

Рем. Групи гомотопій (як і інші гомотопічні інваріанти, напр., гомотопічні групи), можна застосовувати й для розрізнення неоморфних гомотопічно еквівалентних пр-рів різними способами:

— гомотопічні типи: наприклад, $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^m \quad \forall n, m$.

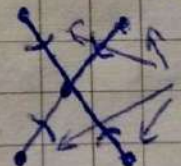
Розглянемо їх одноточкові компактифікації: $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, де відкриті нп. — усі фігур. в $\mathbb{R}^n$ та усі $(\mathbb{R}^n \setminus K) \cup \{\infty\}$, де $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт; і аналог $\mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$.

Впр. 4.5. Показати (наприклад, за допомогою стереогр. проєкції), що $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Дослідити цю операцію з загальною властивістю: яким умовам повинен задовольняти топ. пр-р X , щоб $X \cup \{\infty\}$ був топ. пр-ром? Компактом? Показати, що $X \cong Y \Rightarrow X \cup \{\infty\} \cong Y \cup \{\infty\}$.

Оск. при $n \neq m$ S^n і S^m мають різні групи гомотопій (скажімо, π_n фів. практики або далі), $S^n \not\cong S^m \Rightarrow S^n \not\cong S^m \Rightarrow$

$\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ за Впр. 4.5.

— Викидаючи точки: згадаємо, що $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \sim \sim S^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тому $S^n \not\sim S^m \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \not\sim \mathbb{R}^m \setminus \{y\} \Rightarrow \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \not\cong \mathbb{R}^m \setminus \{y\} \Rightarrow \mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ при $n \neq m$ (де y вважимо образом x під тією монотонною гомеоморфією).

Або: простори X і Y неізоморфні, бо після викидання точок (x у першому та її образ у другому) мають різні кількості компонент лн. зв'язності, тобто різні H_0 (або π_0), див. практику або далі. Якщо ідею можна узагальнити, переїмавши від пр-ру X до топології його т. зв. кімбі-точок $x \in X$ таких, що $\exists$ відкр. $U \ni x$ і гомеоморфізм $\varphi: U \rightarrow [0, 1)$: $x \mapsto 0$:  кімбі. Математик звенд мають 1 та 3 кімби відкр. Оч., що при гомеоморфізмі

кінці зберігаються (переходять у кінці), тому їхня кількість є топологічним (але, як зрозуміло з прикладу, де усі кнопи стягнуті, не гомотопічним) інваріантом.

Вопр. 4.6. На скільки класів ^{екв.} кнопа розділяти літери (будь-якого, у будь-якому написанні) алфавіта, використовуючи лише топології від basignas кнопи? На скільки збільше їх стає з використанням описань метаболів? Вопр. 4.7. Показати, що 1-м. кнопа $\tilde{Y}$ (м. відр. без віпків) $\sim$ ^{кнопа} $\text{букву } m-1$.

Ідея кінців переноситься у світ хмар даних і перс. топології за допомогою м. тв. функціональної персистентності:

Лем. 4.5. Нехай (X, Σ) - АСК, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ - дов. φ -ція. Тоді φ -фільтрований АСК, що $\text{vign. } (X, \Sigma)$, зветься

$\{(\varphi^{-1}([0, \varepsilon]), \Sigma|_{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])})\} \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, де $\Sigma|_Y$ для $Y \subset X$ позначив комплекс Σ , що скл. лише з точок Y .

Лем. Оч., такі пари дійсно $\in \text{ACK}$, і $(\varphi^{-1}([0, \varepsilon]), \Sigma|_{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])}) \in \text{підкомплекс}$ $(\varphi^{-1}([0, \varepsilon']), \Sigma|_{\varphi^{-1}([0, \varepsilon'])})$ для $\varepsilon \leq \varepsilon'$, тому це пов'язаний ACK , що має свої згони (твір. згони та діаграми (трикутники)).

