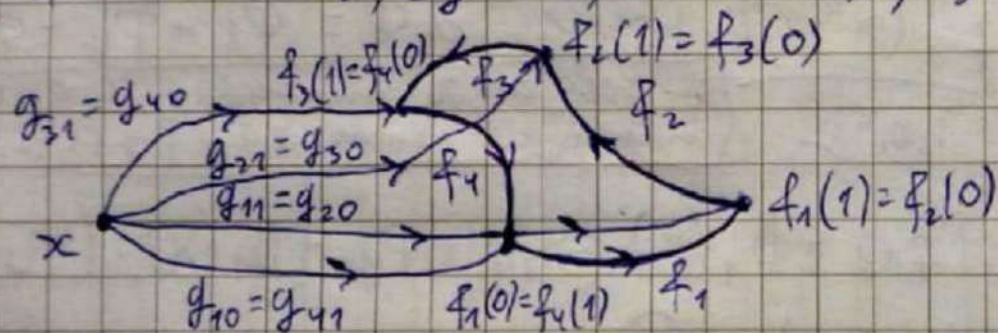
$$c = \sum_{i=1}^m n_i \varphi_{f_i} + B_1(X), \text{ де усі } n_i \in \mathbb{Z}, f_i \in C(I, X) - \text{маса,}$$

$$\text{і } \sum_{i=1}^m n_i \varphi_{f_i} \in Z_1(X): 0 = \partial_1 \left(\sum_{i=1}^m n_i \varphi_{f_i} \right) = \left[\begin{smallmatrix} \text{вигляд} \\ \partial_1 \varphi_f \text{ вище} \end{smallmatrix} \right] = \sum_{i=1}^m n_i (\varphi_{f_i}(1) - \varphi_{f_i}(0)).$$

Після приведення подібних отримавмо

$0 = \sum_{j=1}^l k_j \varphi_{x_j}$, тоді $k_j = 0 \quad \forall j = 1, l$. $\forall i = \overline{1, m}$ в силу lin.

Зб-ми $X \ni$ шляхи $g_{i0}, g_{i1} \in C(I, X) : g_{i0}^{(0)} = g_{i1}(0) = x$ і $g_{i0}(1) = f_i(0), g_{i1}(1) = f_i(1)$. Крім того, можемо вважати, що шляхи, що йдуть в одну точку, збігаються: $g_{i\varepsilon_i} = g_{j\varepsilon_j}$ $\forall i, j = \overline{1, m}$ і $\varepsilon_i, \varepsilon_j = \overline{0, 1}$ таких, що $f_i(\varepsilon_i) = f_j(\varepsilon_j)$:



З'єднуємо x з вершинами циклу.

$\forall i = \overline{1, m}$ покладемо $g_i := (g_{i0} * f_i) * \overline{g_{i1}}$. За мод., $g_i(0) = g_i(1) = x \Rightarrow [g_i] \in \pi_1(X, x)$ (це петля). Тоді

$$\Psi\left(\prod_{i=1}^m [g_i]^{n_i}\right) = [\Psi\text{-ком-змі}] = \sum_{i=1}^m n_i \Psi([g_i]) = \sum_{i=1}^m n_i (\varphi_{g_{i0}} + \varphi_{f_i} + \varphi_{\overline{g_{i1}}}) + B_1(X) = \left[\begin{array}{l} \varphi_{f \times g} + B_1(X) = \varphi_f + \varphi_g + B_1(X) \\ \forall \text{ шляхів } f, g : f(1) = g(0) \\ \text{за введенням вище} \end{array} \right] = \sum_{i=1}^m n_i (\varphi_{g_{i0}} + \varphi_{f_i} + \varphi_{\overline{g_{i1}}}) + B_1(X) = \left[\begin{array}{l} \forall \text{ шл. } f \quad \varphi_f + \varphi_{\overline{f}} + B_1(X) = \varphi_{f \times \overline{f}} + B_1(X) = \varphi_x + B_1(X) = B_1(X) \\ \text{за ком. шл. (коректність } \Psi) : \varphi_x = \partial_2 \varphi_2 \text{ вище} \end{array} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^m n_i (\varphi_{g_{i0}} + \varphi_{f_i} - \varphi_{g_{i1}}) + B_1(X) \quad \textcircled{=}$$

