

Ріманове експоненціальне відображення

(M, g) - k -м. рімановий мн., $k \geq 3$, $\dim M = n$, ∇ -рім. зв. g .

Для фіксованої $p \in M$ $\forall v \in T_p M$ позначимо через $\gamma_v \in C^k((- \varepsilon, \varepsilon), M)$ геодезичну, що проходить через p у напрямку v : $\gamma_v(0) = p$,

$\gamma'_v(0) = v$ (єдину таку на цьому проміжку; тут $\varepsilon > 0$ таке, залежить від v ($\neq 0$)).

Лем. 1. $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$ ($\forall t$ і $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що обидва боки визначені).

► При $\lambda = 0$: $\gamma_0(t) = p = \gamma_0(0)$ (бо γ_0 - постійна).

При $\lambda \neq 0$: γ_v - геог. $\Rightarrow \mu(t) := \gamma_v(\lambda t)$ теж визначає

геодезичну. Дійсно, нат. параметру γ_v відповідає пар. з постійною

$|\mu'|$ у μ , і $\nabla_{\gamma'_v} \gamma'_v = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\mu'} \mu' = 0$. При цьому $\mu(0) = \gamma_v(0) = p = \gamma_{\lambda v}(0)$, $\mu'(0) = \lambda \gamma'_v(0) = \lambda v = \gamma'_{\lambda v}(0)$. За єдиністю, $\mu = \gamma_{\lambda v}$. Δ

Рн. 1. $\forall p \in M \exists \varepsilon > 0$ таке, що $\forall v \in T_p M$ з $|v| < \varepsilon \exists$ геодезична

$\gamma_v \in C^k((-2, 2), M)$: $\gamma_v(0) = p$, $\gamma'_v(0) = v$.

$\Rightarrow$ Нехай (U, φ) - карта з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$, $p \in U$, $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$, $|g|_U = g_{ij} dx^i dx^j$, а $\{\Gamma_{ij}^k\}_{i,j,k=1}^n$ - симб. $\mathbb{K}$ -річ. зв. ∇ . Для якогось $a > 0$ покладемо $\mathcal{Q} := \varphi^{-1}([-a, a] \times \dots \times [-a, a]) \subset U$ - компакт.

Події Γ_{ij}^k рівномірно обмежені на $\mathcal{Q}$: $\exists C > 0$:
 $|\Gamma_{ij}^k|_{\mathcal{Q}} \leq C \quad \forall i, j, k = \overline{1, n}$. Нехай λ , що ставить у вiдн. $g \in U$ найменше власне значення $G(q) = (g_{ij}(q))_{i,j=1}^n$, приймає на $\mathcal{Q}$ найменше знач. $\lambda_0 > 0$ (бо $\lambda > 0$). Нехай $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ - лок. заг. γ_v .

Події $\forall i = \overline{1, n} \quad \gamma^i(0) = 0$ і
 $|\dot{\gamma}^i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n ((\dot{\gamma}^j)^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \sqrt{g_{ij}(\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} |\dot{\gamma}_v| = \left[\begin{smallmatrix} \text{губ. власн.} \\ \text{геог.} \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} |\dot{\gamma}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_0}}$

Події $\forall i = \overline{1, n} \quad \forall t$ з області визначення γ_v : $\left[\begin{smallmatrix} \text{маємо } < \frac{\varepsilon t}{\sqrt{\lambda_0}} \\ < \frac{\varepsilon t}{\sqrt{\lambda_0}} \end{smallmatrix} \right]$
 $|\gamma^i(t)| = \left| \int_0^t (\dot{\gamma}^i)(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |(\dot{\gamma}^i)(\tau)| d\tau < \frac{\varepsilon t}{\sqrt{\lambda_0}}$ при $t > 0$ і анало. $t < 0$.

