

Дійсно, достатньо перевірити, що вони є геод. (Взр.), тоді з єдиності і того, що через $\forall$ точку q проходить $\forall$ вектора можна провести одну криву (Взр.) випливає, що інших немає.

лев. Для натурально параметризованої γ у рімановому (M, g)

$|\nabla_{\gamma} \gamma'(s)|$ зветься геодезичною кривиною γ у s .

лем. Подто γ -геод. $\Leftrightarrow$ її геодезична кривина нульова.

Варіаційна задача на многовиді

M - k -м. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$.

лев. Лагранжіаном на M зветься φ -філ $L \in C(TM)$.

Ес. 1. $\blacksquare \blacksquare$ Лагранжіан довільної ріманової або субріманової структури: $L(p, v) = \sqrt{g_p(v, v)}$ (тут, як і раніше, позначено ел-ти TM як пари $(p, v) : p \in M, v \in T_p M$). (якщо субрм. n -ка-адм. ріманової)

2. Лагр. дії рівномірної або суворої імпр.: $L(p, v) = g_p(v, v)$.

3. Рінслерова структура $(\forall p \in M \quad L(p, \cdot)$ - норма на $T_p M$).

4. $M = U \subset \mathbb{R}^n$ (відкр.), тоді TM можна отождествити з $U \times \mathbb{R}^n$ з мод. коорд. $(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$. Нехай $U \in C^1(U)$.

$$L(p, v) := \frac{m}{2} |v|^2 - U(p) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{x}^i)^2 - U(x^1, \dots, x^n) -$$

направлений ~~руху~~ руху частинки маси $m > 0$ в
напр. сили $F = -\nabla U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x^1}, \dots, -\frac{\partial U}{\partial x^n} \right)$ (U наз. потенціалом
або потенціальною енергією, $\frac{m}{2} |v|^2$ - кінетичною енергією).

Наприклад, для сили тяжіння $U = \{x^n > 0\}$, $U = mgx^n$ (де
 g - прискорення вільного падіння).

Лем. Функціоналом варіаційної задачі на M з напрямкисаном L
зветься відобр. L , що кожному кусково- k -л. шляху $\gamma: [a, b] \rightarrow M$
ставить у відповідність число

$$L(\gamma) := \int_a^b L(\gamma(t), \gamma'(t)) dt \in \mathbb{R}.$$

Вст. $L(x)$ визначене, бо інтегрується куск. неперервна ф-ція. $\mathcal{P}$ -л L , зокрема, адитивний: $L(x_1 * x_2) = L(x_1) + L(x_2)$.

Ел 1. Ріманова довжина ~~маси~~ маси, судріманова довжина (яко обмежити на горизонтальні маси)

2. Апп-но, ріманова та судріманова дії.

3. Рінслерова довжина.

4. Діа.

def. Куск. к-м. маса $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ зветься екстремальною варіаційною задачею на M з ляр. L , якщо $\forall$ куск. к-м. масу $\mu: [\overset{a}{\bullet}, \overset{b}{\bullet}] \rightarrow M$ такого, що $\mu(\overset{a}{\bullet}) = \gamma(a)$, $\mu(\overset{b}{\bullet}) = \gamma(b)$, $L(\gamma) \leq L(\mu)$ (де L - з ляр. def)

Ел 1.3 Ріманові, судрім., рінслерові найкороттні,

2. Тікес найкороттні $l(\text{Вір.})$ для натуральної параметризації (сеї L неінваріантний відн. закінч. нач.)

4. Принцип найменшої дії: частка курсетвья траєкто-
рією, що є екстремальною вар. задачею.



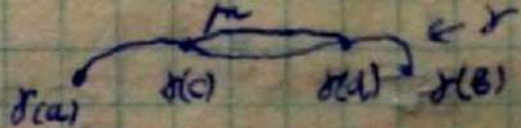
Лем. Звичайно, можна розглядати й функцію $L(x) \geq L(y) \forall y$:
можна просто поміняти L на $-L$.

