

Афінні та риманові зв'язності. Геометричні

M - k -м. многовид, $k \geq 2$, $\dim M = n$.

def. Афінною зв'язністю на M зветься відображення $\nabla: \mathcal{X}^{k-2}(M) \times \mathcal{X}^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{X}^{k-2}(M): X, Y \mapsto \nabla_X Y$ таке, що

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}^{k-2}(M), f, g \in C^{k-2}(M), Z \in \mathcal{X}^{k-1}(M);$

2. $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad \forall X \in \mathcal{X}^{k-2}(M), Y, Z \in \mathcal{X}^{k-1}(M);$

3. $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y \quad \forall X \in \mathcal{X}^{k-2}(M), Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M), f \in C^{k-1}(M).$

$\nabla_X Y$ при цьому зветься коваріантною похідною Y за X . Пара (M, ∇) зветься многовидом з афінною зв'язністю.

Rem. Подіто зв'язність - це правило диференціювання в. полів у напрямку інших полів. 3. є аналогом правила Лейбніца. З цього для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ маємо $\nabla_X (\lambda Y) = \lambda \nabla_X Y$, тобто $\nabla_X \cdot: \mathcal{X}^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{X}^{k-2}(M)$ лінійне над $\mathbb{R}$.

Ex. Точасна зв'язність на $\mathbb{R}^n$ (з шод. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$): для

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \nabla_X Y := X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = X(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} - \text{заглов. дѣб.}$$

Рем. Нехай $(x^1, \dots, x^n)$ - лока. коорд. на $U \subset M$. $\forall i, j = \overline{1, n}$ покладемо ви-
значені на U поле $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$ за $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$:

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \text{де } \Gamma_{ij}^k \in C^{\infty}(U), \quad i, j, k = \overline{1, n}.$$

Звичайно, для цього треба визначити ∇ на U . Це можна коректно
зробити, продовжуючи поля з U на M (Впр. або задати век. підмодуль
дѣб. $\{\Gamma_{ij}^k\}_{i,j,k=1}^n$ поз. символами Кристоффеля зв. ∇ у $(x^1, \dots, x^n)$).

Впр. При заміні $(x^1, \dots, x^n)$ на $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ нові с.ч. мають вигляд

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{lm}^0 \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l}$$

(Зокрема, це не компоненти $(2,1)$ -тенз. поля).

Рем. Нехай $X \in \mathcal{X}^{2-2}(M)$, $Y \in \mathcal{X}^{2-1}(M)$, $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_U = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$.

$$\begin{aligned} \nabla_X Y|_U &= \nabla_{(X^i \frac{\partial}{\partial x^i})} (Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = [\underline{1}] = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = [\underline{2} \text{ і } \underline{3}] = \\ &= X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = [\text{дѣб. } \Gamma_{ij}^k] = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\nabla_X Y|_u = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

def. ∇ зветься маскою, якщо в кожій $\forall p \in M$ $\exists$ лок. коорд.: в яких $\Gamma_{ij}^k = 0 \forall i, j, k$.

Rem. Подібно у цих коорд. ∇ локально виглядає як ∇ в $\mathbb{R}^n$.

Rem. Фіксуємо $Y \in \mathcal{X}^{x-1}(M)$. Поді $X \mapsto \nabla_X Y : \mathcal{X}^{x-2}(M) \rightarrow \mathcal{X}^{x-2}(M) \in$

в силу 1. лінійний над $\mathcal{X}^{x-2}(M)$, тоді задає $(x-2)$ -м. $(1,1)$ -тенз. поле (поле операторів). Отже, $\forall p \in M$ визначене значення

цього поля у p ~~визначає оператор~~ $T_p M \rightarrow T_p M : v \mapsto \nabla_v Y$.

Визображення $\nabla : T_p M \times \mathcal{X}^{x-1}(M) \rightarrow T_p M : v, Y \mapsto \nabla_v Y$ будемо називати зв'язністю у p , що визн. ∇ , ~~а $\nabla_v Y$ - ков. похідною Y за v~~ . При

зв'язку $\forall X \in \mathcal{X}^{x-2}(M) (\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y$. Іншими словами, 1.

гарантує, що $(\nabla_X Y)_p$ визначене лише $X_p \in Y$. Також це легко вивести з φ -м ∇ лок. коорд.

Впр. $\nabla_{\lambda v + \mu w} X = \lambda \nabla_v X + \mu \nabla_w X;$

$$\nabla_v (X + Y) = \nabla_v X + \nabla_v Y;$$

$$\nabla_v (fX) = v(f) X_p + f(p) \nabla_v X.$$

$$\left. \begin{array}{l} (\forall v, w \in T_p M, \\ X, Y \in \mathcal{X}^{x-1}(M), \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ f \in C^{x-1}(M)) \end{array} \right\}$$

Пр. Нехай $\gamma \in C^2(I, M)$ (де $I \subset \mathbb{R}$ - проміжок), а X - $(\ell-1)$ -м. поле узгодне γ : $X \in C^{\ell-1}(I, TM)$, $\forall t \in I \ X(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Також $\exists!$ $(\ell-2)$ -м. поле $\nabla_{\gamma} X$ узгодне γ таке, що $\forall Y \in \mathcal{X}^{\ell-1}(M) \ \forall t \in I$

$$\nabla_{\gamma'(t)} Y = \nabla_{\gamma'} (Y \circ \gamma)(t) \in T_{\gamma(t)}M.$$

Рем. За деб., $Y \circ \gamma$ - $(\ell-1)$ -м. поле узгодне γ (одне-значна Y на γ). П.ч., згідно з Пр коректно

визначене відобр. полів узгодне γ $\nabla_{\gamma} : X \mapsto \nabla_{\gamma} X$.

