

5. Сигнулярні гомології

Як і раніше, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ $\sigma^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ - станд. k -вим. симплекс.

def. 5.1. Сигнулярний k -вим. симплекс у топ. пр-ті X , де $k \in \mathbb{Z}_+$, зветься диф-ак неперервне $\varphi: \sigma^k \rightarrow X$. Його l -вим. гранню, де $l = \overline{0, k}$ (вершинною при $l=0$, ребром при $l=1$) зв. обмежена φ на l -вимірну грань σ^k , яку ототожнено з l -вимірним станд. симплексом. Т.ч., l -вим. грані $\in l$ -вим. сфр. симп.

Лем. Згадаємо, що l -вим. грані σ^k - це підкомпакти, де деякі $k-l$ коорд. нульові. Тією, зокр., $(k-1)$ -вим. грані k -вим. станд. симплекса $\varphi: \sigma^k \rightarrow X$ - це для $i = \overline{0, k}$

$$\varphi|_{\overbrace{x^i=0}^{\sigma^{k-1} \rightarrow X}}: (x^0, \dots, x^{k-1}) \mapsto \varphi(x^0, \dots, x^{i-1}, 0, x^i, \dots, x^{k-1}).$$

Ан-но розглядаємо $(k-2)$ -вим. грані $\varphi|_{x^i=x^j=0}$, $i \neq j$ etc.

Ex 5.1. 0-вим. сфр. симп. - це $\varphi: \underbrace{\sigma^0}_{\{1\}} \rightarrow X$, тобто

просто постійні відобр. у деякі $x \in X$: $\varphi(1) = x$. Далі позн.
 їх φ_x . Такі не постійні симп. є і $\forall k$, їх позн. так
 само: $\varphi_x: \overbrace{B^k \rightarrow X} \rightarrow X$.
 $(x^0, \dots, x^k) \mapsto x$.

Ех. 5.2. 1-вим. симп. симп. — це непер. $\varphi: B^1 \rightarrow X$, де $B^1 =$
 $= \{(x^0, x^1) \mid x^0, x^1 \geq 0, x^0 + x^1 = 1\}$, тобто $x^0, x^1 \in I$ і $x^0 = 1 - x^1$,
 тому $\varphi(x^0, x^1)$ означає x^1 . $\forall t \in I$ покладено $f(t) :=$
 $= \varphi(1-t, t)$. Оскільки φ непер., це означає $\varphi \in X$. І навпаки, $\forall$ функції $f \in$
 $\in C(I, X)$ $\varphi(x^0, x^1) := f(x^1)$ задає 1-вим. симп. симп. Позн.
 його φ_f .

Ех. 5.3. $\forall k$ -вим. топологічний симплекс (топ. і його
 характеристичне відобр.) є k -вим. симпліксним.

def. 5.2. Нехай G -аб. група, $k \in \mathbb{Z}_+$. k -вимірний симпліксний
 ланцюгом у топ. пр-ті X з коэф. у G зветься Бурдз-ака

сінглетна формальна лінійна комбінація k -вим. сінглетних
сінглетів у X з коэф. з G $\sum_{\varphi \in C(\mathcal{B}^k, X)} g_\varphi \cdot \varphi$ (де $g_\varphi \in G \ \forall \varphi$
і $|\{\varphi \mid g_\varphi \neq 0\}| < \infty$). Додавання ланцюгів визн. покомпонентно.

$$\sum_{\varphi \in C(\mathcal{B}^k, X)} g_\varphi \cdot \varphi + \sum_{\varphi \in C(\mathcal{B}^k, X)} h_\varphi \cdot \varphi := \sum_{\varphi \in C(\mathcal{B}^k, X)} (g_\varphi + h_\varphi) \cdot \varphi.$$

Множина всіх k -вим. сінг. ланцюгів з такою операцією зв.
 k -тою групою сінг. ланцюгів у X і позн. $C_k(X, G)$.

