

лапаної з Γ горівало d_1 - відстані між її кінцями (що тут = евклідові).

ч. Рімановий випадок розглянемо нажме.

Рв. Якщо U відкрита у топ. просторі X , то вона відкрита і в метричній топології d_e (визнача топ. не скільки за метрикою).

$\Rightarrow \forall x \in U$ нехай $C := \inf \{ \ell(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \text{ з'єднує } x \text{ і } y \notin U \} > 0$ за в. ч. 1.

$\forall y \in B_C(x) \quad d_e(x, y) < C \Rightarrow [\text{дов. } d_e] \Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma : \gamma \text{ з'єднує } x \text{ і } y,$

$\ell(\gamma) < C \Rightarrow [\text{побудова } C] \Rightarrow y \in U$. Оскільки $B_C(x) \subset U$. Точ. ч., U

відкрита у метричній топ. $\triangle$

Ех. 1-3: ці топології збігаються (стандартна топ. $\mathbb{R}^n$ - метрична для евклідової і d_1).

ч Топос збігаються у рімановому випадку (див. Канска).

Рем. Взагалі Канска, ці топології різні (Впр., або див. В.-В.-І.).

Рв. Усі $\gamma \in \Gamma$ неперервні і в метричній топології.

$\Rightarrow$ Отже, нехай $\gamma \in \Gamma$, $\gamma: [a, b] \rightarrow X$. Згідно з метричним критерієм неперервності, достатньо довести, що $\forall$ послідовності $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$ в $[a, b]$ $d_e(\gamma(t_n), \gamma(t)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. ^{$(\Leftrightarrow \gamma(t_n) \rightarrow \gamma(t))$} Будемо тут позначати через $[t_n, t]$ відрізок $[t_n, t]$ при $t_n \leq t$ і $[t, t_n]$ при $t_n > t$. За лев. d_e (і оскільки $\gamma|_{[t_n, t]} \in \Gamma$ за власт. 1. з лев. Γ і з'єднує $\gamma(t_n)$ і $\gamma(t)$ або навпаки):
 $d_e(\gamma(t_n), \gamma(t)) \leq l(\gamma|_{[t_n, t]}) = [\text{з лев. } l] = |l(\gamma|_{[a, t]} - l(\gamma|_{[a, t_n]})| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, бо $t \mapsto l(\gamma|_{[a, t]})$ непер. за 1. з лев. l , що доводить неперіодичність. $\triangle$

Рем. γ подальшому розглядається на X саме метричну топологію лев. Компонентою скінченності точки $x \in X$ у $\text{ПВМ}(X, \Gamma, l)$ будемо називати $L_x := \{y \in X \mid d_e(x, y) < +\infty\}$, а компонентою досягності x -

$$K_x := \{y \in X \mid \exists \gamma \in \Gamma: \gamma \text{ з'єднує } x \text{ і } y, l(\gamma) < +\infty\}$$

Рв. Компоненти скінченності, досяжності, зв'язності та лінійної зв'язності X збігаються.

► За def. d_c , $K_x = L_x$ (див. Рем. вище).

Нехай N_x - компонента лін. зв'язності x . Оскільки за побудовою K_x ^{лінійно} зв'язна, $K_x \subset N_x$.

Нехай M_x - компонента зв'язності x . Тоді $N_x \subset M_x$ (бо N_x зв'язна).

$\forall y \in K_x \forall \varepsilon > 0 \forall z \in B_\varepsilon(y) d_c(y, z) < \varepsilon \Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma : \gamma \text{ з'єднує } y \text{ і } z, l(\gamma) < \varepsilon$. Оскільки $y \in K_x$, $\exists \mu \in \Gamma : \mu \text{ з'єднує } x \text{ і } y, l(\mu) < +\infty$. Лінійно замірлюючи за необхідності параметр (як у доведенні пер-ої тр-ка d_c вище), можемо вважати, що визначені $\mu * \gamma \in \Gamma$, що з'єднує x і z , і $l(\mu * \gamma) = l(\mu) + l(\gamma) < +\infty$, тобто $z \in K_x$. Точн., $B_\varepsilon(y) \subset K_x$ ($\forall \varepsilon > 0$).

Аналог., $\forall y \notin K_x \forall \varepsilon > 0 \nexists z \in B_\varepsilon(y) \cap K_x$. Знову ж, маємо $\exists \gamma, \mu \in \Gamma : \gamma \text{ з'єднує } z \text{ і } y, l(\gamma) < \varepsilon, \mu \text{ з'єднує } x \text{ і } y$.