Отже, якщо $\varepsilon \leq \frac{a\sqrt{\lambda_0}}{2}$, то при $|t| < 2 \quad |\gamma^i(t)| < a$, і крива не вийде за межі $\mathcal{Q}$. В силу рівн. обмеженості на $\mathcal{Q}$ коеф. рівняння геодезичної, їх розв'язок γ_v існує на $(-2, 2)$. $\triangle$

def. Експоненціальним відображенням у РЕМ зветься

$$\exp_p : v \in T_p M \mapsto \gamma_v(1).$$



Rem. В силу Лем. 1, $\exp_p$ визначене принаймні на $B_\epsilon(0)$, де ϵ - з цього Лем. Таким чином криві на сфері у $T_p M$ - відр. γ_p (її нормалі).

Лем. 2. $\exp_p$ k -м на області визн., $\exp_p(0) = p$ і $d_0 \exp_p = \text{id}_{T_p M}$.

► Гладкість функ. з гладкої затененості розв'язків системи ЗДР від початкових умов. $\gamma_0(t) = p$ - постійна, тому $\exp_p(0) = \gamma_0(1) = p$.

$d_0 \exp_p : T_0 B_\epsilon(0) \rightarrow T_p M$, дотичний простір до

відр. підпростору $T_p M$ ототожнено з ним самим. Також

$$d_0 \exp_p(v) = \left[\begin{array}{l} t \mapsto t\tilde{v} \text{ прох.} \\ \text{через } 0 \text{ в напрям.} \\ \tilde{v} \in B_\epsilon(0) \end{array} \right] = (\exp_p(t\tilde{v}))'_{t=0} = (\gamma_{t\tilde{v}}(1))'_{t=0} = [\text{Лем. 1}] =$$

$$= (\gamma_{\tilde{v}}(t))'_{t=0} = \tilde{v} \quad \forall \tilde{v} \in T_p M. \quad \triangle \text{ отже, } d_0 \exp_p \text{ невідношений}$$

Сол. 1. $\exp_p$ - лок. дифеоморфізм в 0 , тобто $\exists$ відр. $U \ni p$ в M таке, що

$\exp_p : \exp_p^{-1}(U) \rightarrow U$ - дифео-зм (зокрема, $\exp_p^{-1}(U)$ - відр. окіл 0 в $T_p M$).

Рем. Детальніше про лок. дифеоморфізми див. теорему підкреслює.

Путь виникстаті лок. коорд. і теорема про обернене відображення.

Лем. Окіл U з Соч. 1 зветься нормальним околом $p \in M$.

Рем. $0 \in \exp_p^{-1}(U)$ - відкр. $\Rightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(0) \subset \exp_p^{-1}(U)$, тоді
 $\exp_p : B_\epsilon(0) \rightarrow B_\epsilon^N(p) := \exp_p(B_\epsilon(0))$ - дифео-зм (зокрема,
 $B_\epsilon^N(p)$ - відкр. окіл p).

Лем. $B_\epsilon^N(p)$ зветься кульовим нормальним околом $p \in M$.

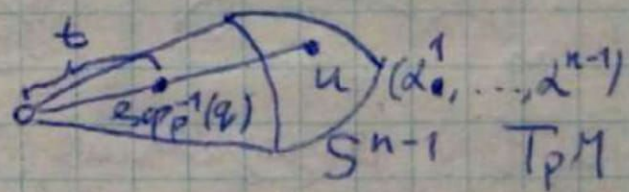
Рем. Лем. 1 $\Rightarrow \gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp_p(tv) \quad (\forall t, v: \text{це визначено}).$

Оберемо в $T_p M$ якийсь ortonормований (вигн. g_p) базис $\{e_1, \dots, e_n\}$
і $\forall q \in B_\epsilon^N(p)$ розкладемо $\exp_p^{-1}(q) = q^i e_i$, тоді $(q^1, \dots, q^n)$ - точка
евкл. кулі $B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$. Це координати на $B_\epsilon^N(p)$. Вигн. карта
узгоджена з м. стр. M , бо $q \mapsto (q^1, \dots, q^n)$ k -м в силу k -магності
 $\exp_p^{-1}$. Якщо $v = v^i e_i$, то $\exp_p^{-1}(\gamma_v(t)) = tv = (tv^i) e_i$, тоді
 γ_v має лок. задання $t \mapsto (tv^1, \dots, tv^n)$.

def. Її координати на $B_E^N(p)$ називають нормальними.