Есч. 3. На скін. метр. пр-ті (X, ρ) (хоча б дана) позн. м. зб. глибини дана (data depth):

$$e_p: X \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto \sum_{y \in X} \rho(x, y)^p$$

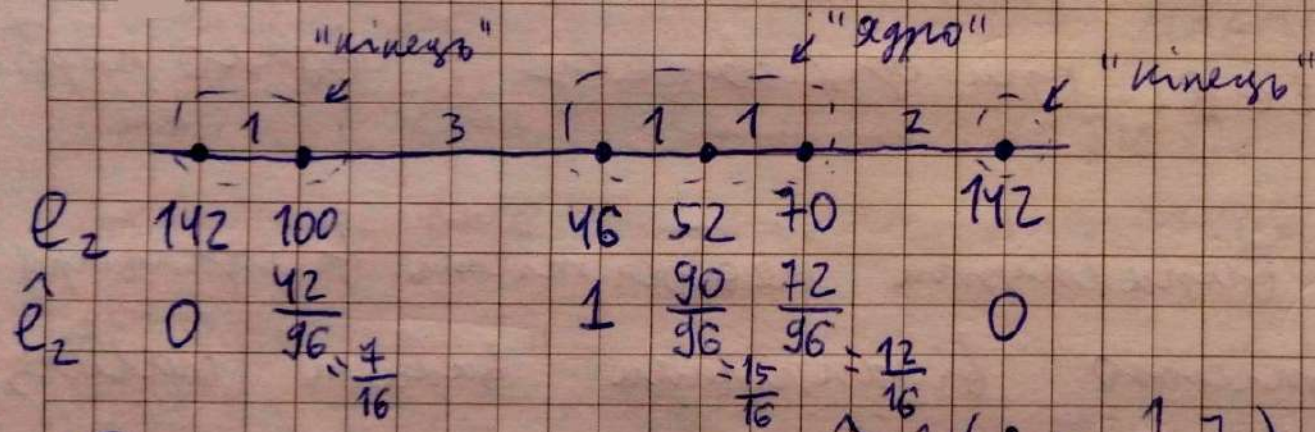
для $p \gg 1$ або $e_\infty: x \mapsto \max_{y \in X} \rho(x, y)$.

Неформально кажучи, ця φ -ція приймає найменші значення для "ядра" (core) дана; найбільші - в аналогах кінців. Її зручно буде порівнювати і "перевіряти":

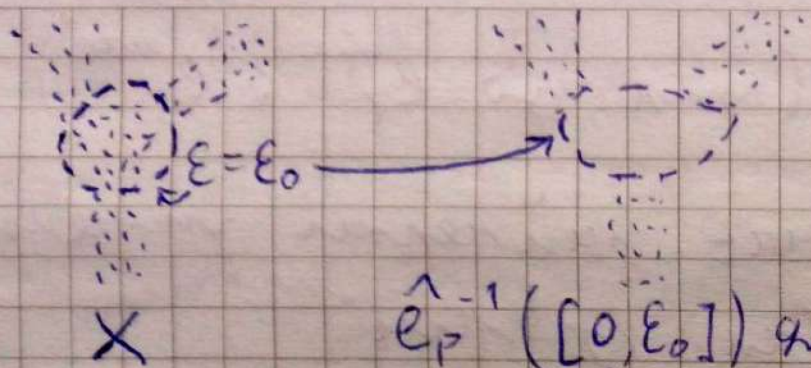
показники $e_p^{\min} := \min_{x \in X} e_p(x)$, $e_p^{\max} := \max_{x \in X} e_p(x)$, і

$$\hat{e}_p(x) := \frac{e_p^{\max} - e_p(x)}{e_p^{\max} - e_p^{\min}} \quad (\text{прик., що } e_p^{\min} < e_p^{\max})$$

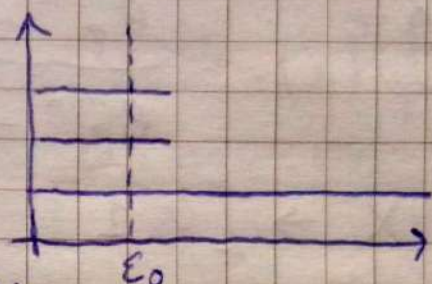
Позн $\hat{e}_p : X \rightarrow [0, 1]$: приймає найменші значення
у "кінцях" діапазона, у евід. практич.



