

Тл. 4.1. Будь-який скінченнопредставлений перс. вект. пр-р над полем $\mathbb{K}$ (перс. т.ч. лінійно) ізоморфний деякій кр. сумі $P(a_1, b_1) \oplus \dots \oplus P(a_m, b_m)$, де $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}_+$, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, і $a_i < b_i \forall i$. При цьому ці парні (a_i, b_i) однозначно визначені у наступному сенсі: якщо

$$P(a_1, b_1) \oplus \dots \oplus P(a_m, b_m) \cong P(c_1, d_1) \oplus \dots \oplus P(c_\ell, d_\ell)$$

(перс. лін. ізоморфізм), то $\ell = m$, і множини пар $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^m$ збігається з кр. пар $\{(c_j, d_j)\}_{j=1}^\ell$ з точністю до перестановки і з урахуванням кратності.

► Використавши ізоморфізми, можна без обмеження загальності вважати, що даний простір має вигляд $\{ \mathbb{K}^{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])} \}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ / \sim}$, де $\varphi = \{ \varphi_\varepsilon \}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} : \{ \mathbb{K}^{\psi^{-1}([0, \varepsilon])} \}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \rightarrow \{ \mathbb{K}^{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])} \}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ - перс. лінійне, $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ і $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}_+$ -

φ -yii на скінч. множині. За def. 4.1 $\forall \varepsilon f_\varepsilon: K^{\psi^{-1}([0, \varepsilon])} \rightarrow K^{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])}$ лінійне, і $\forall \varepsilon \leq \varepsilon'$ діагр.

$$\begin{array}{ccc}
 K^{\psi^{-1}([0, \varepsilon])} & \xrightarrow{f_\varepsilon} & K^{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])} \\
 \downarrow i_{\varepsilon \varepsilon'} & & \downarrow i_{\varepsilon \varepsilon'} \\
 K^{\psi^{-1}([0, \varepsilon'])} & \xrightarrow{f_{\varepsilon'}} & K^{\varphi^{-1}([0, \varepsilon'])}
 \end{array}$$

комутативна. Оск. верт. стрілочка тут - включення, це
 оск. просто, що $f_\varepsilon = f_{\varepsilon'}|_{K^{\psi^{-1}([0, \varepsilon])}}$. Оск. A і B скінч.,
 $\exists \varepsilon_0: \varphi^{-1}([0, \varepsilon_0]) = A, \psi^{-1}([0, \varepsilon_0]) = B$; тоді усі f_ε -
 це обмеження одного і того ж лінійного $f_\infty := f_{\varepsilon_0}: K^B \rightarrow K^A$.
 Згадаємо, що базисами цих пр-тів $\in \{b\}_{b \in B}$ і $\{a\}_{a \in A}$ був. (точніше, їх характеристичні φ -yii). За-
 нимемо у цих базисах матрицю $f_\infty: \Gamma := \{\gamma_{ab}^{a \in A, b \in B}\}$
 (на *figuring* *fig* "звич. м-ці, тут ми не враховуємо
 A або B - хоча могли б це зробити). Як завжди, Γ був. мовимо
 $f_\infty(b) = \sum_{a \in A} \gamma_{ab} a \quad \forall b \in B$
 (множино базис A на стовпчик Γ). Тим усього, якщо

$\Psi(b) \leq \varepsilon$, то b - базисный вектор $\mathbb{K}^{\Psi^{-1}([0, \varepsilon])}$, а отсюда
 из этого $f_\infty|_{\mathbb{K}^{\Psi^{-1}([0, \varepsilon])}} = f_\varepsilon$ позволяет переходить в n -м
 $\mathbb{K}^{\Psi^{-1}([0, \varepsilon])}$. Как замечалось выше, это означает, что $\gamma_{ab} = 0$

$\forall a: \varphi(a) > \varepsilon \Rightarrow \Psi(b)$. И наоборот, $\forall$ множества

$$\Gamma = \{ \gamma_{ab} \in \mathbb{K} \mid a \in A, b \in B; \gamma_{ab} = 0 \text{ при } \varphi(a) > \Psi(b) \} \quad (*)$$

Будем матрицей действия $f_\infty: \mathbb{K}^B \rightarrow \mathbb{K}^A$, что задаёт перс.
 л.н. $f: \{ \mathbb{K}^{\Psi^{-1}([0, \varepsilon])} \}_\varepsilon \rightarrow \{ \mathbb{K}^{\Psi^{-1}([0, \varepsilon])} \}_\varepsilon: \forall \varepsilon$ задано f_ε

