

об'єктам у ①.

Реш. Т.ч., користуючися ков. ф-рами, що були описані вище, за $\forall$ персистентним АСК (наприклад, $\{\check{C}(X, \varepsilon)\}$ або $\{VR(X, \varepsilon)\}$ для метр. пр-ру X) можна побудувати перс. ланц. комплексн і потім перс. послідовності груп симпліційних гомологій.

Реш. Задаємо, що $\forall X, \varepsilon \quad \check{C}(X, \varepsilon) \subset VR(X, 2\varepsilon)$. При цьому VR "губкий": за побудовою, симплексами $VR(X, 2\varepsilon) \in$ такі множини, що $\forall$ пара їх ел-тів $\in$ симплексом:

$$\{x_i\}_{i=0}^k \in \Sigma_{2\varepsilon} \Leftrightarrow \forall i \neq j = \overline{0, k} \quad \{x_i, x_j\} \in \Sigma_{2\varepsilon} \Leftrightarrow \{x_i, x_j\} \in NU_\varepsilon,$$

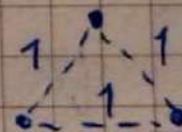
тобто належність симп. до $\Sigma_{2\varepsilon}$ отно- $\left\{ \begin{array}{l} (i \Leftrightarrow \{x_i, x_j\} \in NU_\varepsilon, \forall i \neq j) \\ \text{для } X \subset \mathbb{R}^m \text{ з абст. м.} \end{array} \right.$

значно визначена його ребрами. Тодж,

у трикутні з тр-ком зі ст. 1

маємо усього 2 варіанти:

Реалізація
 $VR(X, \varepsilon)$



$\varepsilon < 1$



$\varepsilon > 1$

Зокрема, VR не "подскачу" тут "циклічної" структури. Ре-
чевана VR у тому, що його умову набагато простіше
перевірити, ніж для комплексу Чеса: навіть у свід. n -ці
 $\mathbb{R}^n$ для великих n перевірка куди на перетин - складна задача.
Наведено ще кілька аналогічних комплексів, що були за-
пропоновані для подальшого обчислень.

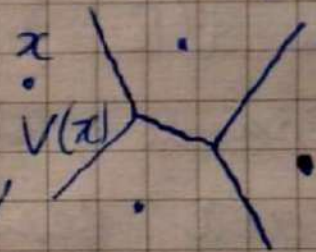
def 3.9. Метр. X - метризуемая метр. пр-ру (Y, ρ) (а также метр. пр-ру $\rho|_{X \times X}$). Клеткой (Voronoi cell), або ячейкой Вороного точки $x \in X$ зв. мн. Y точек Y , что не дал $\rho(x, y)$, нис ρ иными точок X :

$$V(x) := \{y \in Y \mid \rho(x, y) \leq \rho(x', y) \quad \forall x' \in X\}.$$

Известно $Y = \bigcup_{x \in X} V(x)$ (не завися от ρ , зорена, метр X

компактна (зокр. скінченна), бо $\forall y \in V(x)$, де $x \in \arg \min_{x \in X} f(x, y)$,
 $\{V(x)\}_{x \in X}$ зв. розбиттям (діаграмою) Во-

роного пр-ру Y , що $\text{fin. } X$.



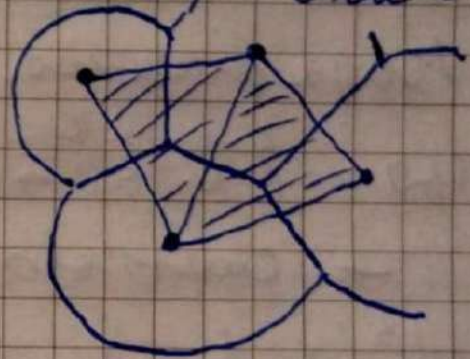
Роз. Зокр., розб. Вороного - закрите, покриття X (і, звичайно, покр. X кавіть якщо воно не покр. Y).

Ех. 3.10. Крив розбиття Вороного звється комплексом Делоне пр-ру Y (що $\text{fin. } X$).

$\forall \varepsilon > 0$ $\{B_\varepsilon(x) \cap V(x)\}_{x \in X}$ утв. покриття X . Цей крив звється Δ -комплексом метр. пр-ру X з параметром ε . Позначимо його $\Delta(X, \varepsilon)$.

Отже усі криви, комплекси Делоне і Δ -АСК. Крім того, $\Delta(X, \varepsilon) \subset \Delta(X, \varepsilon')$ $\forall \varepsilon \leq \varepsilon'$ (з тих же мірку., що для комплексу Чеса у Рн. 3.3.), тому це персистентний АСК (де fin. морфізми - знову включення) $\{\Delta(X, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$.

Крім того, $\forall \{x_i\}_{i=0}^k \subset X \quad \bigcap_{i=0}^k B_\varepsilon(x_i) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=0}^k B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$,
 тому $L(X, \varepsilon) \subset \check{C}(X, \varepsilon)$ - підкомплекс. Його практична
 перевага перед $\check{C}(X, \varepsilon)$ - "різкість" перетинів
 дуги ніж по $m+1$ при $Y = \mathbb{R}^m$ (евклідовий) ^{можна}
 у ситуації заданого положення від m -
 вимірний; і можливість використати
 ефективні алгоритми для обчислення розд. Вороного, що
 існують при малих m (тому його використовують
 зазвичай для $X \subset \mathbb{R}^m$ при $m=2, 3$ або 4 , застосовувати
 перед цим техніку зменшення вимірності).