деб. $\nabla_{\gamma} X$ зветься коваріантним похідною X узгодне γ .

! Отже, нехай $\nabla_{\gamma} X$ існує. Розвн. $\forall Y \in \mathcal{X}^{\ell-1}(M)$ і покладемо

$X := Y \circ \gamma$. $\forall t_0 \in I$ нехай $(x^1, \dots, x^n)$ - сім'я лок. коорд. на $U \ni \gamma(t_0)$,

$(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ - Візм. лок. задана γ , $Y|_U = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Також $X|_{\gamma^{-1}(U)} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$,

де $X^i(t) = Y^i(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ для $t \in \gamma^{-1}(U)$. Нехай $\{\Gamma_{ij}^k\}$ - с.к.

∇ в $(x^1, \dots, x^n)$. Також з лок. р-ли функ (що, очевидно, вірна і для ков. похідної у точці) $\forall t \in \gamma^{-1}(U)$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma} X(t) &= \nabla_{\gamma'(t)} Y = \nabla_{(\gamma^i)'(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = (\gamma^i)'(t) \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) + \Gamma_{ij}^k (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) \cdot Y^j (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \left[\begin{matrix} \text{Kovariant} \\ \text{deriv.} \\ \text{of } Y \end{matrix} \right] = \\ &= \left(\frac{dX^k}{dt}(t) + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma)(t) \cdot (\gamma^i)'(t) \cdot X^j(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Цей вираз однозначно визначений зв'язністю, $\gamma \in X$. Зв'язи!

∃ Тепер визначимо $\nabla_{\gamma} X$ ф-ною вище:

$$\nabla_{\gamma} X|_{\gamma^{-1}(u)} := \left((X^k)' + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \cdot (\gamma^i)' \cdot X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

($\forall$ коорд. околу u з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$, що перетинаються з носієм γ).

Впр. Це коректно визначене поле уздовж γ (тобто треба перевірити, що вираз не змінюється при зміні координат, використавши ф-ли перетворення $\{\Gamma_{ij}^k\}$ вище).

Коефіцієнти тут $(x-2)$ -и. $\Rightarrow \nabla_{\gamma} X \in C^{x-2}(I, TM)$. Воно за-
говорює ~~про~~ умові Рн. в селу підручників та зоведенні! $\triangle$

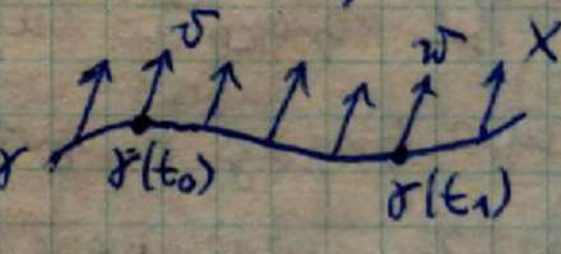
Вспр. $\forall \gamma \in C^x(I, M)$, X, γ - $(x-1)$ -м. в.к. условие γ і $f \in C^{x-1}(I)$:

$$\nabla_{\gamma'}(X + \gamma) = \nabla_{\gamma'}X + \nabla_{\gamma'}\gamma;$$

$$\nabla_{\gamma'}(fX) = f'X + f \nabla_{\gamma'}X.$$

Рем. Также I является местом, у нас $\nabla_{\gamma'}X$ определяется однозначно ($\nabla_{\gamma'}X(a+0)$ або $\nabla_{\gamma'}X(b-0)$).

деф. $(x-1)$ -матке поле X условие $\gamma \in C^x(I, M)$ звется параллельным (у мнорозвиці з аф. зв. (M, ∇)), якщо $\nabla_{\gamma'}X = 0$. Также при цьому $X|_{t_0} = v (\in T_{\gamma(t_0)}M)$, а $X|_{t_1} = w (\in T_{\gamma(t_1)}M)$, то говорить, что w отриманий з v параллельным перенесением з $\gamma(t_0)$ з $\gamma(t_1)$ условие γ .

Рл. $\forall \gamma \in C^x(I, M) \forall t_0 \in I \forall v \in T_{\gamma(t_0)}M$  $\exists!$ параллельное $(x-1)$ -м. поле X условие γ так, что $X(t_0) = v$.