Для $k \in \mathbb{N}$ k -тим граничним гомоморфізмом (або просто
 k -тою сінг. границею) зветься

$$\partial_k: C_k(X, G) \rightarrow C_{k-1}(X, G) : \sum_{\varphi \in C(\mathcal{B}^k, X)} g_\varphi \cdot \varphi \mapsto \sum_{\varphi \in C(\mathcal{B}^k, X)} g_\varphi \cdot \partial_k \varphi,$$

де $\partial_k \varphi := \sum_{i=0}^k (-1)^i \varphi|_{x^i=0}$ (див. Рем. вище; тут -1 позн.
перехід від коэф. $g \in G$ до протилежного $-g$).

Рл. 5.1. $\forall$ топ гр-ру X і аб. гр. G k -ті групи сінглетних
ланцюгів $C_k(X, G)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ і ком-зми ∂_k при $k \in \mathbb{N}$

утворюють певід'ючий ланцюговий комплекс (якщо покласти

$C_k(X, G) \stackrel{=}{=} 0$ при $k < 0$ і $\partial_k = 0$ при $k \leq 0$):

$$\overset{\partial_{k+1}}{\rightarrow} C_k(X, G) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X, G) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X, G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, G) \xrightarrow{\partial_0=0} 0.$$

⇒ Доводиться як Рл. 2.1 і Рл. 2.2. Зокрема, операція у

$C_k(X, G)$ кор. визначена, бо лише скінч. кільк. коеф. $\neq 0$,

нейтр. ел-том є $0 = \sum_{\varphi \in C(G^k, X)} 0 \cdot \varphi$, — $\left(\sum_{\varphi} g_{\varphi} \cdot \varphi \right) = \sum_{\varphi} (-g_{\varphi}) \cdot \varphi$,

і $\partial_k g_{\varphi} \in C_{k-1}(X, G)$ в силу Рем. вище: $\varphi(x_i = 0) \in (k-1)$ -

вим. сим. симп., а отже істинним. коб. — $(k-1)$ -вим. сим.

ланцюгами. Перевіряємо, що $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0 \quad \forall k \geq 2$. В силу

def 5.2. φ — k -форм. называется φ — k -формой на V

k -форм. $\varphi \in C(G^k, X)$:

$$\begin{aligned}
 (\partial_{k-1} \circ \partial_k)(\varphi) &= \partial_{k-1} \left(\sum_{\bar{i}=0}^k (-1)^{\bar{i}} \varphi|_{x^{\bar{i}}=0} \right) = \sum_{\bar{i}=0}^k (-1)^{\bar{i}} \partial_{k-1}(\varphi|_{x^{\bar{i}}=0}) = \\
 &= \sum_{\bar{i}=0}^k (-1)^{\bar{i}} \left(\sum_{\bar{j}=0}^{\bar{i}-1} (-1)^{\bar{j}} \left(\varphi|_{x^{\bar{i}}=x^{\bar{j}}=0} : (x^0, \dots, x^{k-2}) \mapsto \varphi(x^0, \dots, x^{\bar{j}-1}, 0, \dots, x^{\bar{i}-2}, x^{\bar{i}-1}, \dots, x^{k-2}) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\bar{j}=\bar{i}+1}^k (-1)^{\bar{j}-1} \left(\varphi|_{x^{\bar{i}}=x^{\bar{j}}=0} : (x^0, \dots, x^{k-2}) \mapsto \varphi(x^0, \dots, x^{\bar{i}-1}, 0, x^{\bar{i}}, \dots, x^{\bar{j}-2}, x^{\bar{j}-1}, \dots, x^{k-2}) \right) \right) = \sum_{0 \leq \bar{j} < \bar{i} \leq k} (-1)^{\bar{i}+\bar{j}} \left(\varphi|_{x^{\bar{i}}=x^{\bar{j}}=0} - \varphi|_{x^{\bar{i}}=x^{\bar{j}}=0} \right) \\
 &\quad \text{при } \bar{j}=\bar{i}-1 \quad \text{при } \bar{j}=\bar{i}+1 \\
 &\quad \text{тут нічого немає} \quad \text{тут нічого немає}
 \end{aligned}$$