Ex. 3.11. Знову розглянемо підкомплекс метр. пр-ру.
 Тепер нехай скінч. L у (X, ρ) - м.зв. множина орієн-
 тирів (landmarks). Нагадаємо, що $\{l_i\}_{i=0}^k \in k$ -вч.
 симплексом конн. Держи X , що вим. L , можна перва

розд. Верного $\Leftrightarrow \bigcap_{i=0}^k V(l_i) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in X : x \in V(l_i) \forall i$
 $\Leftrightarrow \exists x \in X : \forall i=0, k \quad \forall l \in L \quad \rho(x, l_i) \leq \rho(x, l).$

Модифіковано цю умову (послабили): Будемо говорити,
 що $\{l_i\}_{i=0}^k$ є k -вим. свідк.

— сильного комплексу свідка (strong witness complex)
 $W^s(X, L, \varepsilon)$ що свідк. пар. $\varepsilon > 0$, якщо $\exists x \in X$ (ε -свідок)
 така, що $\forall i=0, k \quad \forall l \in L \quad \rho(x, l_i) \leq \rho(x, l) + \varepsilon$.

— слабого комплексу свідка (weak witness complex)
 $W^w(X, L, \varepsilon)$ що свідк. пар. $\varepsilon > 0$, якщо $\exists x \in X$ (слабкий ε -свідок)
 така, що $\forall i=0, k \quad \forall l \in L \setminus \{l_i\}_{i=0}^k \quad \rho(x, l_i) \leq \rho(x, l) + \varepsilon$.

З цих означень випл., що:

— Умови на $\{l_i\}_{i=0}^k$ вик. також і для кожної підп.
 (зокрема, завжди $\forall \{l\}, l \in L$), тому це АСК [з м. вимірюв.]
 — При наведені умови посл. послаблюються, тому $\forall \varepsilon$
 кейсл. $\text{Delone} \subset W^s(X, L, \varepsilon) \subset W^w(X, L, \varepsilon)$ — підкомплекс.

— Умови послаблюються при збільшенні ε , тому
 $W^3(X, L, \varepsilon) \subset W^3(X, L, \varepsilon') \cap W^w(X, L, \varepsilon) \subset W^w(X, L, \varepsilon') \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon'$
 підкомплекси. Тл.ч., $\{W^3(X, L, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0} \cap \{W^w(X, L, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ —
 персистентні АСК (де морфізми — знову вимикання).

Нарешті, з практичних міркувань має сенс зробити такий
 не перехід, що й від комплексу $\check{C}$ до VR : перевірити
 умову наявності свідка лише для 2-елементних підкомплексів
 (ребер) комплексу:

Вопр. 3.5. Описати відповідні персистентні АСК $\{W_{VR}^3(X, L, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0} \cap$
 $\{W_{VR}^w(X, L, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$. Порівняти їх з $\{VR(X, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$. Спробувати
 знайти якісь прості приклади, де вони відрізняються.

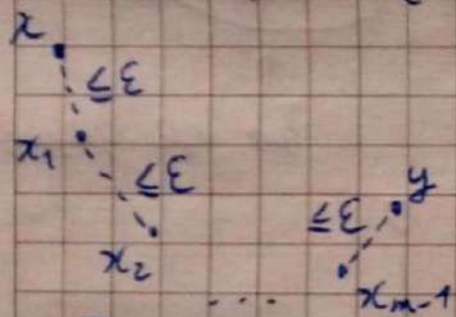
Реш. Як і для $\{\check{C}(X, \varepsilon)\}_{\varepsilon} \cap \{VR(X, \varepsilon)\}_{\varepsilon}$, можна вважати,
 що при $\varepsilon \leq 0$ усі перелічені перс. АСК складаються лише
 з 0-ван. симп. (точок). Крім того, для X обмеженої

(закр. скінченне) вони усі стабілізуються для великих ε :
 $\exists \varepsilon_0: X_\varepsilon = X_{\varepsilon_0} \quad \forall \varepsilon \geq \varepsilon_0$. Також, для $\check{C} \in UR$ це "новий" комплекс, що містить усі моделі скомплекс (і його реалізація $\cong G^{|X|-1}$ для $|X| < \infty$, що закон. екв. теорії), а для інших? Це вірно і для наступного зовсім простого прикладу персистентного об'єкта:

Ек. 3.12. Знову нехай (X, ρ) - метр. пр-р. Цього одноклапкового (однозв'язного) кластеризацією (single-linkage clustering) з параметром $\varepsilon > 0$ зветься розбиття на ^{кластери -} класи відношення еквівалентності $\sim$, що породжене відношенням R :

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow \rho(x, y) \leq \varepsilon.$$

