

Знаючи обчислюючи мінімум $\mu^4(\mathbb{R}_+^4)$ з $g = \frac{1}{(x^4)^2} \sum_{i=1}^4 dx_i^2$:

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, b \cos t, b \sin t), \quad t \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi), \quad a, b > 0,$$

$$\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, -b \sin t, b \cos t)$$

$$|\gamma'(t)|^2 = \frac{1}{(b \sin t)^2} ((-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + (-b \sin t)^2 + (b \cos t)^2) =$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{b^2 \sin^2 t}$$

Тоді (оск. $b \sin t > 0$):

$$L(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b \sin t} dt = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| \Big|_{\alpha}^{\beta} =$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

у нас ж відомі значення кут між кривими
 $\gamma(t) = (t, t, \frac{\sqrt{t}}{4}, \frac{\sqrt{t}}{4})$; $\mu(s) = (\cos s, \sin s, s, s)$

Пі. напрямки: $p(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{t}}{4}, \frac{\sqrt{t}}{4})$, $s = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos \varphi = \frac{g_p(\gamma'(\frac{\sqrt{2}}{2}), \mu'(\frac{\pi}{4}))}{\sqrt{g_p(\gamma'(\frac{\sqrt{2}}{2}), \gamma'(\frac{\sqrt{2}}{2}))} \sqrt{g_p(\mu'(\frac{\pi}{4}), \mu'(\frac{\pi}{4}))}} = \left[\begin{array}{l} \gamma'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = (1, 0, 0) \\ \mu'(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1) \end{array} \right] =$$

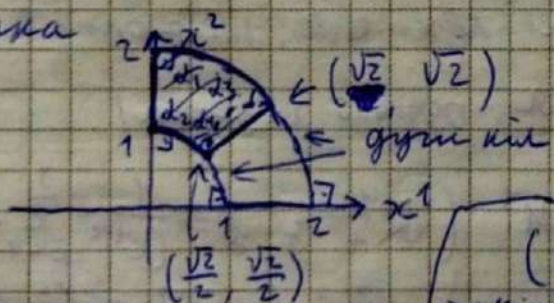
$$= \frac{\frac{16}{\pi^2} (-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + 0)}{\sqrt{\frac{16}{\pi^2} (1+1+0+0)} \sqrt{\frac{16}{\pi^2} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1)}} = 0, \text{ тобто } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Тоді не відомі об'єкт множини $\mathcal{Q} = \{x^1, x^2, x^3, x^4\} | x^i \in [a_i, b_i], i = \overline{1, 4}\}$:

$$G = \frac{1}{(x^1)^4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ маємо } \sqrt{\det G} = \frac{1}{(x^1)^4}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{Q}) &= \int_{\mathcal{Q}} \sqrt{\det G} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_4}^{b_4} \frac{1}{(x^1)^4} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) \frac{1}{-3} \left(\frac{1}{b_1^3} - \frac{1}{a_1^3} \right) \end{aligned}$$

З. у 1² відомі сторони, кут між ними —
 кут між



Перевіримо, що

$$S = 2\pi - d_1 - d_2 - d_3 - d_4$$

(де d_i — довжини кривих), якщо
 задані 4-мі сторони не на відстані

Переписать отсюда координаты K^R в левый.

$$g = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$$

Символ Кристоффеля для диагональной метрики: равен

$$g = g_{i\bar{j}} dx^i dx^{\bar{j}}, \quad g_{i\bar{j}} = 0 \text{ при } i \neq \bar{j} \text{ Тогда } G = \begin{pmatrix} g_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_{ii}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_{nn}} \end{pmatrix}, \text{ modno } g^{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{1}{g_{ii}}, & i = j \end{cases}$$

Progi $\forall i = \overline{1, n}$

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{ji}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) = \left[\begin{matrix} \text{Сумма} \neq 0 \\ \text{показов} \\ j=i \end{matrix} \right] = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}$$

$\forall i \neq j = \overline{1, n}$:

$$\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g^{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k} \right) = [k=i] = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}$$

$$\Gamma_{ii}^j = \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{ki}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \right) = [k=j] = -\frac{1}{2g_{jj}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}$$