За побудовою, $g_i \in \varepsilon_i \quad \forall i = \overline{1, m}$ однозначно визначений свій кінець $y := f_i(\varepsilon_i)$, тому перепозначимо його через g_y . Різні точки y - це початки і кінці f_i , що ми раніше позначили через $\{x_j\}_{j=1}^l$. Тому після прав. подібних матимемо ті ж коеф. ^(з тривіальних знань)

$$\textcircled{=} - \sum_{j=1}^l \underbrace{k_j}_0 \varphi_{g_{x_j}} + \sum_{i=1}^m n_i \varphi_{f_i} + B_1(X) = C. \text{ Т.ч., } \psi\text{-зич.}$$

Далі позначимо $M := \pi_1(X, x)'$. Н пораджується комутаторами $[f][g][f]^{-1}[g]^{-1}$ для усіх $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$. Оскільки ψ -гом-зич,

$$\psi([f][g][f]^{-1}[g]^{-1}) = \cancel{\psi([f])} + \cancel{\psi([g])} - \cancel{\psi([f])} - \cancel{\psi([g])} = 0,$$

а тому за гомоморфізмом $\psi([f]) = 0$ і для $\forall [f] \in M$, тобто $\pi_1(X, x)' = M \subset \ker \psi$ (це вірно $\forall$ гом-зича з довільної групи G абелеву).

Залишилося довести обернене включення $\text{Кер } \Psi \subset \Pi$ за умови лін. зв-сті X .

Нехай $[f] \in \text{Кер } \Psi$: $0 = \Psi([f]) = \varphi_f + B_1(X)$, тобто $\varphi_f \in B_1(X)$. Це означає, що $\varphi_f = \partial_2 \left(\sum_{i=1}^m \kappa_i \varphi_i \right)$ для деяких

$\varphi_1, \dots, \varphi_m : G^2 \rightarrow X$ - 2-вим. сим. симплексів і $\kappa_1, \dots, \kappa_m \in \mathbb{Z}$.

$\forall i = \overline{1, m}$ аналогічно можна виразити $\partial_2 \varphi_i = \varphi_{i0} - \varphi_{i1} + \varphi_{i2}$, де $\forall (x^0, x^1) \in G^1$ $\varphi_{i0}(x^0, x^1) := \varphi_i(0, x^0, x^1)$, $\varphi_{i1}(x^0, x^1) := \varphi_i(x^0, 0, x^1)$, $\varphi_{i2}(x^0, x^1) := \varphi_i(x^0, x^1, 0)$ задають 1-вим. сим. симплекси (ребра трикутника φ_i).

Згідно з Ес. 5.2, $\forall i = \overline{1, m}$, $\varepsilon = \overline{0, 2}$ $\varphi_{i\varepsilon} = \varphi_{f i \varepsilon}$, де $\varphi_{f i \varepsilon} : t \mapsto \varphi_i(1-t, t)$ - шлях. Отже,

$$\varphi_f = \sum_{i=1}^m \kappa_i \partial_2 \varphi_i = \sum_{i=1}^m \kappa_i (\varphi_{f i 0} - \varphi_{f i 1} + \varphi_{f i 2})$$

Це означає, що $\exists i_0, \varepsilon_0$ такі, що $f = \varphi_{f i_0 \varepsilon_0}$, і після при-

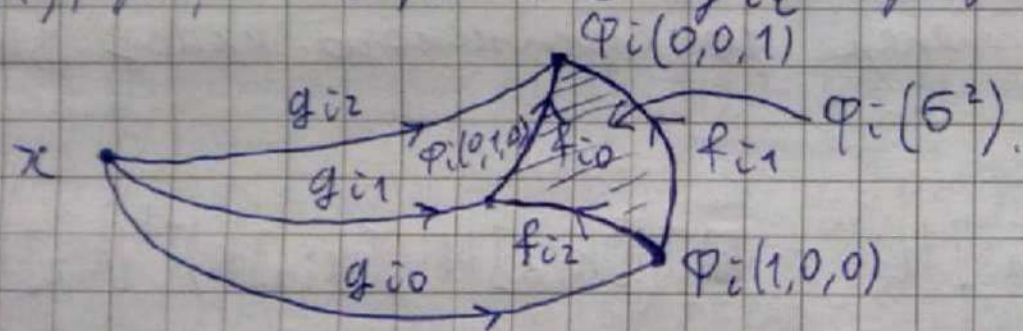
ведення подібних коеф. біля $\varphi_{f i_0 \varepsilon_0}$ дор. 1, а біля інших 1-вим. симплексів - 0. Зокрема $\varphi_{f i_0 \varepsilon_0} = f$ - петля у x ,

(або $\varphi_{i_0 \varepsilon_0}$, бо $\varphi_{f i_0 \varepsilon_0} = -\varphi_{i_0 \varepsilon_0}$, але, змінюючи φ_i на $-\varphi_i$ вв. $f = \sum \kappa_i \varphi_i$)