на базисах: $f_\varepsilon: \mathbb{K}^{\Psi^{-1}([0, \varepsilon])} \rightarrow \mathbb{K}^{\Psi^{-1}([0, \varepsilon])}: b \in \Psi^{-1}([0, \varepsilon]) \mapsto \sum \gamma_{ab} a \in \mathbb{K}^{\Psi^{-1}([0, \varepsilon])}$
 базисный вектор формально сумма за $a \in \Psi^{-1}([0, \varepsilon])$

(тобто $\sum_b \lambda_b b \mapsto \sum_{a,b} \lambda_b \gamma_{ab} a$), где $\gamma_{ab} = 0$ при $\varphi(a) > \varepsilon$, то

$\varepsilon > \Psi(b)$, за условием на n -ую. M -ую, что задаёт условием (*),

будем называть (φ, Ψ) -адаптированными. Как мы показали, всем

знаем, что b_{ij} b_{jn} , z перс. л.н. b_{ij} b_{jn} . f , а отсюда задаётся

сним. предст. пр-ки $\{ \mathbb{K}^{\Psi^{-1}([0, \varepsilon])} \}_\varepsilon / \sim$. Будем ввасати, что

даний простір задано μ -масою Γ .

Наприклад, нехай $0 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$; $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}_+ : a \mapsto \alpha$, $\psi: B \rightarrow \mathbb{R}_+ : b \mapsto \beta$. μ -маса $\{\chi_{ab} = 1\}$ (φ, ψ) -адантована (бо $\varphi(a) < \psi(b)$), а отже задає $f: \{\mathbb{K}^{\psi^{-1}([0, \varepsilon])}\}_{\varepsilon} \rightarrow \{\mathbb{K}^{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])}\}_{\varepsilon}$, таким чином:

$$f_{\varepsilon} = \begin{cases} 0: 0 \rightarrow 0, & \varepsilon < \alpha; \\ 0: 0 \rightarrow \mathbb{K}^{\{a\}} \cong \mathbb{K}, & \alpha \leq \varepsilon < \beta; \\ \text{id}: \mathbb{K}^{\{b\}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\{a\}}, & \varepsilon \geq \beta \end{cases}$$

Тому $\text{fign. скінч. предст. пр-ри } \{\mathbb{K}^{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])}\}_{\varepsilon} / \sim_f \cong \begin{cases} \mathbb{K}, & \varepsilon \in [\alpha, \beta); \\ 0 \text{ у інш. випад.} \end{cases}$

тобто (перс. лін.) ізоморфизми $P(\alpha, \beta)$ (Тожн. $P(\alpha, \beta)$ має fign. fig позн. в умові перс. , бо a і b тепер - єдині мноточки).

Композиції лін. відобр. за побудовою fign. звичайне μ -маса. Дійсно, $\forall f: \{\mathbb{K}^{\psi^{-1}([0, \varepsilon])}\}_{\varepsilon} \rightarrow \{\mathbb{K}^{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])}\}_{\varepsilon}$, $g: \{\mathbb{K}^{\chi^{-1}([0, \varepsilon])}\}_{\varepsilon} \rightarrow \{\mathbb{K}^{\psi^{-1}([0, \varepsilon])}\}_{\varepsilon}$, де $\chi: C \rightarrow \mathbb{R}_+ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$

(за підручного композиції у Втр. 4.2.) $(f \circ g)_\varepsilon = f_\varepsilon \circ g_\varepsilon = [f; g] =$
 $= f_\infty \circ g_\infty|_{\mathbb{K} \varphi^{-1}([0, \varepsilon])}$. Якщо $\Delta = \{\delta_{bc}\}_{\substack{b \in B \\ c \in C}}$ - м-ця g_∞ $((\Psi, \chi)$ -
 адаптована), то $\forall c \in C$ (диз'якцій вектор sign. пр-тів)

$$(f_\infty \circ g_\infty)(c) = f_\infty\left(\sum_b \delta_{bc} b\right) = [\text{lin.}] = \sum_b \delta_{bc} f_\infty(b) =$$

$$= \sum_{a, b} \gamma_{ab} \delta_{bc} a, \text{ тобто м-цею } f_\infty \circ g_\infty \in \Gamma \Delta = \left\{ \sum_b \gamma_{ab} \delta_{bc} \right\}_{\substack{a \in A \\ c \in C}}$$

(перс. лін.)