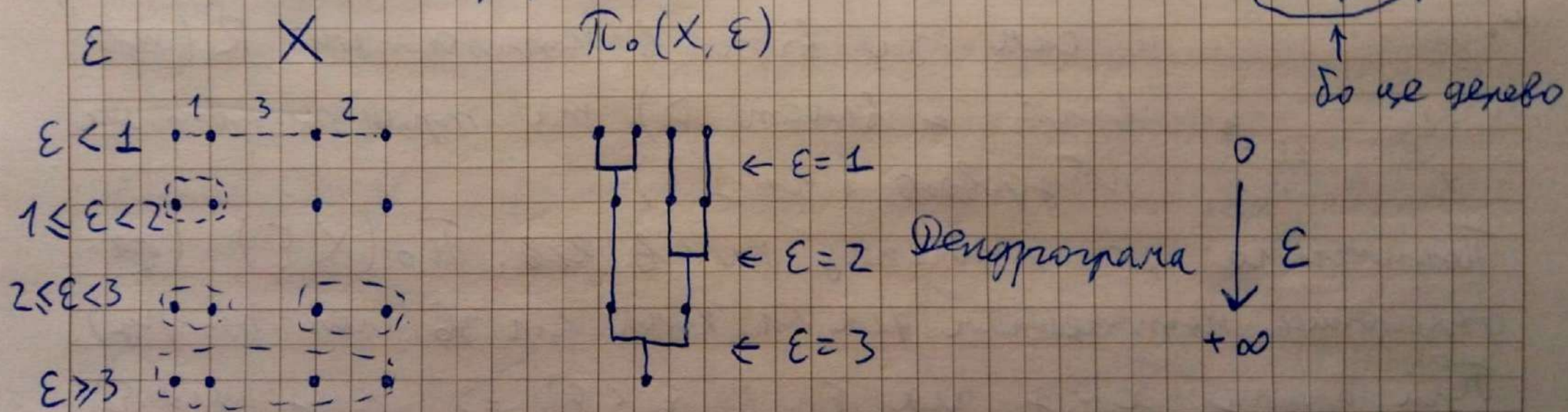
Тобто $x \sim y \Leftrightarrow \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = y : (x_{i-1}, x_i) \in R$
 $\forall i = \overline{1, m}$ (т. зв. транзитивне замикання R). Тоді $\sim$ рефл.
 $\sim$ сим. за відн. властивостями R (що
 випл. з власт. ρ) та транзитивне за
 побудовою (целу?).



Позначимо цю множину класів екв. $\Pi_0(X, \varepsilon)$ (на-
 званується позначенням для мн. комп. ліп. зв. топ. пр-ру).

При цьому $x \sim y$ для ε і $\varepsilon \leq \varepsilon' \Rightarrow x \sim y$ для ε'
 (бо $\forall$ пари x, y зм. вище $\rho(x_{i-1}, x_i) \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$), тобто
 $(\forall i = \overline{1, m})$

класи екв. першого з цих vign. входять у класи екв.
 другого: випадок vign. $f_{\varepsilon\varepsilon'} : \pi_0(X, \varepsilon) \rightarrow \pi_0(X, \varepsilon')$,
 де подвійною, $f_{\varepsilon\varepsilon} = \text{id}_{\pi_0(X, \varepsilon)} \subset f_{\varepsilon\varepsilon''} = f_{\varepsilon'\varepsilon''} \circ f_{\varepsilon\varepsilon'} \forall \varepsilon \leq \varepsilon' \leq \varepsilon''$,
 тому $\{\pi_0(X, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ утв. персистентну топологію (за
 поб. покладемо $\pi_0(X, \varepsilon) = \{\{x\}\}_{x \in X}$ при $\varepsilon < 0$; по-
 мітимо, що $\pi_0(X, \varepsilon)$ - одноточкова при $\varepsilon \geq \text{diam } X$). Ві
 топології та vign. зручно описувати т. зв. дендрограном:



Елементи $\pi_0(X, \varepsilon)$ - це т. зв. кластери X , що vign. ε .
 На практиці, якби саме діапазон ε vign. класте-

ризації, що "адекватно" визначає структуру X (ска-
нсно, відн. компонентам (лінійної) зв'язності простору,
підмножинного якого $\in X$), визначається експліцитно, і
дедуктивно тут може доповнитися: індуктивно, біномі-
валентичні $\in$ структури, що зберігаються на довшіх
продієх змін $\in$ (крім, звичайно, $[\text{diam } X, +\infty)$).
Чи $\in$ такі ж певні методи для інших характеристик
 X , скажімо, для локаліт його персист. АСК, що були
описані?

Ex. 3.13. Ще один ефективний метод "топологічної візуалізації" дає нам - алгоритм Маррен (Carleson et al., 2004). Він базується на наступній ідеї:

Нехай X, Y - топ. пр-ри, $f: X \rightarrow Y$ - неперервне, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - (скінч.) відкр. покриття Y . Тоді $f^{-1}(\mathcal{U}) := \{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ - теж відкр. покр. X . Перейдемо від цього до сукупності компонент (лім.) зв'язності $f^{-1}(U)$. Це знову ж покриття (скінч. для скінч. $\mathcal{U}$ і "достатньо гарного" X , наприклад, компактного многовида; тоді воно й відкрите).