$\forall i = \overline{1, m}, \varepsilon = \overline{0, 2}$ пусть теперь мы имеем $f_{i\varepsilon} \in C(I, X)$ и пусть x —

точка $\left[\begin{array}{l} \varphi_i(1, 0, 0) = f_{i1}(0) = f_{i2}(0), \quad \varepsilon = 0 \\ \varphi_i(0, 1, 0) = f_{i0}(0) = f_{i2}(1), \quad \varepsilon = 1 \\ \varphi_i(0, 0, 1) = f_{i0}(1) = f_{i1}(1), \quad \varepsilon = 2 \end{array} \right. \quad (\exists, \text{ } \varphi_i \in X \text{ и.})$

зб.), где, как и раньше $f_{i\varepsilon}$ однозначно вынуждены своим началом:



Положим $\forall i, \varepsilon$ положено:

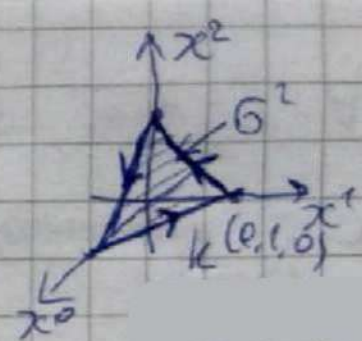
$$\begin{aligned} h_{i0} &:= (f_{i1} * f_{i0}) * \overline{f_{i2}} \\ h_{i1} &:= (f_{i0} * f_{i1}) * \overline{f_{i2}} \\ h_{i2} &:= (f_{i0} * f_{i2}) * \overline{f_{i1}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{лемма} \\ \text{и } x \end{array} \right\}$$

$\forall h_i := (h_{i0} * h_{i1}) * h_{i2}$ — лемма $y \in x$ до $h_i(0) = h_{i0}(0) = f_{i1}(0) =$
 $= x, h_i(1) = h_{i2}(1) = \overline{f_{i1}}(1) = f_{i1}(0) = x$, Отсюда, $[h_i] \in \pi_1(X, x)$. Прямая

$$[h_i] = [f_{i1} * f_{i0} * \overline{f_{i2}} * \underbrace{f_{i2} * f_{i1}}_{\sim \varphi_i(0,0,1)} * \underbrace{f_{i0} * f_{i0}}_{\sim \varphi_i(1,0,0)} * f_{i2} * \overline{f_{i1}}] = [f_{i1} * \overline{f_{i0}} * \overline{f_{i1}} * f_{i2} * \overline{f_{i1}}]$$

Видно что, лемма $(f_{i0} * \overline{f_{i1}}) * f_{i2}$ и $\varphi_i(0,1,0)$ имеет вид $\varphi_i \circ k$, где k — лемма

(ламанна), що складається зі сторін трикутника σ^2 . Оскільки σ^2 - олука ($\in \mathbb{R}^3$) $k \sim e_{(0,1,0)}$ в σ^2 ,
 тоді $(f_{i0} * \overline{f_{i1}}) * f_{i2} \sim e_{f_{i(0,1,0)}}$



$\Rightarrow h_i \sim e_x$, тоді $[h_i] = [e_x]$ - тривіальний у $\pi_1(X, x)$. Тоді $\prod_{i=1}^m [h_i]^{n_i} = [e_x]$. Перейдемо тепер до сумісного класу за підгрупою H :

$$[e_x]H = \left(\prod_{i=1}^m [h_i]^{n_i} \right) H = \prod_{i=1}^m ([h_i]H)^{n_i} = \prod_{i=1}^m ([h_{i0}]H \cdot [h_{i1}]H)^{-1} [h_{i2}]H)^{n_i}$$

Оскільки абелева група $\pi_1(X, x)/H = \pi_1(X, x)/\pi_1(X, x)'$ абелева,

у цьому виразі можна приводити подібні за парами різницями $k_i \in$ (що відповідають парам різницями $f_i \in$), і це приведе нас до того ж результату, що й $\sum_{i=1}^m n_i (\varphi_{f_{i0}} - \varphi_{f_{i1}} + \varphi_{f_{i2}}) = 1 \cdot \varphi_{f_{i0} \epsilon_0} = \varphi_f$, тоді $[h_{i0} \epsilon_0]H$. Але $[h_{i0} \epsilon_0]H = [g_{i0} \epsilon'_0]H \cdot [f_{i0} \epsilon_0]H \cdot ([g_{i0} \epsilon''_0]H)^{-1} = [g_{i0} \epsilon'_0]H \cdot [f]H \cdot ([g_{i0} \epsilon''_0]H)^{-1}$, де ϵ'_0 і ϵ''_0 визначені ϵ_0 , а $g_{i0} \epsilon'_0$ і $g_{i0} \epsilon''_0$ з'єднують x