(Втр. 6.1) (Φ, χ) -адаптована, Зокрема φ - $\sqrt{\Gamma}$ -ізоморфізм $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{K} \varphi_\varepsilon - \text{із-м (тобто біл.)} \Leftrightarrow \varphi_\infty - \text{із-м} \Leftrightarrow \Gamma \text{ не вироджена,}$$

тобто $\exists \Gamma^{-1} : \Gamma^{-1} \Gamma = I_A := \left\{ \begin{bmatrix} 1, a = a' \\ 0, a \neq a' \end{bmatrix} \right\}_{a, a' \in A}$. Звичайно, це
 $\Rightarrow |A| = |B|$,
 таке $\Leftrightarrow \det \Gamma \neq 0$ для $\forall$ вибору порядків на $A \cup B$,

Зокр., $\varphi : \left\{ \mathbb{K} \varphi^{-1}([0, \varepsilon]) \right\}_\varepsilon \rightarrow \left\{ \mathbb{K} \varphi^{-1}([0, \varepsilon]) \right\}_\varepsilon$ - $\sqrt{\Gamma}$ -ізоморфізм (із-м
 на себе) $\Leftrightarrow$ цю м-цю Γ не вироджена і (Φ, Φ) -адаптована:

$$\Phi(a) > \Phi(a') \Rightarrow \gamma_{aa'} = 0.$$

Звідси випливає, що $\forall$ не вироджених (Φ, Φ) -адаптованих
 $\Delta = \{\delta_{aa'}\}_{a, a' \in A}$ і (Ψ, Ψ) -адаптованих $\Gamma = \{\varepsilon_{bb'}\}_{b, b' \in B}$

добитою м-цею $\Delta \Gamma E$ задає композицію $g \circ f \circ h$, де g :
 h - автоморфізм sign . перс. blm . пр. riv . Тоді μ - μ
 $\{ \mathbb{K}^{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])} \}_{\varepsilon / \gamma_m g \circ f \circ h}$, що визначається м-цею $\Delta \Gamma E$,
 ізоморфний basignmu (то це так $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ - \text{Внр.}$).
 $\forall a \neq a' \in A$, $\delta \in \mathbb{K}$ різноманітне, зокрема, м.зв. елементарну
 м-цею $\Delta_{a, a', \delta}$, що basign. умовами $\delta_{aa'} = \delta$, $\delta_{\tilde{a}\tilde{a}'} = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & \delta_{a'} \\ a & \delta \end{pmatrix}$
 $\forall \tilde{a} \in A$ і решта комп. якщо нульові . Вона завжди $\begin{pmatrix} 1 & \delta_{a'} \\ a & \delta \end{pmatrix}$
 невар. (і $\det = 1 \forall \text{впорядк. } A$) і $\in (\varphi, \varphi)$ -адаптованою,
 якщо $\delta = 0$ при $\varphi(a) > \varphi(a')$ (може це буде прямо описан-
 на I_A). (a, b) -тий ел-т $\Delta_{a, a', \delta} \Gamma$ горізовтос

$$\sum_{\tilde{a}} \delta_{a \tilde{a}} \gamma_{\tilde{a} b} = \delta_{aa} \gamma_{ab} + \delta_{aa'} \gamma_{a'b} = \gamma_{ab} + \delta \gamma_{a'b},$$

 тобто до a -того рядка Γ додається a' -тий, помножений
 на δ (решта не змінюється) (φ, φ) -адаптованість оз-
 начає, що ми можемо побити це для довільних δ лише

при $\varphi(a) \leq \varphi(a')$. Але-но, $\forall v \neq v' \in V, \varepsilon \in \mathbb{K} \exists_{v,v',\varepsilon}$ має $\varepsilon_{vv'} = \varepsilon, \varepsilon_{\tilde{v}\tilde{v}} = 1 \forall \tilde{v}$ і решту 0, неваріантс., (ψ, ψ) -адант.
 Якщо $\psi(v) > \psi(v') \Rightarrow \varepsilon = 0$; і $\Gamma \exists_{v,v',\varepsilon}$ отричається
 з Γ доданація до v' -того стовпчика v -го, помн. на ε ,
 де може бути $\varepsilon \neq 0$ лише при $\psi(v) \leq \psi(v')$ (Вик.)