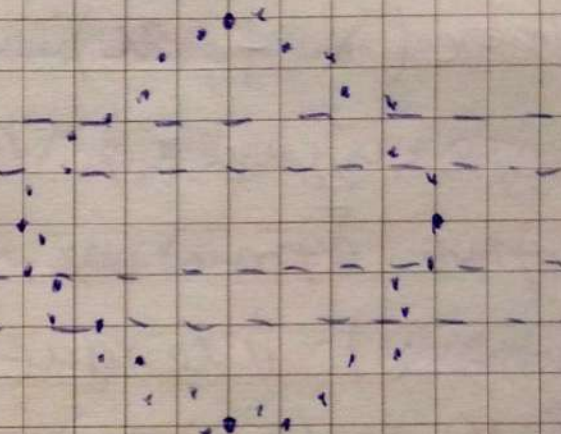
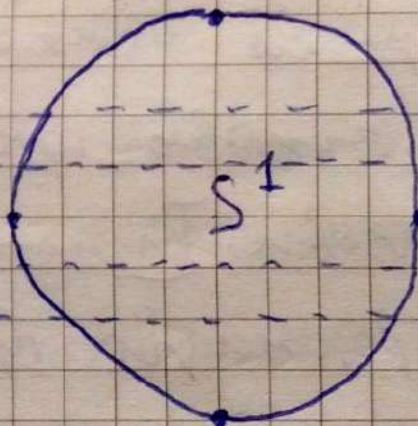
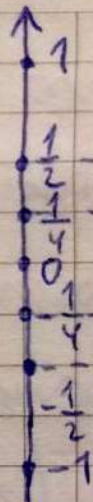
Маррен $(X, f, \mathcal{U})$ - це перше злого покриття. В якості Y можна взяти $\mathbb{R}^m$, а $\mathcal{U}$ - деяким, щоб його ел-ти перетиналися не більше ніж по 2 (скінч. для $Y = \mathbb{R}$ - послідовно розташовані інтервали). Тоді те ж буде вірно для $f^{-1}(\mathcal{U})$ і його розбиття на зв. компоненти, а

отже $\text{Mapper}(X, f, \mathcal{U})$ - основний комплекс, подібний до графу (їого реалізація). Він потребує певного зомет. елв. X (бо можуть бути не виконані умови T_1 про перв дик такого покриття), але дає певну інформацію про цей пр-р.

Якщо на X - (скінченний) метричний пр-р (хмара даних), то замість ком. зв-сті ел-тів $f^{-1}(\mathcal{U})$ беремо кластери (максимо, для опоративної кластеризації), тому додається ще параметр кластеризації.

Наприклад, нехай $X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ - коло або X - близька до S^1 хмара даних у $\mathbb{R}^2$, $f := y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ - орт. проекція на Oy , $\mathcal{U} = \{(-\infty, -\frac{1}{4}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, +\infty)\}$.

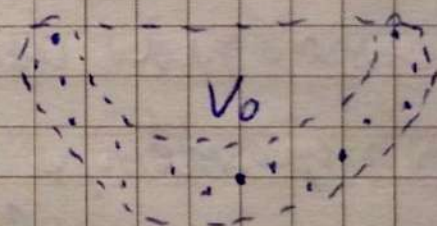
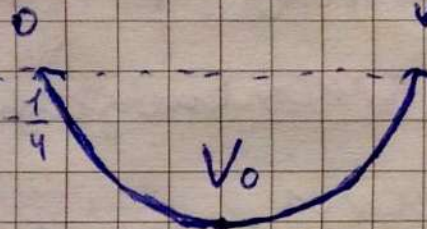
X



Покрывающая:

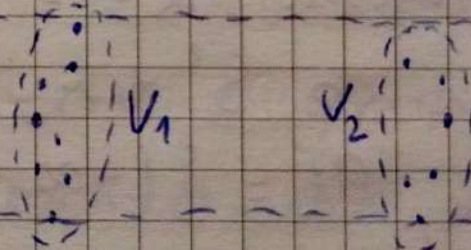
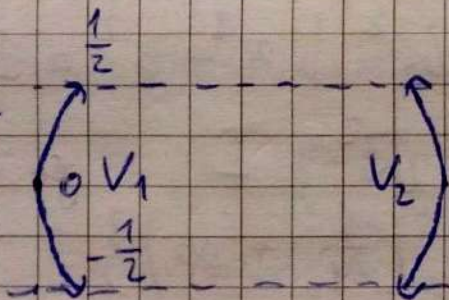
$$\varphi^{-1}\left(\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)\right)$$

136. конт.
(кластер)



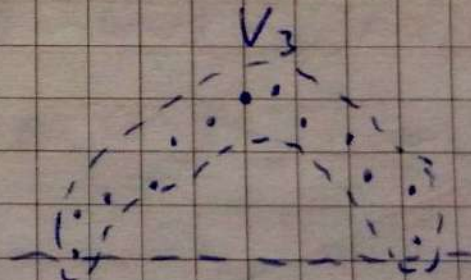
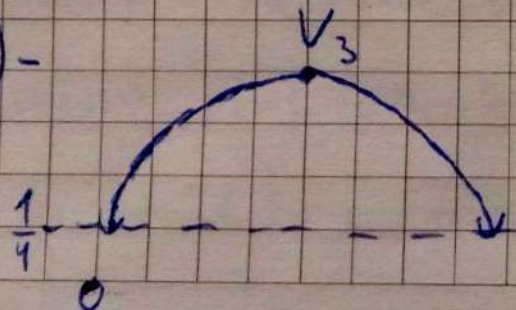
$$\varphi^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

236. конт.
(кластер)



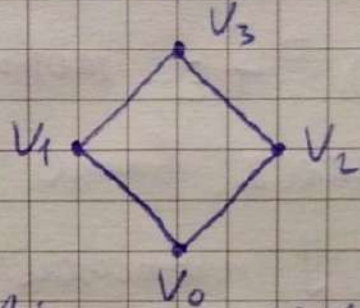
$$\varphi^{-1}\left(\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)\right)$$