Rem. Тепер представимо для $q \in B_E^N(p)$ прообраз $\exp_p^{-1}(q)$ як $t u$,
де $t = |\exp_p^{-1}(q)|$ і $|u| = 1$ при $t > 0$ (маємо $u \in S_1(0) =: S^{n-1} \subset T_p M$).

В околі u введемо на S^{n-1} коорд. $\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}$ (за S^{n-1} диффеоморфна стандартній). Отримаємо координати $(t, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1})$ в околі $q \neq p$ - аналог полярних. Також, вони задані на образі в $B_E^N(p)$ координат області визн. $(\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1})$ з вибраного вершинною, у цій с.к. лок. задання γ_v :

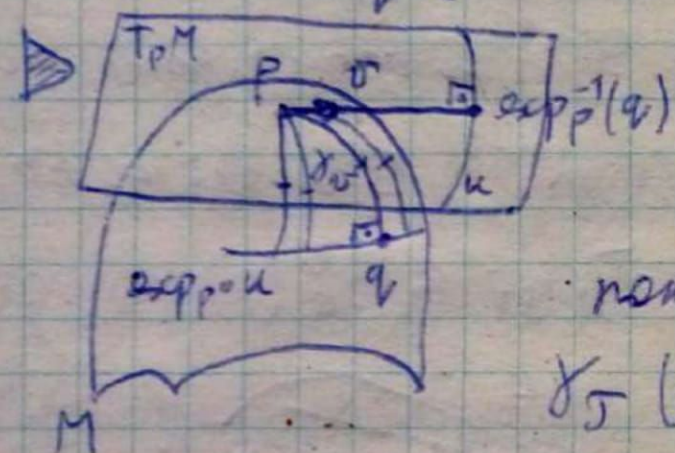


$t \mapsto (t|v|, \alpha_0^1, \dots, \alpha_0^{n-1})$ при $t \geq 0$ (де $(\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^{n-1})$ - коорд. $\frac{v}{|v|} \in S^{n-1}$)
(і $(-t|v|, \alpha_1^1, \dots, \alpha_1^{n-1})$ при $t < 0$, де $(\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^{n-1})$ - т. S^{n-1} , протил. $(\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^{n-1})$)
def. $(t, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1})$ зветься напівгеодезичними координатами.

Впр. Впр. карта тепер узгоджена з м. стр. M .

Вп. 2. (лема Тейлора). $\forall q \in B_E^N(p), q \neq p$ нехай $q = \gamma_v(t_0) = \exp_p(u(0))$,
точка перетину γ_v і $\exp_p \circ u$, де $u \in C^k((- \delta, \delta), S^{n-1})$ - крива

на сфері $S_\epsilon^{n-1} := S_\epsilon(0) \subset T_p M$ (вигн. гр) з центром в 0
 радіуса $\epsilon = |\exp_p^{-1}(q)|$. Тоді γ_σ і $\exp_p \circ u$ ортогональні в q ,
 тобто $g_q(\gamma'_\sigma(t_0), (\exp_p \circ u)'(0)) = 0$.



Детальне доведення фів. у огні з тем. класе.

Ідея: вказуючи, що γ_σ кат. кр. (тобто $|\dot{\gamma}|=1$),

позаємо для $t \in [0, \epsilon]$ і $\tau \in (-\delta, \delta)$

$\gamma_\sigma(t) = \exp_p\left(t \frac{u(\tau)}{\epsilon}\right)$ (варіація). Це в T крива в

$B_\epsilon^N(p)$, геодезична, $\gamma_0 = \gamma_\sigma$, і вони цілком залежать від u . Диференціюючи вираз для довжини за τ і перетворюючи, отримуємо, що

$$g_q(\gamma'_\sigma(t), (\exp_p \circ u)'(0)) = 0. \quad \triangle$$

Рем. Тоді в $B_\epsilon^N(p)$ геодезичні, що виходять з p , ортогональні експоненціальним образам інерсфер $T_p M$ з центром в 0.