П.ч., ми можемо будувати простори, що (перс. лік.)
 ізоморфні до даного, застосовуючи до M -го Γ т. зв. ада-
 птовані перетворення: додаючи до a -того рядка a' -й,
 помножений на дов. ел-т $\mathbb{K}$, якщо $\varphi(a) \leq \varphi(a')$; і дода-
 ючи до v' -того стовпч. v -й, помн. на дов. ел-т $\mathbb{K}$,
 якщо $\psi(v) \leq \psi(v')$.

Після застосуємо метод Гаусса: нехай $a \in A$ такий,
 що a -тий рядок Γ ненульовий, і при цьому φ
 приймає таке можливе знач.: $a \in \text{ядра } \varphi(a)$.
 $\exists v \in V: \gamma_{av} \neq 0$

Нехай тепер γ_{ab} - неперервний ел-т цього рядка з
 min монотонним $\psi : b \in \text{argmin } \psi(b)$. Тоді, додаючи
 до $\forall a'$ -го рядка з $\gamma_{a'b} \neq 0$ (а саме $\varphi(a') \leq \varphi(a)$)
 a -тій, помн. на $-\frac{\gamma_{a'b}}{\gamma_{ab}}$ отримаємо м-ую, єдиний
 неперервний ел-т на b -го стовпчика якої $\in \gamma_{ab}$. А-но,
 додаючи **стовпч.**, отримаємо, що у a -тому рядку єдиний
 $\neq 0$ ел-т - це γ_{ab} (це буде "звичайний" метод Гаусса,
 якщо впорядкувати A за спаданням φ , а B - за зростаю-
 нням ψ , і записати м-ую відп. чинки). Нарешті,
 множачи Γ зліва на діагональну I_A , у якій (a,a) -тій
 ел-т замінено на $\frac{1}{\gamma_{ab}}$ (і яка оч. $\in$ невід'язною і
 (φ, φ) -адант.), отримаємо м-ую з $\gamma_{ab} = 1$ і рештою
 нулів у відп. рядку і стовпчику. Далі операції з
 рядками і стовпчиками, що не порушать a -тій

рядом i в-тний столбчик, занимаю что властивість.

Оберемо нові a і b серед тих, що залишилися etc.

Після скінч. кільк. кроків отримаємо m -цю з власт.

або $\chi_{ab} = 0$, або $\chi_{ab} = 1$ і $\forall a' \neq a, b' \neq b \chi_{a'b} = \chi_{ab'} = 0$

(для визн. виграшності A і B ця m -ця матиме вигляд

$A \left(\begin{array}{c|c} I_{\text{rank } B} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$. Якщо $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^m$ - усі пари з $\chi_{a_i b_i} = 1$
(тут $m = \text{rank } B$), то т.ч. $\forall i \neq \infty (b_i) = a_i$ і $f_\infty(b) =$

$= 0$ для $b \in B \setminus \{b_i\}_{i=1}^m$. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+$ знаємо $K^{\psi^{-1}([0, \epsilon])}$ см.

з b_i і $b \in B \setminus \{b_i\}_{i=1}^m$ для яких $\psi(b_i) (\psi(b)) \leq \epsilon$, оскільки f_ϵ вих.

$f_\epsilon = f_\infty|_{K^{\psi^{-1}([0, \epsilon])}}$: $\sum_{\substack{i=1, m \\ \psi(b_i) \leq \epsilon}} \lambda_i b_i + \sum_{\substack{b \in B \setminus \{b_i\} \\ \psi(b) \leq \epsilon}} \lambda_b b \mapsto \sum_{\substack{i=1, m \\ \psi(b_i) \leq \epsilon}} \lambda_i a_i$.
($\Rightarrow \varphi(a_i) \leq \epsilon$)

Отже, $\lim f_\epsilon = \text{span } \{a_i\}_{\psi(b_i) \leq \epsilon}$. З іншого боку,

знаємо $K^{\psi^{-1}([0, \epsilon])} \ni a_i$, для яких $\varphi(a_i) \leq \epsilon$ і $a \in A \setminus \{a_i\}_{i=1}^m$

для яких $\varphi(a) \leq \epsilon$, тому $\text{span } K^{\psi^{-1}([0, \epsilon])} / \lim f_\epsilon$ см.