з $f \circ \epsilon_0(0) = f(0) = x$ і $f \circ \epsilon_0(1) = f(1) = x$ відп., тобто є петлями
 між важливими $[f \circ \epsilon_0']$ і $[f \circ \epsilon_0'']$
 у x . Відома теор., за допомогою вони збігаються (бо мають
 однакові кінці): $f \circ \epsilon_0' = f \circ \epsilon_0'' = g$, $[g] \in \pi_1(X, x)$. Отже,

$$[e_x]H = [h \circ \epsilon_0]H = [g]H \cdot [f]H \cdot ([g]H)^{-1} = \left[\frac{\pi_1(X, x)}{H \text{ абелева}} \right] = [f]H.$$

П.ч., сумісний клас $[f]$ за H тривіальний $\Rightarrow [f] \in H$.

Ми показали потрібне $\forall x \in X \quad \forall \psi \in H = \pi_1(X, x)$. $\triangle$

Соч. 5.1. (Теорема Хомффа про першу групу гомологій). $\forall$ лінійно
 зв'язного топ. пр-му X і $x \in X$ абеліанізація функ. групи $\pi_1(X, x)$
 ізоморфна першій групі сингулярних гомологій з коеф. у $\mathbb{Z}$:

$$\pi_1(X, x) / \pi_1(X, x)' \cong H_1(X)$$

$\Rightarrow$ З попер. Im і власт. гомоморфізма: $\pi_1(X, x) / \pi_1(X, x)' = \pi_1(X, x) / \text{Ker } \psi \cong$

$\cong \text{Im } \psi = H_1(X)$. $\triangle$ Рет. Зокрема для абелевих $\pi_1(X, x)$: $\pi_1(X, x) \cong H_1(X)$.

Ех. 5.5. ^{Сфери:} $H_1(S^n) \cong \pi_1(S^n, x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, n=1 \\ 0, n>1 \end{cases} \quad \forall x \in S^n.$

Ес. 5.6. ^{Після} $H_1(T^n) \simeq \pi_1(T^n, x) \simeq \mathbb{Z}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in T^n$ (у цьому прикладі використався відомі група групи з курсу "Основи алгебраїчної топології, див. таке посібник)

Ес. 5.7. ^{Група Кілі} $H_1(S^1 \vee \dots \vee S^1) \simeq \pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1, x) / \pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1, x)' \simeq \mathbb{Z}^n$
 $\forall n \in \mathbb{N}, x \in S^1 \vee \dots \vee S^1$, бо абеліанізація (фактор. за комутатором) вільної гр. з n твірними - це вільна аб. гр. з n твірними, тобто $\mathbb{Z}^n$.

Ес. 5.8. Для компактних зв'язних поверхонь роду g :

- орієнтовних: $H_1(M_g^2) \simeq \pi_1(M_g^2, x) / \pi_1(M_g^2, x)' \simeq \mathbb{Z}^{2g} \quad \forall g \in \mathbb{Z}_+, x \in M_g^2$
 (зокр. 0 при $g=0$: $M_0^2 = S^2$, див. Ес. 5.5.);
- неорієнтовних: $H_1(N_g^2) \simeq \pi_1(N_g^2, x) / \pi_1(N_g^2, x)' \simeq \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2, \quad \forall g \in \mathbb{N}, x \in N_g^2$.

Ці абеліанізації обчислювали мене у поперед. курсі. Зокр.,
 $H_1(T^2) = H_1(M_1^2) \simeq \mathbb{Z}^2$ як у Ес. 5.6., $H_1(\mathbb{R}P^2) = H_1(N_1^2) \simeq \mathbb{Z}_2$,
 і для площини Клейна $H_1(K^2) = H_1(N_2^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

Ес. 5.9 Для прост. просторів:

$$H_1(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^n, x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=1 \\ \mathbb{Z}_2, & n>1 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}P^n.$$

Вопр. 5.2. Чому дорівнюють $H_1(\mathbb{C}P^n)$?

Тл. 5.2. (Гуревич). Нехай X - лінійно зв'язний топ. пр-м і натуральне $n \geq 2$. Якщо $\forall k = \overline{1, n-1} \quad \pi_k(X) = 0$, то $\forall k = \overline{1, n-1} \quad H_k(X) = 0$ і $H_n(X) \cong \pi_n(X)$.