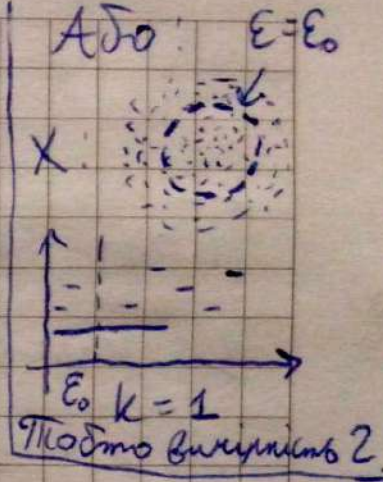
Точку, напункта $e_2^1 \in (0, \frac{1}{2}]$ гася множины vinez.
 Точку "реалистичний" приклад у $\mathbb{R}^2$:



$\hat{E}_P^{-1}([0, E_0])$ для
данного E_0 - макс. (од'єм.)
"кількість"



Матричного для $k=0$



Путь матричного будет состоять для $\sqrt{0 \text{ - } \text{всх}}$ перс. замощений, скажем,
 $\{VR(\hat{E}_P^{-1}([0, E]), \delta)\} \in \mathbb{R}_+$ при фиксированном ("вдано киб-
раному") δ .

Ех. 4.4. Планом може виникнути необхідність відфільтру-
вати дані за цілісністю, відкинувши "викиди" (outliers).
Наприклад, у даніс вигляду  кілька "важкоковес"
може всередині заважати структуру
кільця, створюючи "заїби" смислені у VR та
інших комплексах для відносно невеликих зм. параметра.

Впр. 4.8 Запропонувати якусь ф-цію, що вимірювала би цілісність.

(для якої $\varphi^{-1}([0, \varepsilon])$ для кож. φ була б мпоною без "викизів" (тобто мала щільність вим. високочу φ).

Рем. Як видно з прикладів, застосування функц. перс. має суттєве ускладнення - необхідність обрати параметр комплексу, щоб використовувати персистентність за параметром фільтрації. Тобто маємо двопараметричне сімейство $\{VR(\varphi^{-1}([0, \varepsilon]), \delta)\}_{(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{R}_+^2}$, при цьому індексуюча мпоюна вже не є лін. впорядкованою. Не можна узагальнити!

Лем. 1.6. Для $n \in \mathbb{N}$ n -персистентним об'єктом категорії $\mathcal{C}$ зб. $\{X_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}\}_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n} \subset \text{Ob } \mathcal{C}$ разом з $\{f_{\varepsilon \varepsilon'} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X_{\varepsilon}, X_{\varepsilon'})\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'}$, де на $\mathbb{R}^n$ розм. відношення часткового порядку: для $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ $\varepsilon \leq \varepsilon' \Leftrightarrow \varepsilon_i \leq \varepsilon'_i \forall i = \overline{1, n}$.
Тоді човну $f_{\varepsilon \varepsilon} = \text{id}_{X_{\varepsilon}} \forall \varepsilon$ і $f_{\varepsilon \varepsilon''} = f_{\varepsilon' \varepsilon''} \circ f_{\varepsilon \varepsilon'} \forall \varepsilon \leq \varepsilon' \leq \varepsilon''$.

Пит. $\mathbb{R}^n$ можна замінити на $\mathbb{R}_+^n$.