$-\varphi|_{x^{\bar{i}}=x^{\bar{j}}=0} = 0$ (кожна пара $\bar{j} < \bar{i}$ входить двічі з протилежними знаками) $\triangle$

def. 5.3. Лану, комплекс $C_*(X, G) := \{C_k(X, G), \partial_k\}$ звється (алгебраїчним, ланоговим) сигнатурним комплексом з коеф. у G топ. гр-ру X . $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

$Z_k(X, G) := Z_k(C_*(X, G)) = \ker \partial_k$ зб. k -того групового сит. циклів,

$B_k(X, G) := B_k(C_*(X, G)) = \text{Im } \partial_{k+1}$ зв. k -мю групово сим. границю,
 $H_k(X, G) := H_k(C_*(X, G)) = Z_k(X, G) / B_k(X, G)$ зв. k -мю групово
 симметричних гомологій (X з коеф. у G).

Рем. Як раніше, якщо $G = \mathbb{Z}$, група не пишеться: $C_k(X, \mathbb{Z}) =$
 $= C_k(X)$, ані-но $C_*(X)$, $Z_k(X)$, $B_k(X)$, $H_k(X)$. Згідно з Рл. 1.4, також
 $\forall$ аб. гр. G визначений кокамплексний комплекс $\text{Hom}(C_*(X), G)$
 з групами кокамплексів $C^k(X, G) := \text{Hom}(C_k(X), G)$, невіс'блений.

def. 5.4. $\forall$ аб. гр. G , $k \in \mathbb{Z}_+$ $C^k(X, G)$ зв. k -мю групово сим.
 кокамплексів X з коеф. у G , а $H^k(X, G) := H^k(\text{Hom}(C_*(X), G))$ -
 k -мю групово сим. когомологій X з коеф. у G (і ані-но група
 сим. коциклів і кограниць).

Рем. Знову не, при $G = \mathbb{Z}$ група не пишеться: $C^k(X), H^k(X)$ etc.

def. 5.5. $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ $b_k := \text{rank } H_k(X)$ зветься k -мю сим.

числа Бетті X . Якщо вони всі скінч. і має скінченне їх число не нулів, то сигнатурного ейлерового характеристикою X зв. $\chi(X) := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k b_k$.

Ек. 5.4. Нехай $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ - скінченний дискретний простір (як у Ек. 2.5.) $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, оск. $\mathcal{B}^k$ зв'язний, $\forall$ скінч. k -вим. симплекс $\varphi \in C(\mathcal{B}^k, X)$ - це постійне відобр. у одну з x_i . Т.ч.,

$$C_k(X, G) = \left\{ \sum_{i=1}^n g_i \varphi x_i \mid \forall i \ g_i \in G \right\} \xrightarrow{(g_1, \dots, g_n)} G^n$$

$\forall$ аб. гр. G . При цьому обмеження φx_i (як k -вим. симплекса)

на $\forall$ $(k-1)$ -вим. грань $\mathcal{B}^k$ менш даєть φx_i (як $(k-1)$ -вим. симплекса), тому $\forall k \in \mathbb{N}$ $\partial_k \varphi x_i = \sum_{j=0}^k (-1)^j \varphi x_i = \begin{cases} \varphi x_i, & k \text{ парне} \\ 0, & k \text{ непарне} \end{cases}$. Оск.

$\partial_0 = 0$, маємо

$$Z_k(X, G) = \begin{cases} 0, & k > 0 \text{ парне} \\ C_k(X, G), & k \text{ непарне або } k=0 \end{cases} \quad B_k(X, G) = \begin{cases} 0, & k \text{ парне} \\ C_k(X, G), & k \text{ непарне} \end{cases}$$

тому $H_k(X, G) \simeq \begin{cases} 0, & k > 0 \\ Z_0(X, G) = C_0(X, G) \simeq G^n, & k=0 \end{cases}$, як для

симпл. гомологій у Ex. 2.5. Зокрема, при $G = \mathbb{Z}$ маємо
 $b_k = \begin{cases} 0, & k > 0 \\ n, & k = 0 \end{cases}$, отже $\chi(X) = n$.