Рем. Тут, нагадаємо H_k - групи син. гомологій з коеф. у $\mathbb{Z}$, позн. $\pi_k(X)$ без точки використовуються, бо X лін. зв'язний. Т.ч., теорема Гуревича - це "продовження" теореми Хопфа (з урахуванням того, що $\pi_k(X)$ абелеві для $k \geq 2$).

▷ Див. [Катчен, р. 366-375]. Зокрема, у функції n виходить відображення Гуревича - ізоморфізм $\psi: \pi_n(X, x) \rightarrow H_n(X)$ (для дов. $x \in X$). Його можна побудувати ап-но до Тл. 5.1: $\forall$ гомот. класу $[f] \in \pi_n(X, x)$ і його пред-

ставника - сфера $f \in C(I^n, X) : f(\partial I^n) = \{x\}$

можна факторизувати f у $\varphi \in C(G^n, X)$ - n -вип.

сипт. символ, або просто взяти композицію з $\forall$ гомеоморфізмом $G^n \rightarrow I^n$, тоді $\Psi([f]) := \varphi + B_n(X)$. Складна частина,

як і у Лем. 5.1. - доведення ізоморфності, зокр. інж.

Впр. 5.3. Побудувати вказану факторизацію. 

Ек. 5.10. При $n \geq 2$ сфера S^n задов. як задово з попер. куту,
як і в Тн. 5.2. : $\pi_k(S^n) = 0 \quad \forall \quad k = \overline{1, n-1}$; крім того, π_n
(S^n) $\cong \mathbb{Z}$. Плану з Лем. 5.1. (Ек. 5.5.), Тн. 5.2. і Рл. 5.2. маємо:

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, n, \\ 0, & k=\overline{1, n-1} \end{cases} \quad \left(\cong \pi_k(S^n) \text{ для } k=\overline{1, n} \right).$$

для синг. гомологій,

Залишилося знайти $H_k(S^n)$, $k > n$ (це 0, але це зовсім
не очевидно, якщо задати нетривіальність $\pi_k(S^n)$, $k > n$;
тут можна покластися або на ізоморфізм синг. і сингл.

гомологій, що встановило $d_{i+1}^2 = 0$, і n -вартісність триангуляцій S^n (і n -вартісність триангульованого многовида, див. Вип. 2.2.), або використати посл. Маєра-Вієториса, Тн. 5.3. $d_{i+1}^2 = 0$.)

Лем. 5.2. Зокрема, з Рм. 5.2., Сол. 5.1., Тн. 5.2. і гомотопічної інваріантності гомот. груп (разом з множиною $\Pi_0(X)$) вартісність гомот. інв-ство π_n груп сит. гомологій в n -масах цих тверджень. Щоб довести її у заг. випадку, як і для сит. гомологій, спочатку завершимо побудову функтора:

def. 5.7. Нехай $f: X \rightarrow Y$ - непер. відображення топ. пр-тів, $k \in \mathbb{Z}_+$, G - аб. гр. Π_0 і k -мат відображення, що індуковане f у сит. ланцюгах з коэф. у G , зветься

$$f_k: C_k(X, G) \rightarrow C_k(Y, G): \sum_{\varphi \in C(G^k, X)} g_{\varphi} \cdot \varphi \mapsto \sum_{\varphi \in C(G^k, X)} g_{\varphi} (f \circ \varphi).$$

$\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ тоді будемо називати перерізном сит. ланц. комплексів

$C_*(X, G) \rightarrow C_*(Y, G)$, що індукований f .

Рм. 5.3. $\forall f \in C(X, Y)$, ^{ад. зн. G} надір $\{f_k : C_k(X, G) \rightarrow C_k(Y, G)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$

дійсно є морфізм лану. комплексів $C_*(X, G) : C_*(Y, G)$, а

відповідність $X \mapsto C_*(X, G)$, $f \mapsto \{f_k\}$ - ковариантна

функторна з категорії Top топ. гр-рів та перер. відоб-

разень у категорію лану. комплексів (та їхніх морфізмів).

► Дійсно, $\forall k$, $\varphi \in C(\sigma^k, X) : f \in C(X, Y)$ $f \circ \varphi \in C(\sigma^k, Y)$ -

синг. симплекс у Y , тому дійсно $f_k : C_k(X, G) \rightarrow C_k(Y, G)$.