γ , $\ell(\mu) < +\infty$, і можна вважати, що визначений $\mu * \gamma$, що $\gamma' \in \mu \cap \gamma$, $\ell(\mu * \gamma) = \ell(\mu) + \ell(\gamma) < +\infty$, тобто $\gamma \in K_X \cap \Pi.C.$, $B_\varepsilon(\gamma) \subset X \setminus K_X$ ($\forall \varepsilon > 0$).

Отже, $K_X \subset X \setminus K_X$ відкриті, тобто K_X відкрито замкнена. Такі множини містять зв'язні компоненти X повністю, отже $M_X \subset K_X$. Маємо $N_X \subset M_X \subset K_X \subset N_X \Rightarrow N_X = M_X = K_X = L_X$. 

Соч. X зв'язний $\Leftrightarrow X$ лінійно зв'язний $\Leftrightarrow d_c$ -метрика на X ("звичайна", тобто скінченна).

Випадок ріманової метрики (Ех.4.).

Рл. Нехай (M, g) k -ладний рімановий многовид ($k \geq 1$), Γ -кусково k -ладні множини у M , а ℓ -рімановий функціонал дивергенції. Тоді (M, Γ, ℓ) - ПВМ.

Як зазначалося вище, дв. класа допустимих множин

для Γ і власт. 1.-3. дів. φ -ла гомотопна для $\mathcal{L}$
 виконанні (тільки треба розширити власт. інваріантності
 3. на кус.ч. криві і лінійні заміни параметра - Вспр.).

Отже, залишилося показати 4.

Нехай $U \subset M$ - відкр., $p \in U$.

$\exists$ карта $(V, \varphi) : p \in V$ з лок. коорд.

$(x^1, \dots, x^n)$ ($n = \dim M$). Також $\exists \epsilon > 0$:

$B_\epsilon(\varphi(p)) \subset \varphi(U \cap V)$ (до $\varphi(U \cap V)$ -

відкр. окіл $\varphi(p)$ у $\mathbb{R}^n$, тут карта

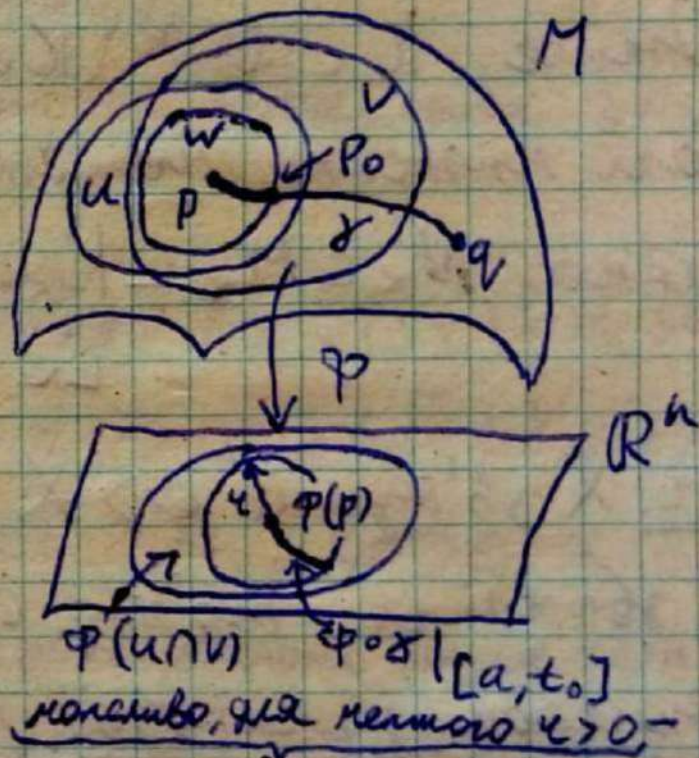
евалідова). Також $W := \varphi^{-1}(B_\epsilon(\varphi(p)))$ -

відкр. окіл p , і $\overline{W} = \varphi^{-1}(\overline{B}_\epsilon(\varphi(p))) \subset U \cap V$ (Вспр. або глв.

"Тем. відкр."). Зокрема, $\overline{W}$ - компакт як непрерыв. образ компакта

$\overline{B}_\epsilon(\varphi(p)) \subset \mathbb{R}^n$.