$\Rightarrow$ З лок. запису у попр. доредженні випливає, что $\forall t \in I$ і лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на $U \ni \gamma(t)$ для лок. задання

$X|_{\gamma^{-1}(u)} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (де $X^i \in C^{k-1}(\gamma^{-1}(u))$, $i = \overline{1, n}$) згідно

паралельності мають вигляд:

$$(X^k)' + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma)(\gamma^i)' X^j = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (*)$$

де $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ - лок. задання γ , а $\{\Gamma_{ij}^k\}$ - с. к. ∇ на U . Це система $3\mathbb{A}\mathbb{D}$ першого порядку, лінійна з $(x, \dot{x})$ -ми. Коэф. для sign .

задачі Коші, тобто (*) разом з початковими умовами $X^i(t_0) = v^i$, $i = \overline{1, n}$ (тут $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$; тобто $X(t_0) = v$) розв'язок $\exists!$

на всій області визначення коефіцієнтів, тобто $\gamma^{-1}(U)$. якщо $\gamma(t_0) \in U$

Для $\forall t \in I$, де $t \geq t_0$ (для $t \leq t_0$ аналогічно), використаємо лему Лебега, роздіємо $[t_0, t]$ на $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = t$

так, що $\forall i = \overline{1, m}$ $\{\gamma([t_{i-1}, t_i])\}$ міститься у деякому коорд. околі (наприклад, $t_i = t_0 + \frac{i(t-t_0)}{m}$, де $\frac{t-t_0}{m}$ менше числа Лебега покриття компакта $[t_0, t]$ образами коорд. околів). На

$[t_0, t_1]$ розв'ясемо з Коші для (*) з поч. умовами $X^i(t_0) = v^i$

$(v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i})$. З цього отримавмо $\exists!$ поля X на $[t_0, t_1]$ і
 значення $X(t_1)$. На $[t_1, t_2]$ розв'язано з. Коші для $(*)$ з поч.
 умовою $X(t_1)$ etc. $\Rightarrow$ отримавмо $\exists!$ X на $[t_0, t]$, і так
 $\forall t$. У нашій побудові X буде $(\ell-1)$ -м. на кожному з $[t_{i-1}, t_i]$
 Мабуть у t_i можна вивести з єдиності $((\ell-1)$ -м.) розв'язку
 з. Коші в околі t_i . $\triangle$

Рем. Зокрема, завжди однозначно визначена $\blacksquare$ паралельне
 перенесення $\overset{w}{\parallel}$ вектора $v \in T_{x(t_0)} M$ у $v \in T_{x(t_1)} M$ уздовж γ .
 Воно задає відображення $P_{t_0, t_1} : T_{x(t_0)} M \rightarrow T_{x(t_1)} M : v \mapsto w$.

Впр. Це лінійний ізоморфізм.

Ес. У випадку плоскої (хоча й локально) зв'язності,
 зокрема, для зв. на $\mathbb{R}^n$ з повнр. Ес. $(*)$ набуває вигляду
 $(X^k)' = 0, k = \overline{1, n}$, тобто $X^k = X_0^k = v^k$ - це "звичайне" парал.
 перенесення (у відп. лок. або глоб. координатах), що не залежить

Візь γ . У заг. випадку залежність $\gamma \in \dots$ 

Рем. Якщо γ — x -м., то $\gamma': t \mapsto \gamma'(t)$ — $(x-1)$ -м. в.н. уздовж γ .

дев. $\gamma \in C^x(I, M)$ зветься геодезичною (лінійною) якщо вона з аф.

зв'язності (M, ∇) , якщо $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$, тобто γ' — паралельне уздовж γ .

Рем. Ця умова, взагалі кажучи, не зберігається при переході до еквівалентної кривої (загінні параметра).

Впр. При яких замінах параметра вона все не зберігається?

Рем. У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U з с.к. $\{\Gamma_{ij}^k\}$ для α -ції

$(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ лок. задана γ з $(*)$ отримують умови:

$$(\gamma^k)'' + \Gamma_{ij}^k (\gamma^i)' (\gamma^j)' = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad (**).$$

Ця система нелінійна $3 \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ II порядку. Взагалі кажучи, її розв'язок $\exists$ тільки локально:

Рм. Нехай $x \geq 3$.

1. $\forall p \in M, \forall \epsilon \in T_p M \exists \epsilon > 0$ та геодезична $\gamma \in C^x(\epsilon, M)$

таким, що $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ (тобто γ проходить через p у напрямку v).

2. $\forall$ геодезичних $\gamma, \mu \in C^2(I, M)$ якщо $\exists t_0 \in I$ таке, що $\gamma(t_0) = \mu(t_0)$ і $\gamma'(t_0) = \mu'(t_0)$, то $\gamma = \mu$.