Реш. Для пр-рів гомологій загатовиірної перс. (при $n > 1$) все немає аналога Тн. 4.1, навіть якщо замінити $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{Z}^n$: це випливає з загальної теорії інваріантів. Замість штришоків тут можна вив. інваріанти на кшталт $\int_{\mathbb{R}_+^n} \dim H_k(X_\varepsilon, \mathbb{K}) d\varepsilon$ або $\int_{\substack{\mathbb{R}_+^{2n} \\ \varepsilon \leq \varepsilon'}} \text{rank}$

$f_{\varepsilon \varepsilon' k} * d\varepsilon d\varepsilon'$. Тут n -перс. АСК (або цикл. пр-р) $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n}$ визн. $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ n -перс. пр-р гомологій над полем $\mathbb{K}$ $\{H_k(X_\varepsilon, \mathbb{K})\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n}$, а відобн. $f_{\varepsilon \varepsilon'}$ з попер. лем. 4.6 індукують ^{лиж} $f_{\varepsilon \varepsilon' k} * : H_k(X_\varepsilon, \mathbb{K}) \rightarrow H_k(X_{\varepsilon'}, \mathbb{K}) \forall k$ у гомологіях.

Реш. Природним є питання про "стійкість" штришоків: наскільки штришок змінюється при певній зміні АСК чи метр. пр-ру X , за яким обчисл. цей АСК? Для цього потрібна метрика на штришоків.

лев. 4.7. Пусть $\tilde{I} = \{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\tilde{J} = \{J_\beta\}_{\beta \in B}$ — два
 интервала, то есть конечные подмножества $\mathbb{R}_+$
 (т.е., $|A| < \infty, |B| < \infty$). Для $p \geq 1$ p -нормой Вассерштейна
 в пар. p минимума является

$$d_p(\tilde{I}, \tilde{J}) := \min_{\substack{\theta: A \rightarrow B \text{ — биг.,} \\ A' \subset A, B' \subset B}} \left(\sum_{\alpha \in A'} \Delta(I_\alpha, J_{\theta(\alpha)})^p + \sum_{\alpha \in A \setminus A'} \lambda(I_\alpha)^p + \sum_{\beta \in B \setminus B'} \lambda(J_\beta)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\forall I = [a, b], J = [c, d] \quad \Delta(I, J) := \max\{|a-c|, |b-d|\}$
 (то есть d_∞ -норм. минимума как точек в $\mathbb{R}^2$), $\lambda(I) := \frac{b-a}{2}$
 ($= \Delta(I, [\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}])$) — наименьшая p -норм. p -норма I по бигр. p -норме
 $[c, c]$). При $p = \infty$ можно написать

$$d_\infty(\tilde{I}, \tilde{J}) := \min_{\substack{\theta: A \rightarrow B \text{ — биг.,} \\ A' \subset A, B' \subset B}} \max \left\{ \max_{\alpha \in A'} \Delta(I_\alpha, J_{\theta(\alpha)}), \max_{\alpha \in A \setminus A'} \lambda(I_\alpha), \max_{\beta \in B \setminus B'} \lambda(J_\beta) \right\}.$$

это является p -нормой Вассерштейна (Wasserstein distance)
 мин. $\tilde{I}$ на $\tilde{J}$.

Рем. Подто тут маємо "найкращу конслву" δ_{Haus}
о між підмножинами I та J - таку, щоб figh.
відрізки не сильно відхилялися і щоб відрізки, що
не входять у віз, були достатньо короткими.

Впр. 4.9. Показати, що це метрики на класі всіх
інтервалів (принаймні для d_∞) (з точністю до перест. відрізків).

Впр. 4.10. Насправді згідно з Лем. 4.1 інтервали мають
также містити нескінченні напівінтервали $[a, +\infty)$.
Як модифікувати означення d_p і d_∞ для таких випадків?
Чи залишаються вони метриками?

З іншого боку, скінч. метр. пр-ри є, зокрема, компакт-
ними (для метричної топології), а тому до них
застосовне наступне відоме означення:

def. 4.8. Відстанню Хаусдорфа між підмножинами A і B
метр. пр-ри (X, ρ) зветься

$$d_H^P(A, B) := \max \left\{ \sup_{x \in A} \rho(x, B), \sup_{y \in B} \rho(y, A) \right\},$$

де $\rho(x, B) := \inf_{y \in B} \rho(x, y)$ - відстань від точки до множини.

Відстанню Трємова-Хансдорфа між компактними метр.