Нехай $g|_V = g_{ij} dx^i dx^j$. $\forall q \in V$ позначимо через



$\lambda(q)$ найменше власне значення n -ї $G(q) = (g_{ij}(q))_{i,j=1}^n$.
 Основни ця n -га Трета год. визначена, $\lambda(q) > 0$. Тк.ч.,
 визначена φ -їд $\lambda: V \rightarrow \mathbb{R}$. Вона неперервна (і навіть
 $(k-1)$ -магма - Випр.). Оскільки $\overline{W}$ - компакт, $\lambda|_{\overline{W}}$ приймає
 найменше значення $\lambda_0 > 0$.

Нехай тепер $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ - крива, k -та, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q \notin U$.
 Зокрема, $q \notin \overline{W}$. Покладемо $t_0 := \sup \{t \in [a, b] \mid \gamma([a, t]) \subset W\}$.
 Тоді $p_0 := \gamma(t_0) \in \partial W$ і $\gamma([a, t_0]) \subset \overline{W} \subset V$, тому

$$\begin{aligned} l(\gamma) &\geq l(\gamma|_{[a, t_0]}) = \int_a^{t_0} \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) (\gamma^i)'(t) (\gamma^j)'(t)} dt \geq \int_a^{t_0} \sqrt{\lambda(\gamma(t)) \sum_{i=1}^n (\gamma^i)'(t)^2} dt \\ &\geq \sqrt{\lambda_0} \int_a^{t_0} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma^i)'(t)^2} dt = \sqrt{\lambda_0} l_E(\varphi \circ \gamma|_{[a, t_0]}) \geq \sqrt{\lambda_0} \epsilon. \end{aligned}$$

Пут $(\gamma^1, \dots, \gamma^n) = \varphi \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(U)}$ - іск. задання γ , l_E - евклідова довжина
 шляху в $\mathbb{R}^n$ (з Ек.2.), Остатня нер-сть - з того, що $\varphi \circ \gamma|_{[a, t_0]}$
 з'єднує центр евклідової кулі радіуса ϵ з точкою на межі.
 Оцінка не залежить від γ (зокрема від q), тільки від U

і ρ . Отримали $\underline{c}$: $\inf$ довжин таких шляхів $\geq \sqrt{\rho_0} \underline{c} > 0$. $\triangle$

В. Метрична топологія (M, d_E) збігається з топологією M .

$\triangleright$ Вже знаємо, що метрична не слабка.

Нехай $p \in M$, (U, φ) — карта M з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$, $p \in U$,
 $g|_U = g_{ij} dx^i dx^j$.

Оберемо якийсь $\epsilon > 0$ і покладемо $V := \varphi^{-1}(B_{3\epsilon}^E(\varphi(p)))$, $W := \varphi^{-1}(B_\epsilon^E(\varphi(p)))$ — прообрази евклідових куль $\mathbb{R}^n$. Вони відкриті (отже в метричній топології int), $p \in W$, $\overline{W} \subset V$, $\overline{V} \subset U$, $\overline{V}$ і $\overline{W}$ компактні (ан-по до минулого введення; це все — в топології M).

Перенесемо на U евклідову n -ку $\mathbb{R}^n$: $d_E(q_1, q_2) = |\varphi(q_1) - \varphi(q_2)|$. Оскільки φ — гомеоморфізм, а топ. $\mathbb{R}^n$ породжується евкл. n -кою, d_E породжує топологію U (індуковану топологією M). Ми покажемо, що на W метрики d_E і d_g Гіліна-чево еквівалентні, а отже відносні топології

(визначає M і метрична (M, d_e)) співпадають на W .
 Це достатньо для співпадіння топологій і локально:
 $\forall p \in M$ існує W як вище, оскільки вона відкр. у метр.
 топ., $\exists \epsilon(p) > 0$: куля ϵ -ки d_e $B_{\epsilon(p)}(p) \subset W$. Тоді
 за припущенням вона і всі кулі $B_\epsilon(p)$, $\epsilon \leq \epsilon(p)$ відкриті
 в топ. W , а отже M . Оскільки $\{B_\epsilon(p)\}_{\substack{p \in M \\ \epsilon \leq \epsilon(p)}}$ утворюють
 базу метричної топ., $\forall$ топоса, відкрита у метричній
 топ., відкрита і в визідній, тобто метрична не сильніша $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ збігається з визідною.