136. конт.
(кластер)



Тобто обидва наші стр. покриття з 4 ед-тів з перших

Маррен $(X, f, \mathcal{U})$:



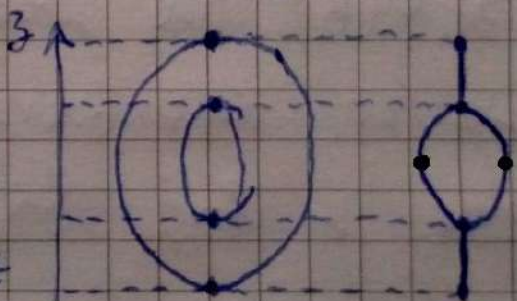
що змож. елв. S^1 (навіть гомеоморфний) Впр. 3.6 Як буде виглядати перо, якщо не позбавити на зв. крив. (класичн.)? Окремим випадком Маррен'a є граф Ліба - конструкція

з теорії Морса. Тут X - компактний гладкий многовид, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ - ф-ція Морса (зі скінч. кільк. невирозн. ізольованих крит точок), а $\mathcal{U}$ будується з окрїв крит. значень f . Для

правильною вибору $\mathcal{U}$ Маррен $(X, f, \mathcal{U})$ буде гомеоморфний

гр. Ліба $X/\sim$, де $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y) = c$, і x та $y \in$ одній зв. крив. $f^{-1}(c)$. Приклад для тора $T^2 \subset \mathbb{R}^3$

і ф-ції висоти $f=z$ маємо гр. Ліба і Маррен (Впр.).



Як бачимо, тут перо все не $\sim X$, але відображає

певним чином його стр. (скажімо, як клітинного простору - граф. дані).

Триклази застосування Маррен'a до крив. задачі див. у Carlszon, Topology and Data.

4. Персистентні гомології

Пит і далі вважалося, що сингл. гомології (сингл. пр-ків та АСК) X обчислюються з коефіцієнтами в групі $G = \mathbb{K}$, що є полем. Після визначення мплексів ел-тів $C_k(X, \mathbb{K})$ на ел-тах $\mathbb{K}$ (з позн. як раніше):

$$\lambda \cdot \left(\sum_{\alpha \in A_K} m_\alpha \sigma_\alpha^k \right) := \sum_{\alpha \in A_K} \lambda m_\alpha \sigma_\alpha^k \quad (\text{де } \lambda, m_\alpha \forall \alpha \in \mathbb{K}, |\{\alpha \mid m_\alpha \neq 0\}| < \infty).$$

Ця операція задов. аксіомам вект. пр-ру, крім того, за побудованого тран. ім-зм ∂_k стають лінійними, $Z_k(X, \mathbb{K}) = \ker \partial_k$ і $B_k(X, \mathbb{K}) = \operatorname{Im} \partial_{k+1}$ - вект. підпр-р-ми, а групи гомологій $H_k(X, \mathbb{K}) = Z_k(X, \mathbb{K}) / B_k(X, \mathbb{K})$ отр. стр-ру вект. (фактор)просторів:

Сол. 4.1. Нехай $\mathbb{K}$ -поле. Нехай $\forall$ скінч. пр-ру чи $A(X, \mathbb{K})$ його алгебраїчний скінч. комплекс є лапласовим комплексом векторних просторів над $\mathbb{K}$ та їх лінійних відображень. Зокрема, $C_k(X, \mathbb{K})$, $Z_k(X, \mathbb{K})$, $B_k(X, \mathbb{K})$ - вект. пр-ри над $\mathbb{K}$, а $H_k(X, \mathbb{K}) = Z_k(X, \mathbb{K}) / B_k(X, \mathbb{K})$ - їх факторпростір $\forall k$. Якщо ці простори скінченновимірні, то $\dim H_k(X, \mathbb{K}) = \dim Z_k(X, \mathbb{K}) - \dim B_k(X, \mathbb{K}) = \dim \ker \partial_k -$

- $\dim \mathcal{I}_m \partial_{k+1} = \dim C_k(X, \mathbb{K}) - \text{rank } \partial_k - \text{rank } \partial_{k+1} \quad \forall k.$

Рез. Для скінченновимірності достатньо, щоб $|A_k| < \infty \quad \forall k$,
зокрема, це так для скінч. триангуляції (множини скінч.
АСК), тоді $C_k(X, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{|A_k|}$, $Z_k(X, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{\dim \mathcal{K}_k \partial_k} =$
 $= \mathbb{K}^{|A_k| - \text{rank } \partial_k}$, $B_k(X, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{\text{rank } \partial_{k+1}}$, і отже $H_k(X, \mathbb{K}) \simeq$
 $\simeq \mathbb{K}^{|A_k| - \text{rank } \partial_k - \text{rank } \partial_{k+1}} \quad \forall k$ що повністю визначає ці простори.

При цьому ранги ∂_k ми можемо обчислювати за допо-
могою їх матриць звичайними (зокрема, ермитовими
числовими) методами лін. алгебри. М-ї записуються
в базисах $\{\sigma_\alpha^k\}_{\alpha \in A_k} : \{\sigma_\beta^{k-1}\}_{\beta \in A_{k-1}}$ вгід. за деф. 3.5 ^(до деф. 2.7.) ∂_k .