► Це знову викликає $\exists!$ для кожної лок. системи координат розв'язку z . Кожі для $(**)$ з початковими умовами $\gamma^i(t_0) = x_0^i$, $(\gamma^i)'(t_0) = v^i$, $i = \overline{1, n}$, де $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ - коорд. p , $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Тут система визначена $(x-z)$ -м. Γ_{ij}^k , тому для застосовності теореми потрібно $X \geq 3$ (або лінійність). Для існування формально лок. розв'язку, Єдиність - знову через лему Ледера (Воп)

Ек. Для гладкої (принаймні локально) ∇ , зокрема, для ∇ на $\mathbb{R}^n$

з Ек. вище у вим. коорд. $(**)$ мають вигляд $(\gamma^k)'' = 0$, $k = \overline{1, n}$, тобто $\gamma^k = x_0^k + v^k(t - t_0)$ (у $\mathbb{R}^n$ це трієвіска прямих).

Рем. Многовиди з аф. зв'язністю - це ще одне узагальнення ріманових, як ми певдовзі побачимо.

def Скрючен (кривинна) аф. зв. ∇ на M звется $T: \mathcal{X}^{x-1}(M) \times \mathcal{X}^{x-1}(M) \rightarrow \mathcal{X}^{x-2}(M): T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$. Якщо $T = 0$, ∇ називають зв'язністю без скруту.

Рк. T задає $(x-2)$ -м. косиметричне $(2,1)$ -тензорне поле.

$\Rightarrow$ Косиметричність: $T(Y, X) = \nabla_Y X - \nabla_X Y - [Y, X] = -T(X, Y)$.

Щоб перевірити тензорність, переходимо, ~~що~~ T лінійне над $C^{x-2}(M)$. Лінійність за додаванням - з відп. властивості $\nabla: [\cdot, \cdot]$ (функції лі). $\forall f \in C^{x-2}(M), X, Y \in \mathcal{X}^{x-1}(M)$:

$$T(fX, Y) = \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] = f \nabla_X Y - Y(f)X - f \nabla_Y X - f[X, Y] + Y(f)X = f \cdot T(X, Y).$$

Для другого аргумента - анало або використаємо косиметричність. Також випливає з лок. задання тензора. $\triangle$

Рем. Кесай у лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ ^{на U} $\{T_{ij}^k\}$ - компоненти T ,
тобто $T|_U = T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \otimes dx^j \Leftrightarrow T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \forall i, j = \overline{1, n}$

$$(\nabla_x S)(x_1, \dots, x_k, d_1, \dots, d_e) = X(S(x_1, \dots, x_k, d_1, \dots, d_e)) - S(\nabla_x x_1, \dots, x_k, d_1, \dots, d_e) - \dots - S(x_1, \dots, \nabla_x x_k, d_1, \dots, d_e) - \overbrace{S(x_1, \dots, x_k, \nabla_x d_1, \dots, d_e)}^{\text{---}} - S(x_1, \dots, x_k, d_1, \dots, \nabla_x d_e).$$

Реш. Путь спочатку визначатно диференціювання 1-форми :

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y),$$

а потім за цього год. - довіконних полив.

Прпр. 1. $\nabla_x S$ задает $(d-1)$ -м. (k, l) -мерз. поле.

2. Записать угол в лок. коорд. (те ж, что раньше)

3. Для $(0,1)$ -тензорів (вект. полів) це пов'язане з упр. ∇

$$\underline{y} \cdot \nabla_{fX+gY} S = f \nabla_X S + g \nabla_Y S, \quad \nabla_X (S+T) = \nabla_X S + \nabla_X T \quad \square$$
$$\nabla_x (f \circ S) = X(f) \circ S + f \nabla_x S \quad \forall X, Y, f, g, S, T \text{ z sign. mnozina.}$$

5. Для альт. означення $(k, 1)$ -^кпів маємо:

$$(\nabla_x S)(X_1, \dots, X_k) = \nabla_x (S(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{beginne hier}}}{X_1}, \dots, X_k)) - S(\nabla_x X_1, \dots, X_k) - \dots - S(X_1, \dots, \nabla_x X_k).$$

Реш. Апр. зб. - частковий випадок зб'язності на вст. роздмрування.

Випадок ріманового многовида

def. Агр. зв'язність ∇ на M зветься узгодженою з рімановою метрикою g на M , якщо $\forall X \in \mathcal{X}^{X-1}(M) \quad \nabla_X g = 0$.

Лем. Потім $\forall Y, Z \in \mathcal{X}^{X-1}(M) \quad \nabla_X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

$$\nabla_X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Запишемо цю умову для $Y = \frac{\partial}{\partial x^i}, Z = \frac{\partial}{\partial x^j}, X = \frac{\partial}{\partial x^k}$ у лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U ($\forall i, j, k = \overline{1, n}$). Кесань $g|_U = g_{ij} dx^i dx^j$, $\{g_{ij}\}$ - с.к. ∇ :

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) = g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g \left(\Gamma_{ki}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma_{kj}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il} \quad \forall \text{ лок. координат}$$

Вопр. І навпаки, якщо ця умова виконана $\forall i, j, k = \overline{1, n}$, то ∇ узгоджена з g .

def. Агр. зв'язність ∇ на M зветься рімановою зв'язністю (зв. Леві-Чівита) ріманової n -ки g на M (або рим. зв. (M, g)), якщо вона без скрутки і узгоджена з g .