Для остальных значений $i, j, k = \overline{1, n}$:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g^{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g^{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) = [k=l] = 0$$

У нас $g^{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(x^n)^2}$, тогда:

$$\Gamma_{ii}^i = \begin{cases} 0, & i = \overline{1, n-1} \\ \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{(x^n)^2}} \left(-2 \frac{1}{(x^n)^3} \right) = -\frac{1}{x^n}, & i = n \end{cases}$$

$$\Gamma_{ij}^i = \begin{cases} 0, & j = \overline{1, n-1} \\ -\frac{1}{x^n}, & j = n, i = \overline{1, n-1} \end{cases} \quad (= \Gamma_{ji}^i)$$

$$\Gamma_{ii}^j = \begin{cases} 0, & j = \overline{1, n-1} \\ \frac{1}{x^n}, & j = n, i = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

Полн. уравнения:

$$(x^k)'' + \Gamma_{ij}^k (x^i)' (x^j)' = 0, \quad k = \overline{1, n}$$

У нас:

$$\begin{cases} (x^1)'' - \frac{2}{x^n} (x^1)' (x^n)' = 0 \\ \dots \\ (x^{n-1})'' - \frac{2}{x^n} (x^{n-1})' (x^n)' = 0 \\ (x^n)'' + \frac{1}{x^n} \left((x^1)'^2 + \dots + (x^{n-1})'^2 - (x^n)'^2 \right) = 0 \end{cases}$$

$\forall i = \overline{1, n-1}$:

$$(x^i)'' = \frac{2}{x^n} (x^i)' (x^n)'$$

$$\frac{(x^i)''}{(x^i)'} = 2 \frac{(x^n)'}{x^n}$$

$$\ln|(x^i)'| = 2 \ln x^n + K_i$$

$$(x^i)' = C_i (x^n)^2$$

Підставимо в останнє:

$$(x^n)'' + \frac{1}{x^n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} C_i^2 (x^n)^4 - (x^n)^2 \right) = 0$$

$$\frac{(x^n)'' x^n - (x^n)^2}{(x^n)^2} = - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} C_i^2 \right)}_C (x^n)^2$$

$$\left(\frac{(x^n)'}{x^n} \right)' = -C (x^n)^2$$

(непрямий доказ того, що $\gamma(0) = (0, \dots, 0, 1)$,
можливо $(x^i)'(0) = 0$, $i = 1, n-1$)

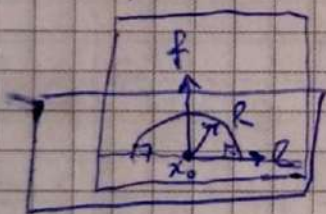
$$(\ln x^n)'' = -C (x^n)^2$$

Зокрема, при $C_1 = \dots = C_{n-1} = 0$ $\downarrow$ $(x^i)' = 0 \Rightarrow x^i = x_0^i$ для $i = \overline{1, n-1}$,
і $C = 0 \Rightarrow (\ln x^n)'' = 0 \Rightarrow x^n = e^{As+B}$ (де $B = \ln x^n(0)$, $A = (x^n)'(0)$)

Це вертимальні криві

$$\boxed{\pi} \quad x^n = 0$$

Ми знаємо відповідь і для $C \neq 0$: це певні дуги кривих, що ортогональні до площини $\{x^n = 0\}$.



Нехай його центр - м. $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, 0)$, і
вона лежить у площині з євклідовим ортон.
Базисом $\{e = (e^1, \dots, e^{n-1}, 0), f = (0, \dots, 0, 1)\}$.

Покі його параметризація: $\gamma(t) = x_0 + R \cos t e + R \sin t f$ (R -радіус):

$$\gamma(t) = (x_0^1 + R \cos t e^1, \dots, x_0^{n-1} + R \cos t e^{n-1}, R \sin t), \quad t \in (0, \pi)$$

Знайдемо довж. параметр (з напрямком $t = \frac{\pi}{2}$):

$$s(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sqrt{\frac{1}{R^2 \sin^2 \tau} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-R \sin \tau e^i)^2 + R^2 \cos^2 \tau \right)} d\tau = \int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{d\tau}{\sin \tau} =$$

$$= \ln \left| \tan \frac{\tau}{2} \right| \Big|_{\frac{\pi}{2}}^t = \ln \tan \frac{t}{2}$$

Отже, $t = 2 \operatorname{arctg} e^s$.