Реш. Симулярні гомології природним чином пов'язані з гомотопічними групами. Почнемо з $k=0$, узагальнимо попередній приклад (а також Ex. 2.6. і задачу з практики для симпл. гомологій) і встановивши зв'язок між $H_0(X)$ і $\pi_0(X)$.

дов. 5.6. Нехай $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ — сімейство груп. Існують різні суми $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ зв. множина усіх таких наборів $\{x_\gamma \in G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ (іншими словами, відображень $\Gamma \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma : \gamma \mapsto x_\gamma \in G_\gamma$), що $|\{\gamma \in \Gamma \mid x_\gamma \neq 0\}| < \infty$. Групова операція при цьому визн. покомпонентно: $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} + \{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} = \{x_\gamma + y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$.

Реш. Якщо ми хочемо придати умову $x_\gamma \neq 0$ лише для симпл.

кільк. γ , отримавши означення прямого добутку $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$.
 Для скінч. Γ ці поняття збігаються.

Впр. 5.1. Перевірити, що пряма сума і добутки - дійсно групи.
 $(\simeq G^n \text{ при } |\Pi_0(X)| = n < \infty) \rightarrow (\text{адю } G \oplus \Pi_0(X))$

Рл. 5.2. $\forall$ топ. гр-ру $X \neq \emptyset$ і аб. групи G $M_0(X, G) \simeq \bigoplus_{\Pi_0(X)} G$
 (прямій сумі копій G з індексуючого множинною, що
 біг. відповідає множині $\Pi_0(X)$ компонент мн. зв'язі X).

$\Rightarrow$ Розділімо X на ком. мн. зв'язі: $X = \bigsqcup_{\gamma \in \Pi_0(X)} X_\gamma$.

За def. 5.2. і Ex. 5.1., ел-ти $C_0(X, G)$ - це скінченні
 комб. $\sum_{x \in X} g_x \varphi_x$ постійних $\varphi_x: G^\circ \rightarrow \{x\}$, де $g_x \in G$ і
 $|\{x | g_x \neq 0\}| < \infty$. Розділямо $\forall$ таку комб. за зв'язними
 комп. і визначимо $\Psi: M_0(X, G) \rightarrow \bigoplus_{\Pi_0(X)} G$ ак-но до Ex. 2.6.:
 $\Psi: \sum_{x \in X} g_x \varphi_x + B_0(X, G) = \sum_{\gamma \in \Pi_0(X)} \sum_{x \in X_\gamma} g_x \varphi_x + B_0(X, G) \mapsto \left\{ \sum_{x \in X_\gamma} g_x \right\}_{\gamma \in \Pi_0(X)}$
 (оск. $B_0 = 0$, $Z_0(X, G) = C_0(X, G)$). Оск. усі суми скінч.,

справа тут дійсно єд-м $\bigoplus_{\pi_0(X)} G$. Далі можна перевірити коректність визн. та те, що це ізоморфізм, за кожною компонентою окремо (бо, зокрема, $\sum_{x \in \pi_0(X)} \sum_{x \in X_x} g_x \varphi_x + B_0(X, G)$ переходить у $\sum_{x \in \pi_0(X)} \left(\sum_{x \in X_x} g_x \varphi_x + B_0(X_x, G) \right)$ під дією так визначеного ізоморфізму $M_0(X, G) \rightarrow \bigoplus_{x \in \pi_0(X)} M_0(X_x, G)$ - Визн. 5.2.). Тому далі можемо вважати $|\pi_0(X)| = 1$, тобто X лін. зв'язним, і $\Psi: \sum_{x \in X} g_x \varphi_x + B_0(X, G) \mapsto \sum_{x \in X} g_x \in G$ (або просто розуміти далі X як X_x і перевірити, що з "покомпонентної" ізоморфності випл. із-сто "в цілому").