Рм. (формула Коши). $\forall$ римановою мн. $(M, g) \exists!$ риманове зв'язність ∇ . Вона визначена формулою:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} (X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y)) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}^{x^{-1}}(M). \quad (***)$$

Д ! Нехай ∇ - якась риманова зв. g . Доведемо лемі (***) . Вона визначає ∇ однозначно. Дійсно, нехай для деякого поля X ми знаємо $g(X, Y) \forall Y$. Лемі $\forall p \in M$ нам відома $g_p(X_p, v) \forall v \in T_p M$ (бо $\forall v \in T_p M \exists Y: Y_p = v$ - Втр.). Оскільки g_p - скал. добутки, це однозначно визначає X_p . Отже, ми знаємо $X: p \mapsto X_p$. В такому випадку $g(\nabla_X Y, Z) \forall Z$ визначає $\nabla_X Y (\forall X, Y)$. Оскільки ∇ узгоджена з g :

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= \nabla_X g(Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Y(g(Z, X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ - Z(g(X, Y)) &= -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

Оскільки ∇ без крутості:

$$g([X, Y], Z) = \underline{g(\nabla_X Y, Z)} - g(\nabla_Y X, Z)$$

$$- g([Y, Z], X) = -g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Z Y, X)$$

$$g([Z, X], Y) = g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_X Z, Y)$$

Приймаючи похідні, отримуємо потрібне.

З. Тепер для звичайного риманового (M, g) позначимо праву частину $(***)$ через $F(X, Y, Z)$. Отримаємо $F: \mathcal{X}^{X-1}(M) \times \mathcal{X}^{X-1}(M) \times \mathcal{X}^{X-1}(M) \rightarrow \mathcal{C}^{X-2}(M)$.
Тоді зовнішня F 3-лінійна біліній. задовольняє умову, і $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}^{X-1}(M), f \in \mathcal{C}^{X-1}(M)$

$$F(fX, Y, Z) = f \cdot F(X, Y, Z) + \frac{1}{2} (Y(f)g(Z, X) - Z(f)g(X, Y) - Y(f)g(X, Z) + Z(f)g(X, Y)) = f \cdot F(X, Y, Z).$$

$$F(X, fY, Z) = f \cdot F(X, Y, Z) + \frac{1}{2} (X(f)g(Y, Z) - Z(f)g(X, Y) + X(f)g(Y, Z) - Z(f)g(Y, X)) = f \cdot F(X, Y, Z) + X(f)g(Y, Z).$$

$$F(X, Y, fZ) = f \cdot F(X, Y, Z) + \frac{1}{2} (X(f)g(Y, Z) + Y(f)g(Z, X) - Y(f)g(Z, X) - X(f)g(Z, Y)) = f \cdot F(X, Y, Z).$$

Нехай $X, Y \in \mathcal{X}^{x-1}(M)$. З лінійності за додаванням і тупею
власн. вище випливає, що $F(X, Y, \cdot)$ - 1-форма на M ($x-2$ -м).
Впр. $\forall$ 1-форми α на римановому $(M, g) \exists!$ вектор X таке, що
 $g(X, Y) = \alpha(Y) \forall Y$ (пр. з зазв'язанням g зв'язаним $\perp$ про
однозначну визначеність) (див. таким част. розд.).

Отже, можна однозначно визначити дефіні $\nabla_X Y$ умовою $g(\nabla_X Y, Z) = F(X, Y, Z) \frac{1}{2}$.
Впр. $\nabla_X Y \in \mathcal{X}^{x-2}(M)$. Воно визначене і для $X \in \mathcal{X}^{x-2}(M)$ (а $Y \in \mathcal{X}^{x-1}(M)$).

Три умови $\forall$ векторів X, Y, Z, W , f і h потрібних лінійностей:

$$g(\nabla_{fX+hY} Z, W) = F(fX+hY, Z, W) = fF(X, Z, W) + hF(Y, Z, W) = \\ = g(f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z, W).$$

$$g(\nabla_X (Y+Z), W) = F(X, Y+Z, W) = F(X, Y, W) + F(X, Z, W) = g(\nabla_X Y + \nabla_X Z, W).$$

$$g(\nabla_X (fY), W) = F(X, fY, W) = fF(X, Y, W) + X(f)g(Y, W) = g(f\nabla_X Y + X(f)Y, W).$$

Оскільки це має $\forall W$, згідно з зазв'язанням про єдиність,
 ∇ -оп. зб' єдиність, $\forall X, Y, Z$

$g(\nabla_x Y - \nabla_Y X, Z) = F(X, Y, Z) - F(Y, X, Z) = \frac{1}{2}(g([X, Y], Z) - g([Y, X], Z)) =$
 $= g([X, Y], Z)$, де інші доданки скорочуються. Знову не, це означає, що $\nabla_x Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, тобто ∇ - без сирингу.