Соч. 2. У канонічних координатах g має вигляд

$$g = dt^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} G_{ij} dx^i dx^j.$$

$\Rightarrow t \mapsto (t, \alpha_0^1, \dots, \alpha_0^{n-1})$ - н-м. параметризована геодезична. Її
 дов. вектор-додаток $\perp$: $g_{ii} = g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 1$. В силу Р.2,
 вона ортогональна до кривих $\alpha \mapsto (t_0, \alpha_0^1, \dots, \alpha, \dots, \alpha_0^{n-1})$, що лежать
 в образах сфер $T_p M$, тобто $\frac{\partial}{\partial t} \perp \frac{\partial}{\partial \alpha^i} \quad \forall i = \overline{1, n-1}$, і відн. коэф. = 0.

Впр. Що можна сказати про вигляд n -ки у нормальних коорд.?

Р.3 $\forall p \in M \exists$ відкр. $U \ni p$ і $\delta > 0$ такі, що $\forall q \in U \quad U \subset B_\delta^N(q)$.

$\Rightarrow$ З доведення Р.1 можна вивести, що для деякої відкр. з компактним
 замиканням $V \ni p$ (що міститься у деякому коорд. окіл $\overset{U}{p}$) $\exists \varepsilon > 0$:

α, β визначене на $B_\varepsilon(0) \subset T_q M \quad \forall q \in V$ (наприклад, для $V = \text{Int } D$ з
 того доведення). Дійсно, повторивши міркування з доведення Р.1 для
 кожної точки V , отримаємо $\varepsilon = \frac{a\sqrt{R_0}}{2}$, де a - фікс., а R_0 переп.

залежить від точки, після чого перейдемо до найменшого значення
 на компакт $\bar{V}$. Покл $\tilde{V} := \{(q, v) \in TM \mid q \in V, v \in B_\varepsilon(0) \subset T_q M\}$ -
 відкр. окіл $(p, 0)$ у TM , і на ньому визначене $F: \tilde{V} \rightarrow M \times M$:

$(q, v) \mapsto (q, \exp_q v)$. Бино k -напряе в сину надраї змеленості
 розб'юнух системи 3D9 big початковас урв. Оскільки
 $d_0 \exp_q = \text{id}_{T_q M}$, m -га яної F у $(p, 0)$ має вигляд $\begin{pmatrix} I/C \\ A/I \end{pmatrix}$,
 тобто $d_{(p,0)} F$ неваріації: F - лок. дифеоморфізм в околі
 $(p, 0)$ (ан-но $\exp_p$ вище): $\exists$ біжр. $\tilde{W} \ni (p, 0)$ ($\tilde{W} \subset \tilde{V}$): $F: \tilde{W} \rightarrow F(\tilde{W})$ -
 дифео-зм, зокрема $F(\tilde{W})$ - біжр. окол $F(p, 0) = (p, p)$. Оскільки у ТМ
 прообраз коорд. околу $\square \subset \pi^{-1}(\square)$ канонічний $\square \times \mathbb{R}^n$, $\tilde{W}$ містить біжр.
 окол $(p, 0)$ вигляду $\{(q, v) \in TM \mid q \in W, v \in B_\delta(0) \subset T_q M\}$, де W - біжр.
 $p \in W$, $W \subset V$, $\delta > 0$, у свою чергу, образ цього околу під дією F - біжр.
 окол $(p, p) \subset F(\tilde{W})$, тому містить окол вигляду $U \times U$, де
 $p \in U$ - біжр. Тоді $\forall q, u \in U$ $F^{-1}(q, u) = (q, v)$, де $\exp_q v = u$,
 $v \in B_\delta(0) \subset T_q M$. При цьому $\exp_q: B_\delta(0) \rightarrow \exp_q(B_\delta(0)) =: B_\delta^N(q)$ -
 дифео-зм як $F(q, \cdot)$, тому $B_\delta^N(q)$ - кривовий норм. окол. Тобто
 $u \in B_\delta^N(q)$. Тв.ч., $U \subset B_\delta^N(q)$. $\triangle$

Р.ч. $\forall$ кулі в околу $B_\varepsilon^N(p)$ т. $p \in M$ і $\forall q \in B_\varepsilon^N(p)$ існує
 $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ - єдина (з точністю до заміни параметра)
 кусково k -м. найкоротша внутр. м-ка, що з'єднує p і q .