Це ком-зм за побудовою. Перевіримо, що $\{f_k\}$ - морфізм,

подібно догн. $\begin{array}{ccccccc} \rightarrow C_k(X, G) & \xrightarrow{\partial_k^X} & C_{k-1}(X, G) & \rightarrow & \dots \\ f_k \downarrow & & \downarrow f_{k-1} & & \\ \rightarrow C_k(Y, G) & \xrightarrow{\partial_k^Y} & C_{k-1}(Y, G) & \rightarrow & \dots \end{array}$ комутативна: $\forall k$

$\partial_k^Y \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k^X$ для оч. позначень границь, з побудови

f_k , ∂_k^X і ∂_k^Y , це дост. перевірити на одному синг. симп.

$\varphi \in C(\sigma^k, X)$. У дійсно,

$$\begin{aligned}
 (\partial_k^Y \circ f_k)(\varphi) &= \partial_k^Y(f \circ \varphi) = \sum_{i=0}^k (-1)^i f \circ \varphi|_{x^i=0} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \\
 f_{k-1}(\varphi|_{x^i=0}) &= [f_{k-1} - 2\alpha - 3\alpha] = f_{k-1}\left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \varphi|_{x^i=0}\right) = \\
 &= (f_{k-1} \circ \partial_k^X)(\varphi).
 \end{aligned}$$

Нарешті, $\forall f \in C(Y, Z), g \in C(X, Y), k \in \mathbb{Z}_+$ $(f \circ g)_k =$
 $= f_k \circ g_k$ (знову не, дост. перевірити на 1 симп. φ):
 $(f \circ g)_k(\varphi) = (f \circ g) \circ \varphi = f \circ (g \circ \varphi) = f_k(g_k(\varphi))$ і $(id_X)_k =$
 $= id_{C_k(X, G)} \quad \forall k$ (оч.), тому дійсно побудовано ковари-
 антний функтор. $\triangle$

Вет. Тл.ч., як і для симп., побудову сингулярних
 гомологій та коомологій можна описати як композицію
 функторів (а отже функтор): описаного у Рл. 5.3. і
 "стандартний" з розділу 1:

Топ $\xrightarrow{\text{Рл. 5.3.}}$ (ланцюгові комплекси) $\xrightarrow[\text{гомології}]{\text{справлений (ко) комплекс (ланц. комп.)}}$ $\xrightarrow[\text{гомології}]{\text{(ко)омології}}$ (Топ. аб. груп).

Зокрема, $\forall f \in C(X, Y)$, ад. гр. G , $k \in \mathbb{Z}_+$ коректно визначений
індукований гомоморфізм у k -мас гомологій (див. Рл. 1.1.):

$$f_{k*}: H_k(X, G) \rightarrow H_k(Y, G) : \alpha + B_k(X, G) \mapsto f_{k*}(\alpha) + B_k(Y, G).$$

За коваріантністю, маємо $(f \circ g)_{k*} = f_{k*} \circ g_{k*}$ ($\forall f \in C(Y, Z)$,
 $g \in C(X, Y)$) : $(id_X)_{k*} = id_{H_k(X, G)} \quad \forall k$.

Соч. 5.2. Визначити $X \mapsto \{H_k(X, G)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, $f \mapsto \{f_{k*}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$

$\forall$ ад. гр. G є коваріантним функтором з Top у категорію
послідовностей абелевих груп (з нульовими ком-значеннями) –
функтором сингулярних гомологій з коефіцієнтами у G .

Ап-но, ф-р сингулярних когомологій $X \mapsto \{H^k(X, G)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$,

$f \mapsto \{f_k^*\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ є контраваріантним функтором між
ними не категоріальний $\forall$ ад. гр. G .

Впр. 5.4. Описати явно індуковані ком-зми у когомологій

$$f_k^*: H^k(Y, G) \rightarrow H^k(X, G) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Попередню інваріантність ми отримувемо виразу з Рл.1.8:

Лем.5.3 Якщо $X \cong Y$ - гомеоморфні топ. пр-ки, то $\forall$ аб. гр. $G \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$ $H_k(X, G) \cong H_k(Y, G) \subset H^k(X, G) \cong H^k(Y, G)$.

Але нам потрібна ком. інв-сть, Крюкович є наступний факт:

Рл.5.4. Якщо неперервні відкр. топ. пр-ків $f, g \in C(X, Y)$ гомотопні $\xrightarrow{(f \sim g)}$, то $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ і аб. гр. коефіцієнтів G $f_{k*} = g_{k*}$.