Наявності, $g(\nabla_x Y, Z) + g(Y, \nabla_x Z) = F(X, Y, Z) + F(X, Z, Y) = X(g(Y, Z)) \forall X, Y, Z$
 (це знову решта членів скоротилася). Отже, ∇ узагальнена з g і
 $\in$ римановою зв. g . Δ (як завжди, $g(u) = g_{ij} dx^i dx^j$, Γ_{ij}^k - с.к. ∇ на U)

Рем. У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ ∇ для $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$, $i, j, k = \overline{1, n}$:
 $g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(g \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) + 0 \right)$
 $\Gamma_{ij}^l g_{lk} \left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$

інші позначення
 $\Gamma_{ij,k}^l$ - с.к. I пару
 (наші - II пару) $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$
 $\forall i, j$

$\forall k$ симетрично на g^{km} (це координатні G^{-1} , де $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$)
 отже: $\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$.

Ес. Для E^n $g_{ij} = \delta_{ij}$ постійні, тому $\Gamma_{ij}^k = 0$ - зв'язність
 плоска. У загальні, якщо (M, g) плоский, тобто лок. ізометр -

риманів E^n , то в околі $\forall$ його точки $\exists$ лок. коорд., у яких $g_{ij} = \delta_{ij}$, і так само $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Сол. Тільки риманові многовиди мають власну риманову зв'язність.

Лем. Якщо ^{аф.} зв'язність ∇ узгоджена з рим. м-ком g , то $\forall \gamma \in C^x(I, M)$

($I \subset \mathbb{R}$ - проміжок) $\forall$ $(\alpha-1)$ -м. в. полів X, Y уздовж γ

$$g(X, Y)' = g(\nabla_\gamma X, Y) + g(X, \nabla_\gamma Y).$$

$\Rightarrow$ Тим $g(X, Y) : t \mapsto g_{\gamma(t)}(X(t), Y(t)) \in \mathbb{R}$ - ф-ція на I , $(\alpha-1)$ -м.

години справа - аналогічно $((\alpha-2)$ -м.). у лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U

вектор $(x^1, \dots, x^n)$ - лок. зад. γ , $X|_{\gamma^{-1}(u)} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_{\gamma^{-1}(u)} = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $g|_u =$

$= g_{ij} dx^i dx^j$. Тоді $g(X, Y)|_{\gamma^{-1}(u)} = g_{ij}(x^1, \dots, x^n) X^i Y^j$, тому

$$g(X, Y)'|_{\gamma^{-1}(u)} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} (\gamma^k)' X^i Y^j + g_{ij} (X^i)' Y^j + g_{ij} X^i (Y^j)' = [\text{лок.}$$

залежності узгодженості] $= g_{ij} (\Gamma_{ki}^l (\gamma^k)' X^i + (X^k)') Y^j + g_{ij} X^i (\Gamma_{kj}^l (\gamma^k)' Y^j + (Y^l)')$

$= (g(\nabla_\gamma X, Y) + g(X, \nabla_\gamma Y))|_{\gamma^{-1}(u)}$, і це так $\forall$ лок. коорд. Δ

Сол. Якщо X і Y паралельні, то $g(X, Y)$ постійна.

Зокрема, $|X|$ постійна для паралельного X .

► Для паралельних X, Y $\nabla_X X = \nabla_Y Y = 0$, тому з формули $g(X, Y)' = 0 \Rightarrow [\text{І зв'язний}] \Rightarrow g(X, Y)$ пост.; $|X| = \sqrt{g(X, X)}$. $\triangle$

Лем. Подато паралельне перенесення уздовж кривої зберігає довжини векторів і криві ліній памі: $P_{t_0, t_1}: (T_{\gamma(t_0)} M, g_{\gamma(t_0)}) \rightarrow (T_{\gamma(t_1)} M, g_{\gamma(t_1)})$ — лін. ізометрія (лінійність — з Лем. вище або безпосередньо з ізометричності).

Сок. Якщо γ — геодезична др. зв. що факторизується з метрикою, то узій $\dot{\gamma}$ — $|\dot{\gamma}|$ пост. ► Для геоф. γ' — паралельне. $\triangle$

Лем. Зокрема, знаємо, що $\forall p \in M \forall v \in T_p M \exists!$ геоф. $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ така, що $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Поді $|\gamma'| = |v|$, тоді γ або постійна (при $v = 0$), або регулярна з "найменш натуральною" параметризацією (при $v \neq 0$).
тоді $|\gamma'| \equiv \text{const}$

Лем. При невиродженій лін. заміні параметра $T = \alpha t + \beta$,

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad \gamma'_\tau = \gamma'_t \cdot t'_\tau = \frac{1}{\alpha} \gamma'_t, \text{ тож } \nabla_{\gamma'_\tau} \gamma'_\tau = \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{\gamma'_t} \gamma'_t$$

Т.ч., властивість γ бути геодезичною зберігається. Зокрема, вона зберігається для заміни одного параметра на інший: $\tau = t + \beta$.

Рем. Далі зв'язність завжди вважася рімановою.

вв. Крива $\gamma \in C^x(I, M)$ зветься геодезичною ріманового многовида (M, g) , якщо вона або постійна, або еквівалентна кривій μ , що є натурально параметризованою геодезичною ріманової зв'язності ∇ метрики g : $\gamma \sim \mu$, $\nabla_{\mu'} \mu' = 0$, $|\mu'| = 1$.