сумісний класи a_i з умовою $\psi(b_i) > \varepsilon$, $\varphi(a_i) \leq \varepsilon$ (в
 сенсі (φ, ψ) -адант., $\chi_{a_i b_i} = 1$ означає, що $\varphi(a_i) \leq \psi(b_i)$,
 тому ці умови сумісні) та $a \in A \setminus \{a_i\}$ з умовою $\varphi(a) \leq \varepsilon$.

Т.ч., $\mathbb{K}^{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])} / \sum_{\varepsilon} \cong \bigoplus_{\substack{i=1, \dots, m \\ \varepsilon \in [\varphi(a_i), \psi(b_i)]}} \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{\substack{a \in A \setminus \{a_i\} \\ \varepsilon \in [\varphi(a), +\infty)}} \mathbb{K} \cong \left[\begin{array}{c} \text{подано} \\ \text{лише в} \\ \text{просторі} \end{array} \right] \cong$
 $\cong \bigoplus_{i=1}^m P(\varphi(a_i), \psi(b_i)) \oplus \bigoplus_{\substack{a \in A \setminus \{a_i\} \\ \varepsilon \in [\varphi(a), +\infty)}} P(\varphi(a), +\infty)$, що є наслідком з мб. Th.

про "існування", то маємо

$$\left\{ \mathbb{K}^{\varphi^{-1}([0, \varepsilon])} \right\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} / \sum_{\varepsilon} \cong \bigoplus_{i=1}^m P(\varphi(a_i), \psi(b_i)) \oplus \bigoplus_{a \in A \setminus \{a_i\}} P(\varphi(a), +\infty).$$

Доведено тепер єдиність. Отже, нехай (у змінних у пер. з
 груп. позначенням) перс. вект. $m \times n$ $\{\bigvee_{\varepsilon} \}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ має вигляд
 $\{\bigvee_{\varepsilon} \}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \cong \bigoplus_{i=1}^m P(\alpha_i, \beta_i) \cong \bigoplus_{j=1}^n P(\gamma_j, \delta_j)$.

Маємо за побудовою $P(\alpha, \beta)$ $\alpha_0 := \min \{\alpha_i\} = \min \{\varepsilon \mid \bigvee_{\varepsilon} \neq 0\}$,
 отже $\alpha_0 = \gamma_0 := \min \{\gamma_j\}$. Позначимо $\beta_0 := \min_{\alpha_i = \alpha_0} \beta_i$. Уваго

тоже можна характеризувати "внутрішньо" у термінах $\{V_\varepsilon\}_\varepsilon$. Нехай для $\varepsilon \leq \varepsilon'$ $\varphi_{\varepsilon\varepsilon'} : V_\varepsilon \rightarrow V_{\varepsilon'}$ - лін. відобр., що відобр. $\{V_\varepsilon\}_\varepsilon$ як перс. пр-р. За відображен $\{V_\varepsilon\}_\varepsilon$, $\varphi_{\varepsilon\varepsilon'}$ (з точн. до спрямленя з перс. лін. ізоморфізмами) може розпадатися у пряму суму, тому, зокрема,

$$\text{Кер. } \varphi_{\varepsilon\varepsilon'} \simeq \bigoplus_{i=1}^m \text{Кер}(\varphi_{\varepsilon\varepsilon'} : P(\alpha_i, \beta_i)_\varepsilon \rightarrow P(\alpha_i, \beta_i)_{\varepsilon'}) = \left[\begin{array}{c} \text{визнач} \\ \varphi_{\varepsilon\varepsilon'} \text{ для } P(\alpha, \beta) \\ \text{з Ex. 4.1} \end{array} \right] =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^m \begin{cases} K, & \varepsilon \in [\alpha_i, \beta_i), \varepsilon' \notin [\alpha_i, \beta_i) (\Rightarrow \varepsilon' \geq \beta_i); \\ 0 & \text{у інш. випад.} \end{cases}$$

Тобто, $\text{Кер } \varphi_{\varepsilon\varepsilon'} \neq 0$ при $\varepsilon' \geq \beta_0$ і $\varepsilon = \alpha_0$ і $\text{Кер } \varphi_{\varepsilon\varepsilon'} = 0$ при $\varepsilon' < \beta_0$ і $\varepsilon = \alpha_0$ ($\beta_0 \neq 0$ тут може бути, якщо ця якість $\bar{\gamma} = \overline{\lim} \alpha_{\bar{\gamma}} = \alpha_0$, але може $\varepsilon' < \beta_{\bar{\gamma}}$ за вибором).