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= x_0 + R \cos(2 \operatorname{arctg} e^s) e + R \sin(2 \operatorname{arctg} e^s) f = \\ &= x_0 + R \frac{1 - e^{2s}}{1 + e^{2s}} e + R \frac{2e^s}{1 + e^{2s}} f = x_0 + R \frac{e^s - e^3}{e^3 + e^s} e + R \frac{2}{e^3 + e^s} f = \\ &= x_0 - R \operatorname{th} s e + \frac{R}{\operatorname{ch} s} f \end{aligned}$$

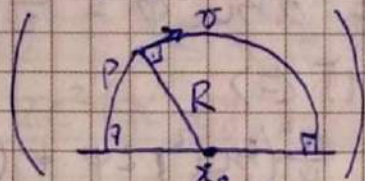
Отсюда, $x^i = x_0^i - R \operatorname{th} \beta e^i$, $i = \overline{1, n-1}$; $x^n = \frac{R}{\operatorname{ch} \beta}$.

$i = \overline{1, n-1}$: $(x^i)' = -\frac{R}{\operatorname{ch}^2 \beta} e^i = -\frac{e^i}{R} (x^n)^2 \Rightarrow C_i = -\frac{e^i}{R}$.

Получи $C = \sum_i C_i^2 = \frac{1}{R^2} \sum_i (e^i)^2 = \frac{1}{R^2}$ и получено,

$(\ln x^n)'' = \left(\ln \frac{R}{\operatorname{ch} \beta}\right)'' = (\ln R - \ln \operatorname{ch} \beta)'' = -(\operatorname{th} \beta)' = \frac{-1}{\operatorname{ch}^2 \beta} = -\frac{1}{R^2} (x^n)^2$
(не берем.)

Осцилируя через β точку P перпендикуляр β вектора σ можно про-
вести такую геог. (за единичностью, иначе перес.



Натуральный β эквивалентен $\beta \in -\infty$ до $+\infty$, отсюда β геог.
повний (и M^n повний).

Параллельно перенесем $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$ в M^n в $(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, 1)$ и
 $(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, x_0^n)$ зафиксируем геог. $\gamma: t \mapsto (x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, t)$
(здесь параметр - не натуральный, норм. - $s = \ln t + C$).

Решения параллельного перен. $X(t) = (X^1(t), \dots, X^n(t))$ зафиксируем.

$(X^k)' + \Gamma_{ij}^k (\gamma^i)' X^j = 0$, $k = \overline{1, n}$

и нас:

$(X^1)' - \frac{1}{x^n} ((\gamma^1)' X^n + (\gamma^n)' X^1) = 0$

$(X^{n-1})' - \frac{1}{x^n} ((\gamma^{n-1})' X^n + (\gamma^n)' X^{n-1}) = 0$

$(X^n)' + \frac{1}{x^n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\gamma^i)' X^i - (\gamma^n)' X^n \right) = 0$

$(X^1)' - \frac{1}{t} X^1 = 0$

$(X^{n-1})' - \frac{1}{t} X^{n-1} = 0$

$(X^n)' - \frac{1}{t} X^n = 0$

Отсюда, $\forall i$ $(X^i)' = \frac{X^i}{t}$

$\frac{(X^i)'}{X^i} = \frac{1}{t}$

$\ln(X^i) = \ln t + K_i$

$X^i = C_i t$

Тогда $t=1$: $X(1) = \sigma$, можно $C_i = \sigma^i$, $i = \overline{1, n}$, тогда при $t = x_0^n$.
 $X(x_0^n) = (\sigma^1 x_0^n, \dots, \sigma^n x_0^n)$ - результатом пер. перенесения.