Лем. Путь і далі допускаємо заміни параметра вигляду $t = \psi(\tau)$, де
 ψ - кусково k -м. і $\psi' > 0$ на всіх проміжках монотонності або $\psi' < 0$ на
 всіх.

► Відрізок γ_v , що з'єднує p і q , має у напівлокал. коорд. лок. задання
 $t \mapsto (t|v|, \alpha_0^1, \dots, \alpha_0^{n-1})$, $t \in [0, \frac{|\exp_p^{-1}(q)|}{|v|}]$, тому його довжина $\ell = \int_0^{|\exp_p^{-1}(q)|} |v| dt =$
 $= |\exp_p^{-1} q|$. Нехай γ - кус. k -м. клас, $\gamma: [a, b] \rightarrow B_\varepsilon^N(p)$, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$,
 і у напівлокал. коорд. він має лок. задання $\tau \mapsto (t(\tau), \alpha^1(\tau), \dots, \alpha^{n-1}(\tau))$.

Потім в силу Лем. 2:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(t')^2 + g_{ij}(\alpha^i)'(\alpha^j)'} d\tau \geq \left[\begin{matrix} (g_{ij}) > 0 \\ \text{визн.} \end{matrix} \right] \geq \int_a^b |t'| d\tau \geq \left| \int_a^b t' d\tau \right| = |t(b) -$$

$t(a)| = \ell$. Якщо γ виходить за межі $B_\varepsilon^N(p)$, то все довжина

того відмітку до першої зустрічі з $\partial B_\varepsilon^N(p)$ буде в силу цієї φ -ли $\geq \varepsilon > \ell$. Побудуємо дійсно найкоротша. При цьому нерівності вище перетворюються на рівності лише при $L^i = L_0^i$, $i = 1, n-1$ і знакопостійному (на проміжках щадності) t' .

Після заміни T на t γ перетворюється на криву з лок. заг. $t \mapsto (t, L_0^1, \dots, L_0^{n-1})$. Це γ_v для пам. параметра (при $|v|=1$). $\blacktriangle$

Впр. Звернути увагу, що пов'язана з лише локального визначеністю $(L^1, \dots, L^{n-1})$ на S^{n-1} (і з тим, що наліво координат не визн. у $p = \gamma(a)$).

Соч. 3. γ кусково k -м. найкоротша внутр. n -ли ріманового мн. $\in$ геодезичною (з точністю до заміни параметра як у Лем. вище). Зокрема, вона перетворюється на регулярну після такої заміни пар., якщо не $\in$ постійною.

$\Rightarrow$ Нехай $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ - куск. k -м. найкор. $\forall t \in [a, b]$ нехай U - окіл $\gamma(t)$ з Лем. 3. Тоді для $t_1, t_2 \in [a, b]$ таких, що

$t_1 < t_2$, $t \in [t_1, t_2] \cap \gamma([t_1, t_2]) \subset U$ за Рч.3 маємо
 $\gamma(t_2) \in B_\delta^N(\gamma(t_1))$. Оскільки $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ - найкоротша (дав. лем.
 з попер. теми), за Рч.4 $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ перетворюється на геоде-
 зичну після заміни параметра. Цю заміну на промінках
 в околі кожної $t \in [a, b]$ можна обирати узгоджено, скажімо,
 переходячи до натурального пар. $s(t) = \ell(\gamma|_{[a, t]}) = d_t(\gamma(a), \gamma(t))$.
 Таким чином отримуємо геодезичну (цю заміну параметра
 дають гладку криву в силу єдиності геодезичної в кожній ∇ точці). $\blacktriangle$

Лем. Подоба "ламана" не може бути найкоротшою. $P \curvearrowright Q$

Сол.4 $\forall$ геодезичної $\gamma \in C^k(I, M)$ річ. мн. (M, g) $\forall t \in I \exists t_1, t_2 \in I$
 такі, що $t_1 < t_2$, $t \in [t_1, t_2] \cap \gamma|_{[t_1, t_2]}$ - найкоротша вгнут. м.м.