Отже, $\beta_0 = \min \{ \varepsilon' \mid \text{Кер } \varphi_{\alpha_0 \varepsilon'} \neq 0 \}$ вим. $\{V_\varepsilon\}_\varepsilon$, тому

$\beta_0 := \min_{\varepsilon_i = \beta_0} \beta_i = \beta_0$. Тепер позначимо $\{W_\varepsilon\}_\varepsilon := \bigoplus_{i: (\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_0, \beta_0)} P(\alpha_i, \beta_i)$.

Це, от, перс. вект. підпр. у $\{V_\varepsilon\}_\varepsilon$ (з точн. до переходу до ізоморфізму). Характеризувати його може внутрішньо.

знову не з Ex. 4.1, для $\varepsilon > \alpha_0$

$$\text{Im } \varphi_{\alpha_0 \varepsilon} = \bigoplus_{i=1}^m \begin{cases} \mathbb{K}, & \alpha_i = \alpha_0 \text{ і } \varepsilon < \beta_i \\ 0 & \text{я imm. bun,} \end{cases}$$

$$\text{ker } \varphi_{\varepsilon \beta_0} | \text{Im } \varphi_{\alpha_0 \varepsilon} = \bigoplus_{i=1}^m \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{K}}, & \alpha_i = \alpha_0, \varepsilon \leq \beta_0 < \beta_i \\ 0: \mathbb{K} \rightarrow 0, & \alpha_i = \alpha_0, \varepsilon < \beta_0 = \beta_i \\ 0: 0 \rightarrow 0 & \text{я imm. bun,} \end{cases}$$

$\varepsilon \leq \beta_0 \leq \beta_i$
для $\alpha_i = \alpha_0$

$$\text{і } \text{ker } \varphi_{\varepsilon \beta_0} | \text{Im } \varphi_{\alpha_0 \varepsilon} = \bigoplus_{i=1}^m \begin{cases} \mathbb{K}, & \alpha_i = \alpha_0, \beta_i = \beta_0, \varepsilon \in [\alpha_0, \beta_0) = W_\varepsilon \\ 0 & \text{я imm. bun.} \end{cases}$$

$$\text{отже } W_\varepsilon = \begin{cases} \text{ker } \varphi_{\varepsilon \beta_0} | \text{Im } \varphi_{\alpha_0 \varepsilon} \\ 0 \end{cases} \text{ я imm. bun.}, \quad \varepsilon \in [\alpha_0, \beta_0], \quad \text{що бул. } \{W_\varepsilon\}_\varepsilon.$$

Тому в сумі изом. зліва і справа маємо изоморфізм.

$$\text{right } \bigoplus_{i: \alpha_i = \alpha_0, \beta_i = \beta_0} P(\alpha_i, \beta_i) \simeq \bigoplus_{j: \gamma_j = \gamma_0 = \alpha_0, \delta_j = \delta_0 = \beta_0} P(\gamma_j, \delta_j), \quad \text{закріпа крайності}$$

на (α_0, β_0) зліва і справа зліс. Проректрузувавши за суми right, маємо (right)

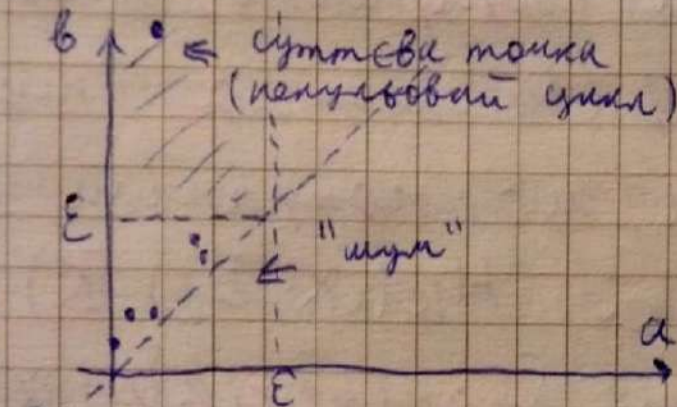
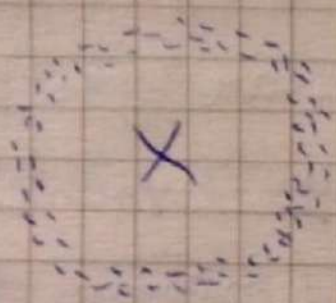
$$\{V_\varepsilon\}_\varepsilon / \{W_\varepsilon\}_\varepsilon \simeq \bigoplus_{i: (\alpha_i, \beta_i) \neq (\alpha_0, \beta_0)} P(\alpha_i, \beta_i) \simeq \bigoplus_{j: (\gamma_j, \delta_j) \neq (\alpha_0, \beta_0)} P(\gamma_j, \delta_j),$$