пр-ками (X, ρ_X) і (Y, ρ_Y) зветься

$$d_{GH}(X, Y) := \inf \left\{ d_H^P(i_X(X), i_Y(Y)) \mid (Z, \rho) - \text{метр. пр-к}, i_X: X \rightarrow Z, i_Y: Y \rightarrow Z - \text{ізотетричні вкладки, тобто } \forall x, y \in X \rho_X(x, y) = \rho(i_X(x), i_X(y)), \forall x, y \in Y \rho_Y(x, y) = \rho(i_Y(x), i_Y(y)) \right\}.$$

Впр. 4.11. 1. d_H^P - метрика на множині усіх обмежених замкнених підмножин X (зокр. $< \infty$), а отже й на підмн. усіх компактних підмножин X .

2. d_{GH} коректно визначена, $< \infty$ і задає метрику на множині класів ізотетричності компактних метр. пр-ків (тобто вона симетрична, задов. пер. тр-ка, і $d_{GH}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X$ та Y ізотетричні).

Роз. Коректність і скінченність тут забезпечуються наступною конструкцією: покладемо $Z = X \sqcup Y$ (дис. об'єднання множин) з метрикою

$$\rho(x, y) := \begin{cases} \rho_X(x, y), & x, y \in X; \\ \rho_Y(x, y), & x, y \in Y; \\ \rho_X(x, x_0) + \rho_Y(y, y_0) + 1, & x \in X, y \in Y, \end{cases}$$

(і для $\rho(y, x), y \in Y, x \in X$ за симетричністю)
 $\rho(x, y)$

де $x_0 \in X, y_0 \in Y$ - якісь фіксовані. Це м-ка (чому?), її X та Y як підпростори Z є образами деяких ізом. вкладень.

Тепер напевнімося середнювати тв. про стійкість.

Тл. 4.2. (Chazal et al., 2009). $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ відображення β_k , що ставить у відповідність скінченному метричному простору його метрично k -тих пере. топологій (для комплексів Чеха або Вісториса-Рінса) є пероталітующим відн. метрикам Громова-Хаусдорфа та вузького місця: $\forall$ скінч. метр. пр. X, Y

$$d_\infty(\beta_k(X), \beta_k(Y)) \leq d_{GH}(X, Y).$$

Рем. Крім демонстрації стійкості, ця теорема дає повністю
 меншу для d_{GH} , обчислення якої є складним у заг. випадку.
 Є також версія цієї теореми для функції перенесеності.
 Почнемо, замість φ -її на скінч. метр. пр-ті X розгля-
 немо її неперервне продовження на реалізацію $VR(X, \mathcal{J})$
 для деякого $\mathcal{J}$ (воно завжди $\exists$) і далі будемо говорити
 про непер. φ -її на топ. пр-ті. Також будемо вважати,
 що групи гомологій базн. $\forall$ топ. пр-ту (див. наступний
 розділ про сингулярні гомології, зокрема, їх ізоморфізми
 до скінч.). Т.ч., $\forall$ непер. $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ на топ. пр-ті X
 $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ $\forall$ поля K визначений перс. вект. пр-н $\{H_k$
 $(\varphi^{-1}((-\infty, \varepsilon]), K)\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ (разом з лін. відобн., що індуковані
 вклученнями). Розгл. спеціальний клас φ -її (K вважати фікс.).
Лем. 4.9. Нехай $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ непер. $a \in \mathbb{R}$ зветься її гомологією

критичний значення, якщо $\exists k \in \mathbb{Z}_+$ і $\varepsilon_0 > 0$ такі, що $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ індукване виключена відобр.

$$i_{k*} : H_k(\varphi^{-1}((-\infty, a-\varepsilon]), \mathbb{K}) \rightarrow H_k(\varphi^{-1}((-\infty, a+\varepsilon]), \mathbb{K})$$

не є ізоморфізмом. φ зветься рухомою (tame), якщо вона має лише скінч. кількість неперервних крит.

значень, і $\forall k \in \mathbb{Z}_+, a \in \mathbb{R} \ H_k(\varphi^{-1}((-\infty, a]), \mathbb{K})$ скінченновимірний.