Рем. З зауважень вище, випливає, що це вв. еквівалентне і що власт. γ бути геодезичною зберігається при переході до еквівалентної кривої. Усі непостійні геодезичні регулярні. Геодезичні з Рм. про $\exists!$ (для ріманової зв.) задовольняють умову вв.: якщо $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ і $\nabla_{\gamma'_t} \gamma'_t = 0$, то при $v \neq 0$ $s = |v|t$ - нат. параметр ($\gamma'_s = \frac{1}{|v|} \gamma'_t \Rightarrow |\gamma'_s| = \frac{|v|}{|v|} = 1$), і $\nabla_{\gamma'_s} \gamma'_s = \frac{1}{|v|^2} \nabla_{\gamma'_t} \gamma'_t = 0$.

Ex. 1. У E^n рим. зв. класна, тому геодезичні - пряміли
 прямис (див. Ex. вище). У класис (M, g) вони вишадатю на
 прями у figh. "класис" лок. координатис.

2. Дослідимо геодезичні на $S^n \subseteq E^{n+1}$. Для цього доведемо Лема
 загалому достатньо лему:

Л. Нехай (M, g) - різномовид у E^n з I
 функ. формою $g = \frac{1 - \cos \theta}{2} \pi$ - лого $(2 - \text{вимірна})$ пло-
щина симетрії, тобто для симетрії σ пр-ру



E^n figh. π $\sigma(\gamma(M)) = \gamma(M)$. Нехай $\gamma(M) \cap \pi$ - посім $\gamma \circ \delta$,
 де δ - рес. крива в M^v . Тоді δ - геодезична.

► "Облещисю" σ на M , тобто вишадисю $\sigma_M: M \rightarrow M$ лишею
 $\gamma \circ \sigma_M = \sigma \circ \gamma$ (це можна зробити, бо $\sigma(\gamma(M)) = \gamma(M)$ і γ - ісг).

Воп. Для будь-якої ізометрії σ такі, що $\sigma(\gamma(M)) = \gamma(M)$,
 σ_M - ізометрія (M, g) . Це вірно для різномовида γ γ .

рим. многовиді. Чи вірно це для просторів з індукованою внутр. метрикою (і метричних ізометрій)?

Отже, $\Phi_M: M \rightarrow M$ - ізометрія. За побудовою, вона залишає точки носія γ на місці, тобто $\Phi_M \circ \gamma = \gamma$.

Впр. $\forall$ рим. мн. (M, g) , $\forall$ ізометрії $F: M \rightarrow N$ і $\forall$ кр. $\gamma: I \rightarrow M$:

$\nabla_{(F \circ \gamma)'} (F \circ \gamma)'(t) = d_{\gamma(t)} F (\nabla_{\gamma'} \gamma'(t)) \quad \forall t \in I$. Тут ∇ зліва і справа - рим. зв. ∇ і δ відр. (Зокрема, при ізометрії координат перетворює у геодезичні).

Застосовувати Впр. до $F = \Phi_M$, маємо $d_{\gamma(t)} \Phi_M (\nabla_{\gamma'} \gamma'(t)) = \nabla_{\gamma'} \gamma'(t) \quad \forall t$. Далі нескладно вивести t натуральний (якщо це не так, перейдемо до натурального), тобто $g(\gamma', \gamma') = 1$. Застосуємо Лем. вище:

$$0 = g(\gamma', \gamma')' = g(\nabla_{\gamma'} \gamma', \gamma') + g(\gamma', \nabla_{\gamma'} \gamma') = 2g(\nabla_{\gamma'} \gamma', \gamma').$$

Згідно з Лем. I функц. форми, $\forall t \in I$

$$0 = g(\nabla_{\gamma'} \gamma'(t), \gamma'(t)) = \langle d_{\gamma(t)} \psi(\nabla_{\gamma'} \gamma'(t)), d_{\gamma(t)} \psi(\gamma'(t)) \rangle = \left[\begin{array}{l} \text{Лем. } d_{\gamma(t)} \psi \\ \text{і } \text{Впр. } g_{\psi} \\ F = \psi \end{array} \right] = \langle \nabla_{(\psi \circ \gamma)'} (\psi \circ \gamma)'(t), (\psi \circ \gamma)'(t) \rangle$$

Типу у останньому виразі ∇ - річ. зв. евл. n -ки (з криєлів
вище). Впр. строго казати, не застосовується до ізометричного за-
пирення χ , але її можна узагальнити на цей випадок.

Отже, $\nabla_{(\chi \circ \gamma)' } (\chi \circ \gamma)' (t) \perp (\chi \circ \gamma)' (t) \in \text{якщо } \chi \in T_{\gamma(t)}(M, \chi) \forall t$.