Використаємо Рл.1.2. : щоб довести потрібне, дост. побудувати алгебраїчну гомотопію між $\{f_k\}$ і $\{g_k\}$ (або навпаки), тобто набір ком-змів $\{\Phi_k : C_k(X, G) \rightarrow C_{k+1}(Y, G)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ такий, що $g_k - f_k = \partial_{k+1}^Y \circ \Phi_k + \Phi_{k-1} \circ \partial_k^X \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$ (врахуємо $\Phi_{-1} = 0$). В силу гомоморфності, дост. визначити Φ_k на симплексах: $\Phi_k(\sum_{\varphi \in \mathcal{S}^k, X} g_\varphi \cdot \varphi) := \sum_{\varphi \in \mathcal{S}^k, X} g_\varphi \cdot \Phi_k \varphi$.

Отже, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ і сим. симплекса $\varphi \in C(\sigma^k, X)$ покладаємо

$$\mathcal{D}_k \varphi := \sum_{\bar{i}=0}^k (-1)^{\bar{i}} \left(\underbrace{(x^0, \dots, x^{k+1})}_{\substack{\text{м} \\ \sigma^{k+1}}} \mapsto F(\varphi(x^0, \dots, x^{\bar{i}-1}, \underset{i}{x^{\bar{i}} + x^{\bar{i}+1}}, x^{\bar{i}+2}, \dots, x^{k+1}), 1 - \sum_{\bar{j}=0}^{\bar{i}} x^{\bar{j}}) \right),$$

де $F: X \times I \rightarrow Y$ - законотна функція f і g . Згідно, що для точки $(x^0, \dots, x^{k+1}) \in \sigma^{k+1}$ $x^i \geq 0$ і $\sum_{i=0}^{k+1} x^i = 1$, тому $(x^0, \dots, x^{\bar{i}} + x^{\bar{i}+1}, \dots, x^{k+1}) \in \sigma^k$ і $1 - \sum_{\bar{j}=0}^{\bar{i}} x^{\bar{j}} \in I$. Тому $\mathcal{D}_k \varphi$ - алгебр. сума кон. визначених відображ. $\sigma^{k+1} \rightarrow Y$, переп. як конт. переп., тобто $(k+1)$ -вим. сим. симплексів: $\mathcal{D}_k \varphi \in C_{k+1}(Y, G)$. $\mathcal{D}_k$ - ком-зми за побудовою. Залишилося перевірити, що вони дійсно утв. алг. законотні. В силу законотності, дост. перевірити на 1 симпл. Отже, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$: $\varphi \in C(\sigma^k, X)$

$$\begin{aligned}
 (\partial_{k+1}^Y \circ \mathcal{Q}_k)(\varphi) &= \partial_{k+1}^Y \left(\sum_{\bar{j}=0}^k (-1)^{\bar{j}} ((x^0, \dots, x^{k+1}) \mapsto F(\varphi(x^0, \dots, x^{\bar{j}-1}, x^{\bar{j}}, x^{\bar{j}+1}, \dots, x^k), 1 - \sum_{\ell=0}^{\bar{j}} x^\ell)) \right) \\
 &= \sum_{\bar{j}=0}^k (-1)^{\bar{j}} \partial_{k+1}^Y (\dots) = \sum_{\bar{j}=0}^k (-1)^{\bar{j}} \sum_{\bar{i}=0}^{k+1} (-1)^{\bar{i}} (\dots) \Big|_{x^{\bar{i}}=0} \\
 &= \sum_{0 \leq \bar{i} \leq \bar{j}-1 \leq k-1} (-1)^{\bar{i}+\bar{j}} ((x^0, \dots, x^k) \mapsto F(\varphi(x^0, \dots, x^{\bar{i}-1}, 0, x^{\bar{i}}, \dots, x^{\bar{j}-2}, x^{\bar{j}-1}, x^{\bar{j}} + x^{\bar{j}}, x^{\bar{j}+1}, \dots, x^k), 1 - \sum_{\ell=0}^{\bar{j}-1} x^\ell)) \\
 &\quad + \sum_{\bar{i}=\bar{j}=0}^k ((x^0, \dots, x^k) \mapsto F(\varphi(x^0, \dots, x^{\bar{i}-1}, x^{\bar{i}}, x^{\bar{i}+1}, \dots, x^k), 1 - \sum_{\ell=0}^{\bar{i}-1} x^\ell)) \\
 &\quad - \sum_{\bar{i}=\bar{j}+1}^{k+1} ((x^0, \dots, x^k) \mapsto F(\varphi(x^0, \dots, x^{\bar{i}-1}, x^{\bar{i}}, x^{\bar{i}+1}, \dots, x^k), 1 - \sum_{\ell=0}^{\bar{i}-1} x^\ell)) \\
 &\quad + \sum_{k+1 \geq 0 \geq \bar{j}+2 \geq 2} (-1)^{\bar{i}+\bar{j}} ((x^0, \dots, x^k) \mapsto F(\varphi(x^0, \dots, x^{\bar{j}-1}, x^{\bar{j}} + x^{\bar{j}+1}, x^{\bar{j}+2}, \dots, x^{\bar{i}-1}, 0, x^{\bar{i}}, \dots, x^k), 1 - \sum_{\ell=0}^{\bar{j}} x^\ell))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{Q}_{k-1} \circ \partial_k^X)(\varphi) &= \mathcal{Q}_{k-1} \left(\sum_{\bar{i}=0}^k (-1)^{\bar{i}} \varphi|_{x^{\bar{i}}=0} \right) = \sum_{\bar{i}=1}^{k+1} (-1)^{\bar{i}-1} \mathcal{Q}_{k-1}(\varphi|_{x^{\bar{i}-1}=0}) \\
 &= \sum_{0 \leq \bar{j} \leq \bar{i}-2 \leq k-1} (-1)^{\bar{i}+\bar{j}-1} ((x^0, \dots, x^k) \mapsto F(\varphi(x^0, \dots, x^{\bar{j}}, x^{\bar{j}+1}, \dots, x^{\bar{i}-1}, 0, x^{\bar{i}}, \dots, x^k)
 \end{aligned}$$