$\blacktriangleright$ Аи-но: оберемо $U \ni \gamma(t)$ з Рч.3, $\cap t_1, t_2 : t_1 < t_2, t \in [t_1, t_2]$
 $\cap \gamma([t_1, t_2]) \subset U$. Поді $\gamma(t_2) \in U \subset B_\delta^N(\gamma(t_1))$, тому $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ -
 найкоротша в силу Рч.4. $\blacktriangle$

Рем. Плодто $\forall$ $\varepsilon > 0$ є найкоротшою на достатньо мале проміжку.

┐ Соч. 5. $\forall$ м. р. ріманового мн. (M, g) $\exists$ відкр. $U \ni p$ і $\delta > 0$ такі, що $\forall q, \chi \in U$ можна з'єднати єдиною (з точністю до заміни параметра) найкоротшою дуге $d_g(q, \chi) < \delta$.

┐ Беремо U і δ з Рч. 3. і застосовуємо Рч. 4. до $\chi \in U \subset B_\delta^N(q)$. $\triangle$

Розширення функціоналу довжини

Нехай (X, d) – (узгоджений) метричний простір (тобто d може приймати і $+\infty$), ^(тобто розширений)

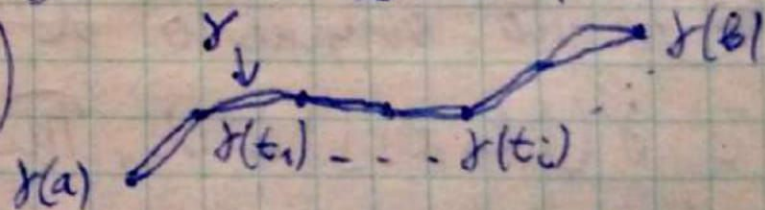
Рем. Множина усіх шляхів у X $\Gamma := \{\gamma \in C([a, b], X) \mid [a, b] \subset \mathbb{R}\}$ –

очевидно, клас допустимих шляхів на X (що нормальний $\Rightarrow T_0$).

def. Функціонал довжини метрики d зветься $l_d: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

$$l_d(\gamma) := \sup_{a=t_0 < \dots < t_m=b} \left(\sum_{i=1}^m d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \right)$$

(де $\gamma \in C([a, b], X)$).



Рем. Плодто це суп довжин ламаных, що вписані у γ . Вик

гор. $+\infty$, якщо їх довжини необмежені зверху (зокрема, якщо серед них $\in +\infty$).

лев. Якщо $l_d(\gamma) < +\infty$, тоді γ звенеса спрямлює.

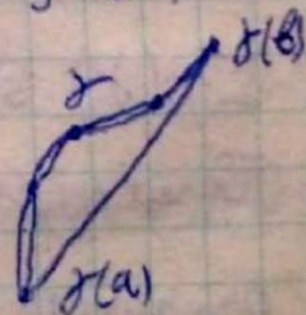
л. 1. l_d -функціонал довжини на Γ . Він напівноперервний знизу, тобто $\forall$ послідовності $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([a, b], X)$, що збігається до $\gamma \in C([a, b], X)$ поточково (тобто $\forall t \in [a, b] \gamma_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma(t)$)

$$l_d(\gamma) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} l_d(\gamma_n).$$

Крім того, $\forall \gamma \in C([a, b], X) \quad l_d(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$.

► Путь і гай для розбиття $T = \{t_i\}_{i=0}^m$ фіксована $[a, b]$ (тобто $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$) позначатимемо через $\Sigma_T(\gamma)$ довжину фігн. ланцюга, що вписана у γ :

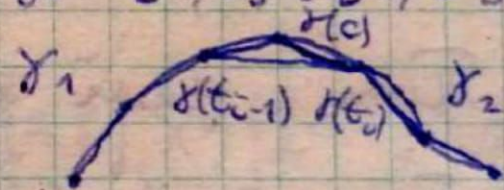
$$\Sigma_T(\gamma) := \sum_{i=1}^m d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)). \quad \text{Тобто } l_d(\gamma) = \sup_T \Sigma_T(\gamma).$$



Зокрема, за нерівністю трикутника, $\forall T \quad \Sigma_T(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$, а тому $l_d(\gamma) \geq \Sigma_T(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$ - це означає