Числа $b_k := \dim H_k(X, \mathbb{K}) = |A_k| - \text{rank } \partial_k - \text{rank } \partial_{k+1}$
можемо називати числами Бетті X з коеф. з $\mathbb{K}$
(топ., взагалі ^(скал.) канонич., залежать від $\mathbb{K}$ і не повинні
обов'язково збігатися з нашими основними деф. 2.13).

чисел Бетті для $G = \mathbb{Z}$). При цьому ейлерова хар-ка

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k b_k = \left[\begin{array}{l} \text{для скінч. комплексу,} \\ \text{ан-по дов. Рн.1.3.} \end{array} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim C_k(X, \mathbb{K}) =$$

$$= \sum_k (-1)^k |A_k| \text{ не залежить від } \mathbb{K}. \quad \text{Впр. 4.1 } \forall \mathbb{K} \text{ } b_0 - \text{число}$$

компл. лін. зв. (реалізацій) X .

Поле можна брати, наприклад, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ або $\mathbb{Z}_p$, де $p \in \mathbb{N}$ просте. На практиці часто використовують найпростіший варіант $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. При цьому $\forall \sigma_2^k = [\alpha_{i0}, \dots, \alpha_{ik}]$

$$\partial_k \sigma_2^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j [\dots, \hat{\alpha}_{ij}, \dots] = \sum_{j=0}^k [\dots, \hat{\alpha}_{ij}, \dots],$$

бо $-1 = 1$. Це дозволяє не вводити лінійні порядки на вершинах. Крім того, у цьому випадку m -та ∂_k — це просто m -га інцидентність $(\alpha_{\beta})_{\alpha \in A_{k-1}, \beta \in A_k}$, де $\alpha_{\beta} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma_2^{k-1}$ — $(k-1)$ -ва грань σ_2^k , і 0 у інших випадках (чому?).

За означеннями, сінгли, мнорізки (зокр. включення) сінгли, кр-рів і АСК індукують тепер теж лінійні відобр. у ланц. комплексах і групах гомологій!

Сол. 4.2. Нехай K -поле. f сильн. відобр. $f: X \rightarrow Y$ (фім., ізоморфізм)
 induce $\forall k$ лінійні (ізоморфізми) $\{f_k: C_k(X, K) \rightarrow C_k(Y, K)\}$
 що збв. (ізо)морфізм фім. ланцюгових комплексів, і
 лінійні (із-ми) просторів гомологій $\{f_{k*}: H_k(X, K) \rightarrow H_k(Y, K)\}$.

Зокрема, якщо $\{X_\varepsilon\}$ разом з $\{f_{\varepsilon\varepsilon'}\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'}$ - персистентна
 сильн. пр-р (ACK) , то $\forall k$ $\{C_k(X, K)_\varepsilon\}$ разом з $\{(f_{\varepsilon\varepsilon'})_k\}$ і
 $\{H_k(X, K)_\varepsilon\}$ разом з $\{(f_{\varepsilon\varepsilon'})_{k*}\}$ - персистентні вект. простори.

Рем. Далі будемо розв'язувати задачу стандартного
 опису перс. вект. пр-ру $\{H_k(X, K)_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ для деякого
 $k \in \mathbb{Z}_+$, що побудований за перс. сильн. пр-р або
 (у задачах топологічного аналізу дане) за перс. ACK
 (скажімо, деякого метр. пр-ру $X: \check{C}(X, \varepsilon), VR(X, \varepsilon), \alpha(X, \varepsilon), \dots$)
 Наступні означення стосні до означення відоб'єктів,
 морфізмів екс. для ланцюгових комплексів у розд. 1

(ланц. комплекс і взаємні посл. груп і гом-змів можна розгл. як аналог перс. групи з заміною $\mathbb{R}$ на $\mathbb{Z}$), і знадобляться нам лише для вв. пр-тів:

def. 4.1. Нехай $\mathcal{C}$ - деяка категорія, а $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon, \{Y_\varepsilon\}_\varepsilon \subset \text{Ob } \mathcal{C}$ разом з $\{f_{\varepsilon\varepsilon'} \in \text{Mor}(X_\varepsilon, X_{\varepsilon'})\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'}$ і $\{g_{\varepsilon\varepsilon'} \in \text{Mor}(Y_\varepsilon, Y_{\varepsilon'})\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'}$ вв. - два її персистентні об'єкти. Поді іх морфізм зветься $\{\varphi_\varepsilon \in \text{Mor}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)\}_\varepsilon$ таким, що $\forall \varepsilon \leq \varepsilon'$ діаграма

$$\begin{array}{ccc} X_\varepsilon & \xrightarrow{f_{\varepsilon\varepsilon'}} & X_{\varepsilon'} \\ \varphi_\varepsilon \downarrow & g_{\varepsilon\varepsilon'} \searrow & \downarrow \varphi_{\varepsilon'} \\ Y_\varepsilon & \xrightarrow{g_{\varepsilon\varepsilon'}} & Y_{\varepsilon'} \end{array} \quad \text{комутативна.}$$

Впр. 4.2. Перевірити, що перс. об'єкти $\forall$ категорії самі утворюють категорію. Побудувати функтор між такими категоріями за функтором між вв. системами.

def. 4.2. Нехай $\mathcal{C} \subset \text{Set}$ - категорія, об'єктами якої є множини, а морфізмами - відображення. Її перс. об'єкт $\{Y_\varepsilon\}_\varepsilon$ зв. перс. підоб'єктом перс. об. $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon$, якщо

вкл. - морфізм

$\forall \varepsilon \quad Y \in X_\varepsilon, \exists \varepsilon' \leq \varepsilon \quad f_{\varepsilon\varepsilon'}(Y) \in Y_{\varepsilon'},$ де
 $\{f_{\varepsilon\varepsilon'}\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'}$ - з одн. перс. об. для $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon$, причому $\{Y_\varepsilon\}_\varepsilon$ утв.
перс. об. саме з $\{f_{\varepsilon\varepsilon'}|_{Y_\varepsilon}\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'}$.