Ал-по попередньому дов., $\forall q \in U$ позначимо через $\lambda(q) \leq \mu(q)$
 найменше і найбільше власні значення n -ї Грама $G(q) := (g_{ij}(q))_{i,j=1}^n$
 відп. Отримаємо q -ї $\lambda, \mu : U \rightarrow \mathbb{R}$, неперервні (визр.),
 $0 < \lambda \leq \mu$. Тоді на компактній $\bar{U}$ вони приймають
 найменше і найбільше значення λ_0 і μ_0 відп.: $0 < \lambda_0 \leq \mu_0 < +\infty$

Нехай $q_1, q_2 \in W$, $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ - куск. k -м. шлях, $\gamma(a) = q_1$, $\gamma(b) = q_2$.

Якщо $\gamma([a, b]) \subset \bar{V}$, то ан-по до поперед. введеної метри:

$$\sqrt{\lambda_0} l_E(\varphi \circ \gamma) = \sqrt{\lambda_0} \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma^i)'(t)^2} dt \leq \underbrace{\int_a^b \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) (\gamma^i)'(t) (\gamma^j)'(t)} dt}_{\ell''(\gamma)} \leq \sqrt{\lambda_0} \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma^i)'(t)^2} dt = \sqrt{\lambda_0} l_E(\varphi \circ \gamma),$$

де $\varphi \circ \gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, l_E - евкл. $\ell''(\gamma)$

ф-л годинни на $\mathbb{R}^n$, як вище. Отже, для даного γ

$$\ell(\gamma) \geq \sqrt{\lambda_0} l_E(\varphi \circ \gamma) \geq \sqrt{\lambda_0} |\varphi(\gamma(a)) - \varphi(\gamma(b))| = \sqrt{\lambda_0} |\varphi(q_1) - \varphi(q_2)| = \sqrt{\lambda_0} d_E(q_1, q_2).$$

Якщо ж γ виходить за межі $\bar{V}$, то нехай $\hat{\gamma}$ - його відрізок від q_1 до виходу за межі $\bar{V}$ ($\gamma|_{[a, t_0]}$ з позначенням поперед. введеної, з заміною W на V). Тоді

$$\ell(\gamma) \geq \ell(\hat{\gamma}) \geq \sqrt{\lambda_0} l_E(\varphi \circ \hat{\gamma}) \geq \sqrt{\lambda_0} \cdot 2c \geq \sqrt{\lambda_0} d_E(q_1, q_2).$$

Пит передостання нерівність - з того, що $\varphi \circ \hat{\gamma}$ з'єднує у $\mathbb{R}^n$ точку середньої евкл. кулі нагуса



χ з меншою концентрисацією криві радіуса 3χ , а отримавши з того, що $\varphi(q_1)$ і $\varphi(q_2)$ лежать у евл. криві радіуса χ .
Отже, $\forall \gamma \in \Gamma$, що $\exists' \text{ єдине } q_1 \text{ і } q_2$, $\ell(\gamma) \geq \sqrt{10} \cdot d_E(q_1, q_2)$.
Перейдемо до інф: за дов. d_E ,

$$d_E(q_1, q_2) \geq \sqrt{10} \cdot d_E(q_1, q_2).$$

Тепер покладемо $\gamma(t) := \varphi^{-1}((1-t)\varphi(q_1) + t\varphi(q_2))$ — гладка кривизна: $\gamma \in C^k([0, 1], W)$, $\gamma(0) = q_1$, $\gamma(1) = q_2$. За дов. d_E і гомоморфізму,

$$d_E(q_1, q_2) \leq \ell(\gamma) \leq \sqrt{\mu_0} \ell_E(\varphi \circ \gamma) = \sqrt{\mu_0} |\varphi(q_1) - \varphi(q_2)| = \sqrt{\mu_0} d_E(q_1, q_2).$$

Т.ч., отримали потрібну лінійну екв-цію метрик!

$$\sqrt{10} \cdot d_E|_W \leq d_E|_W \leq \sqrt{\mu_0} \cdot d_E|_W.$$



Індукована метрика (узагальнення Ex. 5).

Нехай (Y, Γ, ℓ) — ПБМ, X — T_0 -мон. простір, $\varphi: X \rightarrow Y$ неперервне.
(з Ex. 5 вище $X = U \subset Y$ з індук. мон., $\varphi = i: U \rightarrow Y$ — вживлення: $x \mapsto x$).
Покладено $\tilde{\Gamma} := \{\gamma \in C([a, b], X) \mid \varphi \circ \gamma \in \Gamma\}$ і $\tilde{\ell}(\gamma) := \ell(\varphi \circ \gamma)$ для $\gamma \in \tilde{\Gamma}$.