Отже, перевіримо коректність:

$$\sum_x g_x \varphi_x + B_0(X, G) = \sum_x g'_x \varphi_x + B_0(X, G) \Leftrightarrow \sum_x (g_x - g'_x) \varphi_x = \sum_x g_x \varphi_x - \sum_x g'_x \varphi_x \in B_0(X, G) = \text{Im } \partial_1 \Leftrightarrow \exists \text{ єд-м } C_1(X, G), \text{ що згідно } \underline{\text{def. 5.2.}} : \underline{\text{Ex. 5.2.}}, \text{ має вигляд скінч. комб. } \sum_{f \in C(I, X)} k_f \varphi_f$$

(де f - функція з X) такий, що $\sum_{x \in X} (f_x - g'_x) \varphi_x = \partial_1 \left(\sum_{f \in C(I, X)} h_f \varphi_f \right) =$
 $= \sum_f h_f \partial_1 \varphi_f \ominus$. Знадаємо, що $\varphi_f(x^0, x^1) = f(x^1)$, тому за
def. 5.2. $\partial_1 \varphi_f = \varphi_f|_{x^0=0} - \varphi_f|_{x^1=0} = [\sigma^0 = \{1\}] = (1 \mapsto \varphi_f(0, 1) =$
 $= f(1)) - (1 \mapsto \varphi_f(1, 0) = f(0)) = \varphi_{f(1)} - \varphi_{f(0)}$. Тл. ч. $\ominus \sum_f h_f (\varphi_{f(1)} -$
 $-\varphi_{f(0)})$. Додаючи за усіма 0-вм. снм. (точками), маємо
 $\sum_{x^0} f_{x^0} - \sum_{x^1} g'_{x^1} = \sum_{x^0} (f_{x^0} - g'_{x^0}) = \sum_f (h_f - h_f) = 0$.

Отже, Ψ функ. коректно. Її го гомоморфізм функ. ал-и
до Ex. 2.6. з означень додавання з $C_0(X, G)$ і фактор-
груп. Не зм, бо $\forall g \in G \quad g = \Psi(g \varphi_x + B_0(X, G))$
для деякої $x \in X$. Нарешті, покажемо, що $\ker \Psi = 0$, звідки
визначатиме ісу, а отже ізоморфізм. Нехай ел-м
 $B_0(X, G)$ належить до $\ker \Psi$, тобто $\Psi\left(\sum_{x \in X} f_x \varphi_x + B_0(X, G)\right) = 0$.

Оск. комб. скінченна, перелікові коэф. можна перелікувати: $0 = \Psi \left(\sum_{i=0}^n g_i \varphi x_i + B_0(X, G) \right) = \sum_{i=0}^n g_i$, тобто

$g_0 = -\sum_{i=1}^n g_i$. X - лін. зв'язний $\Rightarrow \forall i = \overline{1, n} \exists$ шлях

f_i , що $z' \in \text{img} \in x_0$ та x_i . Поді за встан. вище

$$\begin{aligned} \partial_1 \left(\sum_{i=1}^n g_i \varphi f_i \right) &= \sum_{i=1}^n g_i \partial_1 \varphi f_i = \sum_{i=1}^n g_i (\varphi f_i(1) - \varphi f_i(0)) = \\ &= \sum_{i=1}^n g_i (\varphi x_i - \varphi x_0) = \sum_{i=1}^n g_i \varphi x_i + \underbrace{\left(-\sum_{i=1}^n g_i \right)}_{=g_0} \varphi x_0 = \sum_{i=0}^n g_i \varphi x_i, \end{aligned}$$

тобто $\sum_{i=0}^n g_i \varphi x_i \in B_0(X, G) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n g_i \varphi x_i + B_0(X, G) = B_0(X, G) (=0) \triangle$

Тепер встановимо зв'язок між H_1 і функ. групою π_1 :

Лем. 5.1. $\forall$ топ. гр-пу X і точки $x \in X$ відображення

$$\Psi: \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X): [f] \mapsto \varphi f + B_1(X)$$

коректно визначене і є гомоморфізмом, якщо X лінійно зв'язний, то Ψ - епі, а $\ker \Psi = \pi_1(X, x)'$ (коммутант)

$\Rightarrow$ Отже, нехай $[f] \in \pi_1(X, x)$ - гомот. клас, а $f \in C(I, X)$ - клас петля, що його представляє: $f(0) = f(1) = x$, $\varphi f(x^0, x^1) =$