після чого повторюємо те саме etc. В силу скінч. порятку, цей процес завершиться за скінч. кільк. кроків, давши потр. Єдиність. 

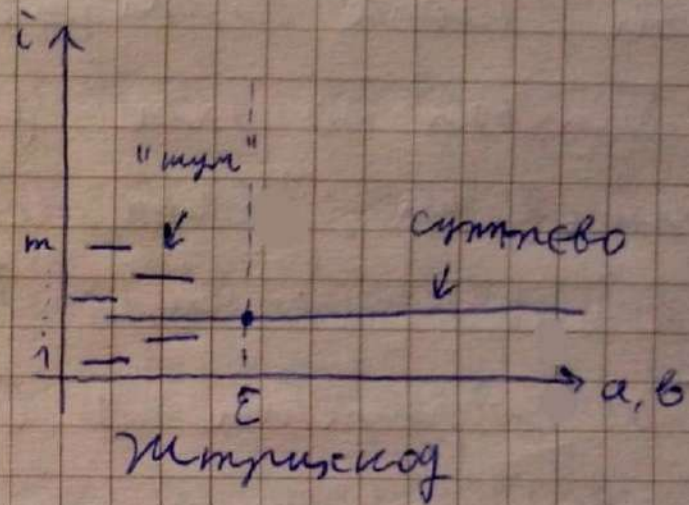
Рем. Дов. теореми дає такий конкретний алгоритм підрахунку пар (a_i, b_i) (з кратностями) для перс. просторів гомологій $\{H_k((X, \Sigma_\varepsilon), \mathbb{K})\}_{\varepsilon}$. Для n -ї к-ти (тобто коли "стабілізований" (X, Σ_∞) має n k -вим. симплексів і m $(k+1)$ -вим.) обчислювальна складність цього метода (Тауса) буде $O(mn(m+n))$ (пошуку потрібної χ_{ab} і операції з рядками та стовпц.) що довели Бонато. Ефективність реалізації метода Тауса. Для ефективного підрахунку, спрощують комплекси $(\Delta$ -комплекс, k . свіжка, гев. вище) і вим. інші методи, зокр. послідовності Масера-Вієторіса (гев. дані).

Рем. Існують два традиційні способи візуалізувати

- ізоморфізми $\{H_k((X, \Sigma_\epsilon), \mathbb{K})\}_\epsilon \cong \bigoplus_{i=1}^m P(a_i, b_i) \in \underline{Th. 4.1.}$
- або відобразити у $\mathbb{R}^2$ м точок (a_i, b_i) . При цьому м. з $b_i = +\infty$ окремо відзначаються зверху, і ці м. лежать в $\{y > x\}$. Це зветься діаграмою персистентності. Вона аналізується експліцитно, при цьому точки, що близькі до гіп. $y = x$, вважаються "шумом", а далекі - суттєвими. Кільк. точок, що потрапили у конт $\{y > \epsilon, x \leq \epsilon\}$ - k -те число Бетті $H_k((X, \Sigma_\epsilon), \mathbb{K})$ (тобто $\dim$).
- або зобразити у $\mathbb{R}^2$ м промісків $\{x \in [a_i, b_i), y = i\}$. Це зветься (персистентний) контрискожен (баркожен, barcode). Тоді "шум" - це короткі проміски, а довгі - довгі. k -те число Бетті для ϵ - це $\dim H_k((X, \Sigma_\epsilon), \mathbb{K})$ - кільк. перетинів верт. прямої $x = \epsilon$ з промісками.
- Наприклад, для хмар даних біля кола S^1 це може виглядати так:



Діаграма персистентності
 $K = 1$



Звичайно, на практиці ситуація може бути зовсім не такою очевидною. Є багато методів "її" прохиспати (починаючи з вибору комплексу, орієнтирів у ньому, свідка etc.). Або просто структури немає.