Втр. $\tilde{\Gamma}$ - клас допустимих шляхів на X , а $\tilde{\ell}$ задовольняє 1-3. з def. оп-ла довжини, але не обов'язково задов. 1. (навести приклад).
def. Якщо $\tilde{\ell}$ задов. і 1., то ПЗМ $(X, \tilde{\Gamma}, \tilde{\ell})$ будемо називати простором з внутрішньою метрикою $(d_{\tilde{\ell}})$, що індукована внутр. м-кою $\Upsilon (d_{\ell})$ за допомогою φ .

Ex. $\Upsilon = (\bar{M}, \bar{g})$ з рімановою внутр. м-кою $d_{\bar{g}}$, $X = (M, g)$, де (M, χ) - підмноговид $\Upsilon \bar{M}$, $g = \chi^* \bar{g}$ - його перша функц. форма. Можі задати, що $\forall$ куск. м. γ ΥM $\chi \circ \gamma$ - куск. м. $\Upsilon \bar{M}$ (тут все - однієї гладкості), і $\ell_g(\gamma) = \ell_{\bar{g}}(\chi \circ \gamma)$. Подімо внутр. м-ка d_{ℓ_g} на M індукована за допомогою χ .

Р. Для $d_{\tilde{\ell}}$, що індукована d_{ℓ} за допомогою φ $\forall x, y \in X$

$$d_{\tilde{\ell}}(x, y) \geq d_{\ell}(\varphi(x), \varphi(y))$$

$\Rightarrow \forall \gamma \in \tilde{\Gamma}$, що з'єднує x і y , $\varphi \circ \gamma \in \Gamma$
 з'єднує $\varphi(x)$ і $\varphi(y)$, і $\ell(\varphi \circ \gamma) = \tilde{\ell}(\gamma)$. Тому $d_{\ell}(\varphi(x), \varphi(y))$



за лев. - інф діючої (принаймні не меншої) числової множини, ніж $d_{\tilde{e}}(x, y)$. $\triangle$

Сос. $\varphi \in$ лінійне (точніше, перотварююче) відображення метр. просторів $(X, d_{\tilde{e}})$ і (Y, d_e) , а тому неперервним.

Впр. Чи є метрична топологія $d_{\tilde{e}}$ індукованою метр. топ. d_e за допомогою φ (тобто чи мають всі відкр. множини вигляд $\varphi^{-1}(U)$, де U - відкр. відкр. d_e)?

Тепер узагальнимо ріманові многовиди і їхню внутрішню м-ку двома різними способами.

Ех. 6. Фінслерова метрика

Лев. Фінслеровою структурою на k -м. многовиді M ($k \geq 1$) звється φ -ція $F \in C(TM, \mathbb{R})$ (лагранжіан) така, що $\forall p \in M$ $F(p, \cdot) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ - норма на $T_p M$. (M, F) тоді звється фінслеровим многовидом. Фінслерова довжина крив. k -м. множ.

$\gamma: [a, b] \rightarrow M$, зветься

$$L(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t)) dt.$$

Рем. Тут ми використувуємо позначення $TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}$. Загваємо, що $L(\gamma) \geq 0$, бо під інтегралом невід'ємна кусково неперервна ф-ція. Для річарового випадку $F(p, v) = \sqrt{g_p(v, v)}$.

Впр. 1. L -ф-я довжин на кус. к-м. мн-ах Γ , тобто (M, Γ, L) -ПВМ.

2. Метрична топ. іого внутрішньої м-ки де збігається з відкритою M .

Есл. 7. Сюрімарова метрика

Лев m -випірний розподіл на k -м. мн-овиді M ($k \geq 1, m \leq n = \dim M$) зветься відображення $\mathcal{D}$, що кожній $p \in M$ ставить у відповідність m -випірний векторний підпростір $\mathcal{D}_p \subset T_p M$.