(ад.)

Рез. Зокр., персистентні підгрупи, вект. підпростори етс.
карпати, тут об'єктами підпросторів (хоча аналогічні
деф. можна дати й для інших підкатегорій ад. груп):

перс. вект. гр-пу над $\mathbb{K}$

деф. 4.3. Нехай $\{W_\varepsilon\}_\varepsilon$ - перс. підпростір $\{V_\varepsilon\}_\varepsilon$ (з

$\{f_{\varepsilon\varepsilon'}\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'}$). Тоді перс. факторпростором $\{V_\varepsilon\}_\varepsilon$ за

$\{W_\varepsilon\}_\varepsilon$ зветься $\{V_\varepsilon/W_\varepsilon\}_\varepsilon$ з факторизаціями

$\{v + W_\varepsilon \mapsto f_{\varepsilon\vare'}(v) + W_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'}$. Перс.

прямою

сумою перс. гр-рів $\{\{V_{\varepsilon_i}\}_{\varepsilon_i \leq \varepsilon}\}_{i=1}^m$ над $\mathbb{K}$ зветься $\{V_{1\varepsilon} \oplus \dots$

$\oplus V_{m\varepsilon}\}_\varepsilon$: якщо $\{\{f_{\varepsilon\varepsilon'}\}_{\varepsilon \leq \varepsilon'}\}_{i=1}^m$ - вільн. лін. відобр., то

$\forall \varepsilon \leq \varepsilon' \quad f_{\varepsilon\varepsilon'} : V_{1\varepsilon} \oplus \dots \oplus V_{m\varepsilon} \rightarrow V_{1\varepsilon'} \oplus \dots \oplus V_{m\varepsilon'} : v_1 + \dots + v_m \mapsto$

$f_{1\varepsilon\varepsilon'}(v_1) + \dots + f_{m\varepsilon\varepsilon'}(v_m)$. Тоді $\{V_\varepsilon\}_\varepsilon / \{W_\varepsilon\}_\varepsilon \cong \{V_{1\varepsilon}\}_\varepsilon \oplus \dots \oplus \{V_{m\varepsilon}\}_\varepsilon$ вільн.

Впр. 4.3. Зробити усі необхідні для нас означення перетворень.

Ех. 4.1. Нехай $\mathbb{K}$ -поле, $a \in \mathbb{R}_+$ (тобто ≥ 0), $b \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $a < b$.

Покладемо для $\varepsilon \geq 0$

$$P(a, b)_\varepsilon := \begin{cases} \mathbb{K}, & \varepsilon \in [a, b); \\ 0, & \varepsilon \notin [a, b), \end{cases}$$

для $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$

$$f_{\varepsilon\varepsilon'} : P(a, b)_\varepsilon \rightarrow P(a, b)_{\varepsilon'} : \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{K}}, & \varepsilon, \varepsilon' \in [a, b) \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $P(a, b) := \{P(a, b)_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ (за необх. вказ. 0 при $\varepsilon < 0$) -

перс. вект. пр. Оскільки, $f_{\varepsilon\varepsilon} = \text{id}_{P(a, b)_\varepsilon}$ за побудовою, і

$$f_{\varepsilon\varepsilon''} = f_{\varepsilon'\varepsilon''} \circ f_{\varepsilon\varepsilon'}, \text{ бо (при } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon' \leq \varepsilon'') \text{ або } \varepsilon \text{ чи } \varepsilon''$$

за межами $[a, b)$, і тоді зліва і справа нулі,

або $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \in [a, b)$, і тоді маємо $\text{id}_{\mathbb{K}} = \text{id}_{\mathbb{K}} \circ \text{id}_{\mathbb{K}}$.

Ех. 4.2. Нехай A - довільна мюканна, $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ - дов. функція. Вона задає фільтрацію підмодуля A :

$\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon' \quad \Phi^{-1}([0, \varepsilon]) \subset \Phi^{-1}([0, \varepsilon'])$. Починаємо ^{з поля $\mathbb{K}$} через $\mathbb{K}^A$ мн. всіх відобр. $A \rightarrow \mathbb{K}$ з очевидною стр. вест.