Лем. Нехай $(x^1, \dots, x^n)$ - лок. коорд. на $U \subset M$. Тоді вигн. координата
на $\pi^{-1}(U) = \{(p, v) \in TM \mid p \in U\}$ у зв'язку розділі, керуючись
традицією, позначатимемо $(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ (яко у Е.Ч. - це координати
та швидкості частинки)

Тн. (Рівняння Ейлера-Лагранжа). Нехай вирізювальна задача на
 k -м. M ($k \geq 2$) задана локр. $L \in C^{k-1}(TM)$; $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ - її крива.
 k -м. екстремаль. Тоді $\forall t_0 \in [a, b] \forall$ лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на $U \ni \gamma(t_0)$
і для вигн. координат $(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ на $\pi^{-1}(U)$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(\gamma, \dot{\gamma}) \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(\gamma, \dot{\gamma}) \text{ на } \gamma^{-1}(U), \quad i = \overline{1, n},$$

Лем. Якщо $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ - екстремаль в.з., то $\forall [c, d] \subset [a, b]$

$\gamma|_{[c, d]}$ - теж екстремаль цієї в.з.



► $\gamma|_{[c, d]}$ - крив. k -м. M це не екстремаль, тоді $\exists \mu: [c, d] \rightarrow$

$\mu(c) = \delta(c), \mu(d) = \delta(d)$
 $\rightarrow M$ - куск. к-м., $L(\mu) < L(\gamma)$. Тогда $\tilde{\gamma} := \gamma|_{[a,c]} * \mu * \gamma|_{[d,b]}$
 куск. к-м., $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\mu) + L(\gamma|_{[d,b]}) < L(\gamma|_{[a,b]})$
 $+ L(\gamma|_{[c,d]}) + L(\gamma|_{[d,b]}) = L(\gamma)$; тогда γ - не экстремаль. Δ

$\Rightarrow$ (Тн). Пусть $[c,d] \subset [a,b]$ - интервал, что $t_0 \in [c,d]$ и $\gamma([c,d]) \subset U$. Рассмотрим гомотопию куск. к-м. $\mu: [c,d] \rightarrow U$
 с локал. зад. $(\mu^1, \dots, \mu^n)$ в коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ такой, что $\mu^i(c) = \mu^i(d) = 0$,
 $i = \overline{1, n}$ (збуренна). Пусть $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ - локал. зад. γ . $\forall T \in \mathbb{R}$ зададим
 $\gamma_T: [c,d] \rightarrow U$ локал. заданием



$t \mapsto (\gamma^1(t) + T\mu^1(t), \dots, \gamma^n(t) + T\mu^n(t))$
 (вариация). За построения, γ_T - куск. к-м., $\gamma_T(c) = \gamma(c)$,
 $\gamma_T(d) = \gamma(d)$, $\gamma_0 = \gamma|_{[c,d]}$. За лем., тогда $L(\gamma_0) \leq L(\gamma_T) \forall T$,
 тогда $T=0$ - минимизатор $T \mapsto L(\gamma_T)$, поэтому критична:

$$0 = \frac{d}{dT} L(\gamma_T) \Big|_{T=0} = \frac{d}{dT} \left(\int_c^d L(\gamma^1(t) + T\mu^1(t), \dots, \gamma^n(t) + T\mu^n(t)) dt \right) \Big|_{T=0} = \left[\text{нужн. производная по } T \right]$$

$$= \int_c^d \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} (x^1(t), \dots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)) p^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} (x^1(t), \dots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)) \dot{p}^i(t) \right) dt = \left[\begin{array}{l} \text{інтегруємо} \\ \text{групу суми} \\ \text{за мінусами} \end{array} \right] = \int_c^d \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} (x(t), \dot{x}(t)) p^i(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} (x(t), \dot{x}(t)) p^i(t) \right) \right) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} (x(t), \dot{x}(t)) p^i(t) \Big|_c^d.$$