властивість з умови. Перевіримо тепер умови div. ф-лу
довести, починаючи з другої:

2. Нехай $\gamma \in C([a, b], X)$, $c \in [a, b]$. $\gamma_1 := \gamma|_{[a, c]}$, $\gamma_2 := \gamma|_{[c, b]}$,
тоді $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$. $\forall$ розбиттів T_1 вигр. $[a, c]$ і T_2 вигр. $[c, b]$ іє
об'єднання T - розбиття $[a, b]$, і $\Sigma_{T_1}(\gamma_1) + \Sigma_{T_2}(\gamma_2) = \Sigma_T(\gamma) \leq l_d(\gamma)$.
Переходячи до суп за T_1 і T_2 , отримаємо $l_d(\gamma_1) + l_d(\gamma_2) \leq l_d(\gamma)$.
З іншого боку, $\forall$ розд. T вигр. $[a, b]$, переходячи до нього за необхідності
 C , отримаємо розд. $T' = T_1 \cup T_2$ (де T_1 та T_2 - розд. $[a, c]$ і $[c, b]$ як
раніше), і $\Sigma_{T_1}(\gamma) \geq \Sigma_{T'}(\gamma)$ за пер. тр-ка.

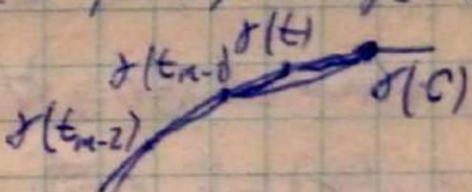


Отже,

$$\Sigma_T(\gamma) \leq \Sigma_{T_1}(\gamma) = \Sigma_{T_1}(\gamma_1) + \Sigma_{T_2}(\gamma_2) \leq l_d(\gamma_1) + l_d(\gamma_2).$$

Переходячи до суп за T , маємо $l_d(\gamma) \leq l_d(\gamma_1) + l_d(\gamma_2)$. Отже,
отримаємо адекватність $l_d(\gamma) = l_d(\gamma_1) + l_d(\gamma_2)$.

1. Для прямого $\gamma \in C([a, b], X)$ розглянемо ф-цію

$t \mapsto \ell_d(\gamma|_{[a,t]})$. В силу 2, для $t_1 \leq t_2$ $\ell_d(\gamma|_{[a,t_2]}) - \ell_d(\gamma|_{[a,t_1]}) = \ell_d(\gamma|_{[t_1,t_2]}) \geq 0$, можно же неснапа φ -зия. Добегено ии непрерывности γ гов. $t = C$. Несан $\varepsilon > 0$. В силу deb. sup, $\exists$ розд. T близ. $[a, C]$ make, что $\ell_d(\gamma|_{[a,C]}) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_T(\gamma|_{[a,C]}) \leq \ell_d(\gamma|_{[a,C]})$. Несан $T = \{t_i\}_{i=0}^m$, $\forall t \in (t_{m-1}, C]$ говорю го T м. t , отпущено T' , и за неп. мр-на $\sum_{T'}(\gamma|_{[a,C]}) > \sum_T(\gamma|_{[a,C]}) > \ell_d(\gamma|_{[a,C]}) - \frac{\varepsilon}{2}$. Показано $T'' := \{t_i\}_{i=0}^{m-1} \cup \{t\}$,  $\sum_{T''}(\gamma|_{[a,t]}) \leq \ell_d(\gamma|_{[a,t]})$. Таким, близинам ии значения близ частик непер. непрерывности, отпущено $d(\gamma(t), \gamma(C)) > \ell_d(\gamma|_{[t,C]}) - \frac{\varepsilon}{2}$ (мым знову використати 2). В силу непер. γ (у непрерывности мон.) $\exists$ $0 < \delta < C - t_{m-1}$ make, что $\forall t \in (C - \delta, C]$ $d(\gamma(t), \gamma(C)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\ell_d(\gamma|_{[a,C]}) - \ell_d(\gamma|_{[a,t]}) = [2] = \ell_d(\gamma|_{[t,C]}) < d(\gamma(t), \gamma(C)) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Таким самым говеду непрерывности злива. Вопр. Аналогичным путем проверить непрерыв. справа.