пр-ру над $\mathbb{K}$: $\forall v, w: A \rightarrow \mathbb{K}, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad (\lambda v + \mu w)(a) =$
 $= \lambda v(a) + \mu w(a) \quad \forall a \in A$. Багато це пр-ру ^{для $|A| < \infty$} $\sqrt{\varepsilon}$

кар. ф-ції $\{1_a : a \mapsto \begin{cases} 1, & a=a \\ 0, & a \neq a \end{cases} \mid a \in A\}$, що будуть нам.
просто через a . Тоді $\mathbb{K}^A = \left\{ \sum_{a \in A} \lambda_a a \mid \lambda_a \in \mathbb{K} \right\}$ для $|A| < \infty$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{K} \quad \Phi^{-1}([0, \varepsilon]) \subset \mathbb{K}^A$ - вест. підпростір (можемо
вважати відобр. $B \rightarrow \mathbb{K}$ для $B \subset A$ відобр. $A \rightarrow \mathbb{K}$,
завантажених із 0 на $A \setminus B$), більш того, для $\varepsilon \leq \varepsilon'$
 $\mathbb{K} \Phi^{-1}([0, \varepsilon]) \subset \mathbb{K} \Phi^{-1}([0, \varepsilon'])$ - підпр., і визначене відобр.

включення $\varepsilon \in \varepsilon'$ між ними. Отже, $\{\mathbb{K} \Phi^{-1}([0, \varepsilon])\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$

перс. вест. пр-ру над $\mathbb{K}$. Тоді $|A| < \infty \quad \mathbb{K} \Phi^{-1}([0, \varepsilon]) =$

$$= \left\{ \sum_a \lambda_a a \mid a \in \Phi^{-1}([0, \varepsilon]) \right\} = \left\{ \sum_a \lambda_a a \mid \Phi(a) > \varepsilon \Rightarrow \lambda_a = 0 \right\}.$$

Лем. 4.4. Перс. вект. пр-р над полем $\mathbb{K}$ зветься

– вільним, якщо він (персист. лінійно) ізоморфний $\{\mathbb{K} \varphi^{-1}([0, \varepsilon])\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ для деякого A і $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}_+$;

– скінченно-порядковим вільним, якщо при цьому $|A| < \infty$,

– скінченно-представленим, якщо він (перс. лін.)

ізоморфний $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} / \text{Im } \varphi$, де $\varphi = \{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} : \{\nu_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \rightarrow \{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ – перс. лінійне відоб-р. скінч. порядк. вільного перс. в. пр-рів, а $\text{Im } \varphi := \{\text{Im } \varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ (що є перс. підпростором у $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$) – образ φ .

Лем. Зокрема, нехай A – множина k -випірканс сумірників якого персистентного АСК вим. $\{(X, \Sigma_\varepsilon)\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ де $\Sigma_\varepsilon \subset \Sigma_{\varepsilon'}$ для $\varepsilon \leq \varepsilon'$: Чеса, Віторіа-Рінса, α , обірка etc. для метр. пр-ру X . Тоді $A = \{\sigma \mid |\sigma| = k+1, \sigma \in \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \Sigma_\varepsilon\}$.

Визначимо $\varphi(\sigma)$ як $\forall \varepsilon \geq 0$ таке, що $\sigma \in \Sigma_\varepsilon$.
Тоді $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ і $\varphi^{-1}([0, \varepsilon])$ – множина k -вип. сумір. (X, Σ_ε)

Якщо $|A| < \infty$, то за побудовою $K^{\Phi^{-1}(\Sigma, \epsilon)}$ оч. ізоморфний
 $C_k((X, \Sigma_\epsilon), K)$: обидва складаються з $\sum_{\substack{|\sigma|=k+1 \\ \sigma \in \Sigma_\epsilon}} \sigma$.

Понам $\{C_k((X, \Sigma_\epsilon), K)\}_{k \in \mathbb{R}_+}$ - скінч. порожд. вільний перс.
 вект. пр-р над K .

Впр. 4.4. Показати, що якщо перс. лін. відобр. $f = \{f_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$
 скінч. пор. вільний перс. в. пр-рів $\in$ скінч. пор. вільний : $K \otimes f :=$
 $= \{K \otimes f_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$.

Лем. 4.3 $\forall$ перс. АСК $(X, \Sigma_\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ $\forall$ пока K
 k -тий простір перс. функцій $\{Z_k((X, \Sigma_\epsilon), K)\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+} = K \otimes \partial_k \in$
 скінч. порожд. вільний, а k -тий простір перс. гомологій
 $\{H_k((X, \Sigma_\epsilon), K)\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$ - скінченно представлений,
 $= \{Z_k((X, \Sigma_\epsilon), K)\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+} / \text{Im } \partial_{k+1}$

Емпіричне дослідження перс. гомологій таких АСК
 базується на пореб. спостереженнях та наступному
 загальному факті "персистентної лінійної алгебри".

Тн. 4.1. Бүдэг-эхийн скиннерна-представлений перс. вект. н-р-р
 над полем K (персистентно лийнчно) изоморфний гэдгийг
 нр. сүйи $P(a_1, b_1) \oplus \dots \oplus P(a_m, b_m)$, гд $a_1, \dots, a_m \in$
 $\mathbb{R}_+$, $b_1, \dots, b_m \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$, $a_i < b_i \forall i$. При
 цьому ці парінски (a_i, b_i) означено визначені у
 наступному сенсі: якщо

$P(a_1, b_1) \oplus \dots \oplus P(a_m, b_m) \cong P(c_1, d_1) \oplus \dots \oplus P(c_\ell, d_\ell)$
 (перс. лін. ізоморфні), то $\ell = m$, і множина пар $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^m$
 збігається з мн. пар $\{(c_j, d_j)\}_{j=1}^\ell$ з точністю до
 перестановки і з урахуванням кратності.