$\text{Оскільки } p^i(c) = p^i(d) = 0 \quad \forall i$

Отже $\forall p$ як вище

$$\int_c^d \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} (x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} (x(t), \dot{x}(t)) \right) \right) p^i(t) dt = 0.$$

Отримавши різні p , отримуємо збіг рівняння $E = L$. $\triangle$

Впр. Визначимо $E: TM \rightarrow \mathbb{R}$ локально як $E := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - L$.

Показати, що вона коректно визначена і що $E(x, \dot{x})$ постійна

$\forall$ екстремалі γ . E зветься енергією вар. задачі (зокрема,

у Ек. 1. $E \stackrel{(p,v)}{=} \frac{m}{2} |v|^2 + U(p)$ - повна енергія частинки).

Що таке енергія у задачі про пошук найкоротшого?

Ек. 1. Отже, у лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ на $\tilde{U}$, якщо

$g(u) = g_{ij} dx^i dx^j$, маємо $L = \sqrt{g_{ij} (x^1, \dots, x^n) \dot{x}^i \dot{x}^j}$, тобто

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 g_{ik} \dot{x}^i}{\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Обмеженість рімановим випадком. Нехай γ - регулярна най-коротша. Перейдемо до нат. параметру. Нехай $(x^1, \dots, x^n)$ - пок. задання γ в U . Тоді $\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} = 1$ в її точках, і рівн.

Е.-л. набувають вигляду:

$$\frac{d}{dt} (g_{ik} \dot{x}^i) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^j \dot{x}^i + g_{ik} \ddot{x}^i = 0$$

Перенесемо все в лівий бік, доопишемо на g^{kl} , додамо за k :

$$\delta_i^l (g_{ik} g^{kl} \ddot{x}^i + g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j) = 0, \quad l = \overline{1, n}.$$

Оскільки $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^j \dot{x}^i = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^j$ (просто міняємо індекси місцями):

$$\ddot{x}^l + \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad l = \overline{1, n},$$

с.к. рівн. зв'язності γ $(x^1, \dots, x^n)$

Це рівняння геодезичних (почаємо, що параметр натуральний).

Соч. Буде-яка регулярна найкоротша внутрішньої метрики
ріманового мн. $(M, g) \in$ геодезичною.

Рез. Для постійних шляхів це, звичайно, не так.

Вопр. Що буде у субім. випадку, якщо γ -регулярна, а субім.
м-ка-обмеження ріманової?

Ех.2. Для дії рівняння тілс (тепер умова натуральності не
потрібна), тобто шадкі екстремалі $\in$ геодезичними (рім. зв'яз-
ності, а отже і рім. м-ка), зокрема регулярними або постійними.

Ех.4. Для $L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{x}^i)^2 - U(x^1, \dots, x^n)$ маємо $\frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} = \bullet F^i$,
 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m \dot{x}^i$, $i = \overline{1, n}$, тому рівн. Е.-Л.:

$$m \ddot{x} = F \quad (\text{II закон Ньютона}).$$

Зокрема, при $U = F = 0$ маємо $\ddot{x} = 0$, тобто $x = at + b$
($a, b \in \mathbb{R}^n$) - I закон Ньютона. Для сил тяжіння $U = mgx^n$
 $\Rightarrow F = (0, \dots, 0, -mg)$, і з $\ddot{x} = (0, \dots, 0, -g)$ маємо $x^i = a^i t + b^i$, $i = \overline{1, n-1}$.

$$x^n = -\frac{gt^2}{2} + a^n t + b^n \text{ (Балістична траєкторія). Тут}$$

вектори $b = x(0)$, $a = \dot{x}(0)$ - початкові коорд. і швидкість.