Оскільки перетин $T_{\gamma(t)}(M, \chi) \cap \pi$ натягнутий на $(\chi \circ \gamma)' (t)$, звідси

$\nabla_{(\chi \circ \gamma)' } (\chi \circ \gamma)' (t) \perp \pi \forall t$. Тому

$$d_{(\chi \circ \gamma)(t)} \circ \left(\nabla_{(\chi \circ \gamma)' } (\chi \circ \gamma)' (t) \right) = \begin{bmatrix} \text{б-лінійне (афіне),} \\ \text{аналогіч. } T_{(\chi \circ \gamma)(t)} \mathbb{R}^n \\ \text{з } \mathbb{R}^n \end{bmatrix} = \circ \left(\nabla_{(\chi \circ \gamma)' } (\chi \circ \gamma)' (t) \right) =$$

$$= - \nabla_{(\chi \circ \gamma)' } (\chi \circ \gamma)' (t) (\forall t).$$

$$\text{Але } d_{(\chi \circ \gamma)(t)} \circ \left(\nabla_{(\chi \circ \gamma)' } (\chi \circ \gamma)' (t) \right) = \begin{bmatrix} \text{знову } \text{Впр.} \\ \text{але } F = \chi \end{bmatrix} = d_{(\chi \circ \gamma)(t)} \circ d_{\gamma(t)} \chi$$

$$\left(\nabla_{\gamma'} \gamma' (t) \right) = \begin{bmatrix} \text{лангуаже} \\ \text{правильно} \end{bmatrix} = d_{\gamma(t)} (\circ \chi) \left(\nabla_{\gamma'} \gamma' (t) \right) = d_{\gamma(t)} (\chi \circ \circ_M) \left(\nabla_{\gamma'} \gamma' (t) \right) =$$

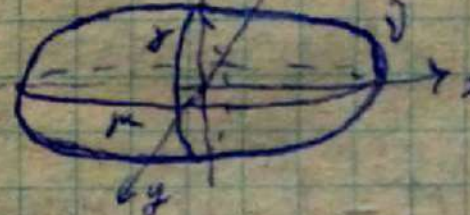
$$= \begin{bmatrix} \text{знову ланг.} \\ \text{правильно,} \\ \text{бо } \chi \circ \gamma = \gamma \end{bmatrix} = d_{\gamma(t)} \chi \circ d_{\gamma(t)} \circ_M \left(\nabla_{\gamma'} \gamma' (t) \right) = d_{\gamma(t)} \chi \left(\nabla_{\gamma'} \gamma' (t) \right) = \begin{bmatrix} \text{Впр. але } \chi \end{bmatrix} =$$

$$= \nabla_{(\chi \circ \gamma)' } (\chi \circ \gamma)' (t) (\forall t).$$

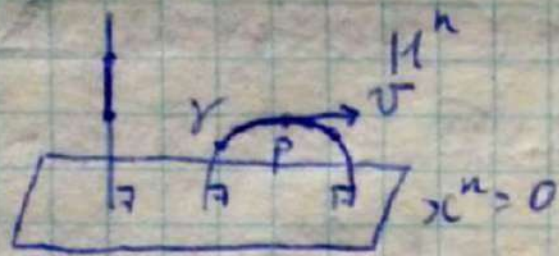
$$\text{Отже, } 0 = \nabla_{(\chi \circ \gamma)' } (\chi \circ \gamma)' (t) = d_{\gamma(t)} \chi \left(\nabla_{\gamma'} \gamma' (t) \right) \quad \forall t. \text{ Оскільки}$$

і закрита ($\Rightarrow d_{\gamma(t)}(\gamma - i\gamma)$), $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$, тобто γ - геодезична. $\triangle$

Для S^n у E^{n+1} , перетинаючи її з площинами Π , що містять O ($i \in ii$ площини симетрії), отримуємо, що всі великі кола S^n (а також всі їх проміжки) - геодезичні. Оскільки через $\forall p \in S^n$ у напрямі $\forall v \in T_p S^n$ можна провести велике коло (це $S^n \cap \Pi$, де Π перпендикулярна на p і v), з $\exists!$ геодезичних кривої, що існують геодезичних немає (з точністю до зміни параметра).

Так само можна знаходити геодезичні на інших підпросторах E^n наприклад, з еліпсами на ~~перетині~~  еліпсоїді $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ у E^3 ~~при перетині з~~ - його перетини з Oxz, Oyz, Oxy . Відомо, що інших простих (без самоперетинів) замкнених геодезичних на ньому немає.

3. $H^n(R_+^n)$ з $g = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$. Цієї геодезичні - це напівкола, та напівпрямі у ортогональні $\{x^n = 0\}$, а також їх проміжки (регулярно перет.)



Дійсно, достатньо перевірити, що вони є геод.
 (Випр.), тоді з єдиності і того, що через
 \$H\$ точку \$P\$ проходить \$H\$ вектора можна провести
 одну криву (Випр.) випливає, що інших немає.

Лем. Для натурально параметризованої \$\gamma\$ у рімановому \$(M, g)\$

\$|\nabla_{\gamma} \gamma'(s)|\$ зветься геодезичною кривиною \$\gamma\$ у \$s\$.

Лем. Подано \$\gamma\$-геод. \$\Leftrightarrow\$ її геодезична кривина нульова.