Рем. Це знову жє загальнення ф-ції Морса на кожна, гладких многовидах, а також "кусково лінійних" на скінч. скінч. пр-вас.

Тл. 1.3. (Cohen - Zeeman et al., 2004). Несай топ. пр-р $X \in$ (з топністю до гомеоморф.) симпліційний, а перер. ф-ції

$\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ - рухомі. Поді персистентний вехт. пр-р

$\{H_k(\varphi^{-1}((-\infty, \varepsilon]), \mathbb{K})\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ скінченно-представлений $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

і $\forall$ поля $\mathbb{K}$, а отже визначений інваріант $\beta_k(\varphi)$ цього простору, і аналогічно $\beta_k(\psi)$. При цьому

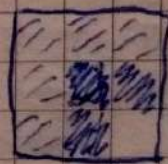
$$d_{\infty}(B_K(\Phi), B_K(\Psi)) \leq |\Phi - \Psi|_{\infty}.$$

Рез. Є й інші структури на просторі штрихкодів, зокрема це алгебраїчний многовид та ймовірнісний простір (що важливо для задачі статистичного обґрунтування топологічного аналізу даних) (див. Саксзон).

Ек. 4.5. Розглянемо відомий випадок досягнення даних за допомогою перс. гомологій. Деталі див. у Саксзон.

У роботі А. Lee, К. Pedersen, Д. Mumford, 2003 розглядалася задача пошуку стандартних ел-тів (паттернів) у "природних" зображеннях. Для цього автори обробили існуючу базу чорно-білих фото наступним чином:

– обиралися 3×3 (пікселі) ділянки зображень:



Т.ч., утворилася хмара точок у $\mathbb{R}^9$

(точніше $\{0, \dots, 255\}^9$, але далі вважаємо $\mathbb{R}$)

— було відкинуто 80% точок низької контрастності (заповнених елементами колу): контрастність визн. деякою квадр. формою Φ на $\mathbb{R}^9$

— кожен вектор з $\mathbb{R}^9$ було зсунуто на середнє значення пікселів: $(x^1, \dots, x^9) \mapsto (x^1 - \mu, \dots, x^9 - \mu)$, де $\mu = \frac{1}{9}(x^1 + \dots + x^9)$; т.ч. тепер $\mu = 0$. Це прибирає залежність від абсолютних значень, залишає лише співвідн. пікселів. Після цього точки опинилися $\neq$ на площині $x^1 + \dots + x^9 = 0$, тобто у $\mathbb{R}^8$

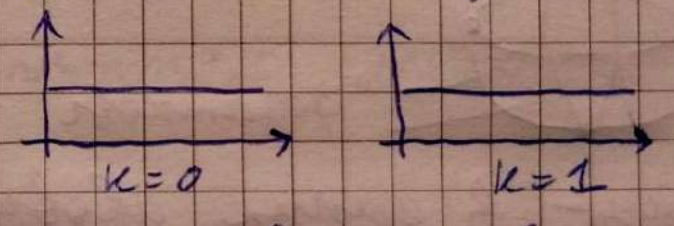
— кожен $x \in \mathbb{R}^8$ було нормовано: $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{\Phi(x, x)}}$. Це прибирає залежність від абс. значення контрастності і розкидає точки на площині $\Phi(x, x) = 1$, тобто на 7-вим. сфери $E \neq \mathbb{R}^8$

Після цього автори припустили, що в координатних $\exists$ кільцева структура.

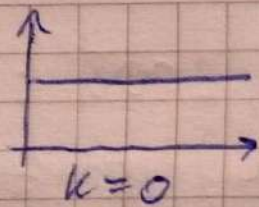
G. Carlsson, T. Ishkanov, V. de Silva, A. Zorotiadan, 2008:

— дані (якщо $X \subset \mathbb{E}^7$ з попередньої роботи) фільтрувалися за щільністю за допомогою ф-ції кеуїльності з параметром $k \in \mathbb{N}$:

$\delta_k(x) := \rho(x, x_k)$, де x_k — k -та найближча т. до x . (це одна з попередніх філтр. на Випр. 4.8). Кожн. $X(k, r)$ — точки з X (насправді з деякої підмн.), для яких $\delta_k \leq r$ (тобто з найближчого щільн.). Для них використовувалися комплексні віжки. Для $X(300, 30)$

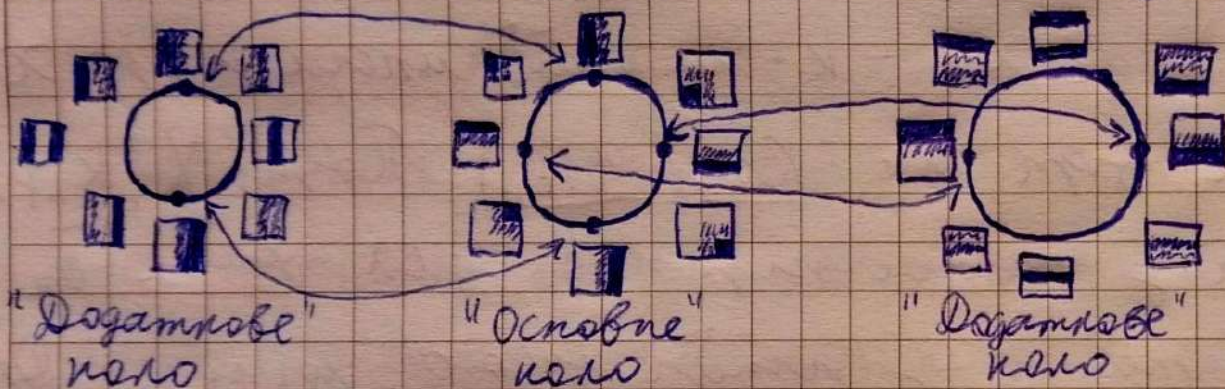
отримали такі вигляди , тобто дійсно знайшлося кільце (коло). Вино сн. з фільтра певного вигляду (див. рис. у статті або далі).

— Для $X(15, 30)$ (більш "точка", локальна стр. щільності) було отримано

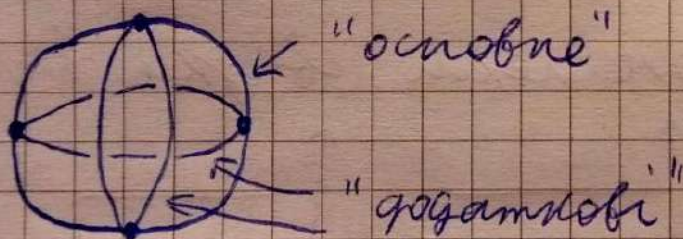


: $b_0 = 1, b_1 = 5$ на сумах

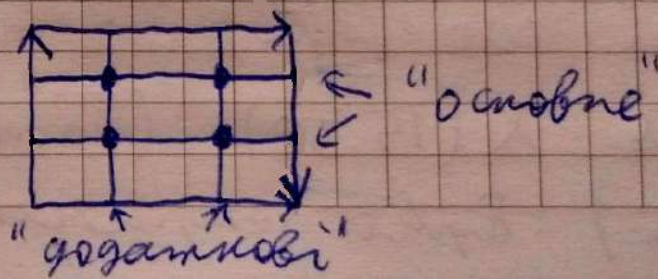
протікання. Це простір $\sim V S^1$. Досл. точок дані показують, що можна представити як 3 кола з 9 точками перетину:



Подібно



— чи існує в даній двовимірній структурі. Автори помітили, що таким чином 3 кола можна розташувати на площині Клейна:



— додавши до $X(100, 10)$ додаткові точки (див. деталі у статті), вдалося отримати штрихкоди з $b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 1$ для $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ (з копр. закінчення поверхонь такі мають тор і пляшка Клейна) і $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 0$ для $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ (займається лише пляшка Клейна, для тора тут знову були δ 1, 2, 1).

Отже, паттерни природних образів утворюють пляшку Клейна у E^7 ! В подальшому були знайдені застосування цього (для стиснення зображень етс.).

Інші приклади див. у статті та книзі.