Реш. Як і в механіці, у варіаційній задачі на M можна перейти від лагранжівського формулювання (як у нас) до гамільтонівського. Це можна зробити, наприклад, за допомогою ріманової n -ли g на M . $\forall q \in M$ розглянемо операцію спускання індексів $(\cdot)^b : T_q M \rightarrow T_q M^* : v \mapsto v^b : v^b(w) = g_q(v, w)$

$\forall w \in T_q M$. Визначимо перетворення Леґандра $Le : TM \rightarrow TM^*$, де $TM^* := TM^1_0$ - ^екодотичний ^{матричний} розв'язок : $Le(q, v) := (q, v^b)$.

Впр. $(\cdot)^b$ - лін. ізоморфізми $\forall q$, а Le - дифеоморфізм.

Тоді гамільтоніан варіаційної задачі - це ~~Е~~

$$\mathcal{H} := E \circ Le^{-1} : TM^* \rightarrow \mathbb{R},$$

де E - енергія, що визначається у Впр. вище. Зокрема, $\mathcal{H}$ зосереджується на екстремалах. Лок. коорд. TM^* (на $\pi^{-1}(u)$).

де U - область лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на M) традиційно позн. $(x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n)$, а в точках γ $p = (\dot{x}^i)^b$ наз. імпульсом.
Впр. (рівняння Гамільтона) В точках екстремалі γ лок. коорд.

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}, \quad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

У Ек. 1. беремо $g = m \langle \cdot, \cdot \rangle$, тоді $p^i = m \dot{x}^i$ задає перетв. лок.,
 Отже $\mathcal{H}(x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n (p^i)^2 + U(x^1, \dots, x^n)$. Рівняння:

$$m \ddot{x}^i = \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} = F^i, \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{знову II закон Н.}),$$

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^i} = \frac{1}{m} p^i, \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{завжди вірно}).$$

У Ек. 2. $E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - \mathcal{L} = (2g_{ij} \dot{x}^j) \dot{x}^i - g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \mathcal{L}$.

Ізоморфізм $T_q M^* \rightarrow T_q M$ ^(для тілосового випадку) що обернений до $(\cdot)^b$, позначається

$(\cdot)^{\#}$ (тілом індекс). Тоді $L^{-1}: (q, p) \mapsto (q, p^{\#})$, $i \mathcal{H}(q, p) =$
 $= E(q, p^{\#}) = \mathcal{L}(q, p^{\#}) = g_q(p^{\#}, p^{\#}) (= \hat{g}_q(p, p))$, де $\hat{g}$ - метрика,
 зоб. одну з вищевказаних $\forall (q, p) \in TM^*$.

Впр. У тілосовому випадку рівн. Гамільтона - це знову рівняння геодезичні.
 Саме за допомогою рівн. Гамільтона зазвичай визначають геодезичні.

(у цьому випадку все обмежується на підпростори $TM: TM^*$, що відносяться розподілу).

Рем. Рівняння E, L дають необхідні, але не достатні умови (вони навіть не відносять $L(x) \leq L(y) \forall y$ від $L(x) > L(y) \forall y$). Наприклад, для річкових найкоротших:

- на S^n геодезична (ліній) довжина $< \pi$ -



Єдина найкоротша, що з'єднує кінці, $= \pi$ - найкор.

але не єдина (точка діам. протилежної, іє безліч), $> \pi$ - не найкоротша.

- прямий циліндр $M = S^1 \times \mathbb{R}$ в E^3 локалізований E^2 цю геодезичні лінії - образи відрізків прямих під дією локалізованої проекції $\pi: E^2 \rightarrow M: (u, v) \mapsto (e^{iu}, v)$ ($= (\cos u, \sin u, v)$) (Впр.), тому $\forall x \neq y \exists$ безліч геодезичних, що їх поєднують (зв'язкові), але лише 1 найкоротша (2, якщо точка проєктується в діам. протилежні на S^1).