$$\frac{1 - \sum_{l=0}^{\bar{j}} x^l}{1 - \sum_{l=0}^{\bar{j}-1} x^l} + \sum_{\substack{k \geq \bar{j} \geq \bar{i}+1 \geq 1 \\ \bar{j} \mapsto \bar{j}+1}}^{i+\bar{j}-1} (-1) \left((x^0, \dots, x^k) \mapsto F(\varphi(x^0, \dots, x^{\bar{i}-1}, 0, x^{\bar{i}}, \dots, x^{\bar{j}+1} + x^{\bar{j}}, \dots, x^k) \right)$$

Змінюю і назад,

У цих $(\partial_{k+1}^Y \circ \partial_k + \partial_{k-1} \circ \partial_k^X)(\varphi)$ окремо відокремлені члени ско-
рочуються. Члени, відкр. --- і --- скор. для $\bar{i} = 1, k$. При
 $\bar{i} = 0$ член --- $ga \in ((x^0, \dots, x^k) \mapsto F(\varphi(x^0, \dots, x^k), 1) = g(\varphi(x^0, \dots, x^k))) \stackrel{g \circ \varphi}{=} a$
--- не нале. При $\bar{i} = k+1$ --- $ga \in \bar{V}((x^0, \dots, x^k) \mapsto F(\varphi(x^0, \dots, x^k), 1 - \sum_{l=0}^k x^l) =$
 $= F(\varphi(x^0, \dots, x^k), 0) = f(\varphi(x^0, \dots, x^k)) = -f \circ \varphi$, а --- не нале. П.ч.,
 $(\partial_{k+1}^Y \circ \partial_k + \partial_{k-1} \circ \partial_k^X)(\varphi) = (g_k - f_k)(\varphi)$, що й потрібно. $\triangle$

Сол. 5.4. (Гомотопічна інваріантність сингулярних гомологій).

Якщо $X \sim Y$ - гомотопічно еквівалентні топ. пр.-ри, то
 $\forall$ ад. гр. $G \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad H_k(X, G) \cong H_k(Y, G)$.

Діагональ $f \in C(X, Y) : g \in C(Y, X)$ задані ком. екв.,
тобто $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$, то за Лем. 5.2. і Лем. 5.4.

$\forall G : K \quad f_{K*} \circ g_{K*} = (f \circ g)_{K*} = (id_Y)_{K*} = id_{H_K(Y, G)}$ і
 $g_{K*} \circ f_{K*} = (g \circ f)_{K*} = (id_X)_{K*} = id_{H_K(X, G)}$, тобто $f_{K*} : H_K(X, G) \rightarrow$
 $H_K(Y, G)$ і $g_{K*} : H_K(Y, G) \rightarrow H_K(X, G)$ - взаємні ізоморфізми. $\triangle$

Впр. 5.5. Показати, що сим. комплексні тис. гомотопічно
ісв. (як тут виходить аналог Лем. 1.2.?).

Лем. 5.5. Якщо $X \sim Y$, і для простору X визначена сим.
Ейлерова кар-ка, то вона визначена і для Y , і вони рівні:
 $\chi(X) = \chi(Y)$.