Рем. Це відображення $M \rightarrow G_m TM := \bigcup_{p \in M} G_m T_p M$ (транслаційне розпарування), де $\forall p \in M$ $G_m T_p M$ - мн-осна усіх

m -вимірний вект. підпростір у $\text{Tr} M$ (трассаріан). Можна показати, що $G_m \text{Tr} M$ — ∞ -магний $m(n-m)$ -вимірний мно-
виг V_P

Ан-по до тензорних розмірувань тоді можна показати, що $G_m T M$ — $(k-1)$ -магний $(n + m(n-m))$ -вимірний мно-
виг, тому можна говорити про магність розподілів. Але ми прямо введено її у def.:

def. Будемо говорити, що пара $X_1, \dots, X_m$ на $U \subset M$ утворюють базис m -вим. розподілу $\mathcal{D}$ на $U \subset M$, якщо $\forall q \in U \exists (X_1)_q, \dots, (X_m)_q$ — базис $\mathcal{D}_q$. m -вим. розподіл $\mathcal{D}$ (на M) зветься l -магний ($l \in \overline{0, k-1}$), якщо $\forall p \in M \exists$ відр. $U \ni p$ і пара $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{X}^l(U)$, що утворюють базис $\mathcal{D}$ на U .

def. m -вим. l -м. розподіл $\mathcal{D}$ зветься (зілкан) інтегровним, якщо $\forall p \in M \exists (l+1)$ -м. підмно-
виг (N, γ) у M з інт. зануренням γ такий, що $p \in \gamma(N)$ і $\forall q \in N$

$$d_q \chi(T_q N) = \mathcal{D} \chi(q)$$

Лем. Зокрема, $\dim N = m$. Тл. ч. (N, χ) "детикається" до $\mathcal{D}$ у V точці q .
 Якщо додати умову зв'язності, то можна показати, що
 такий (N, χ) єдиний з точністю до переходу до еквівалентного:
 аналогічно до кривих, підповерхини $(N, \chi) \sim (\tilde{N}, \tilde{\chi})$ еквіва-
 лентні, якщо $\exists$ дифеоморфізм $\phi: N \rightarrow \tilde{N}$ такий, що $\chi = \tilde{\chi} \circ \phi$
 (зокрема, $\chi(N) = \tilde{\chi}(\tilde{N})$; це відн. еквів. - Вопр.). Такі підпо-
 верхини називають інтегральними для $\mathcal{D}$, а їхню сукупність -
 інтегральним шаруванням, що відповідає $\mathcal{D}$. Воно має, зокрема,
 властивість максимальності: якщо (L, ρ) - зв'язний ірр.
 занурений підмн. такий, що $\rho \in \mathcal{P}(L)$ і $\forall q \in L \ d_q \rho(T_q L) \subset$
 $\subset \mathcal{D} \chi(q)$, то $\exists$ занурення $\sigma: L \rightarrow N$ таке, що $\rho = \chi \circ \sigma$ (зокрема,
 $\rho(L) \subset \chi(N)$). Інтегрування розподілів можна розуміти
 як узагальнення інтегрування полів.

Th. (Фробениус). m -вир. l -м. розподіл $\mathcal{D}$ на M ($l \geq 1$) інтегровний $\Leftrightarrow \forall$ полів $X, Y \in \mathcal{X}^l(M)$ якщо $\forall p \in M$ $X_p, Y_p \in \mathcal{D}_p$, то $\forall p \in M$ $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$.

Def. Sternberg. $\triangle$

Rem. Ці умови записують вивн. $X \in \mathcal{D}, Y \in \mathcal{D}, [X, Y] \in \mathcal{D}$.

def. m -вир. l -м. розподіл $\mathcal{D}$ на M зветься цілком інтегровним (цілком нерозривним), якщо $\forall p \in M \exists$ вивн. $U \ni p$ і полів $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{C}^l(U)$, що утворюють базис $\mathcal{D}$ на U і такі, що $\forall q \in U$ значення полів $X_1, \dots, X_m$ і деяких функцій вигляду $[\dots [[X_{i_1}, X_{i_2}], X_{i_3}], \dots, X_{i_s}]$, $i_1, \dots, i_s = \overline{1, m}$ утворюють повну систему в $T_q M$. Тут l таке, щоб усі потрібні функції існували (або просто $l = k = \infty$).

інтегровності з,

Rem. Подімо ця умова протилежна умові Th. Фробениуса, де усі функції залежаться $\forall q$ з $\mathcal{D}_q$. Якщо $\dim \mathcal{D} \geq 2$ (крім трив. функцій $\dim \mathcal{D} = \dim M = 1$), то $l \geq 1$.

$\dim M$ непарна і $m = \dim M - 1$, такий зв'язок поєднаний розподіл ще називають контактною структурою.

Ек. 1. Усі гладкі одновимірні розподіли інтегровні (до $\forall$ два поля $X, Y \in \mathcal{D}$ пропорційні: локально $X = fY$ або $Y = fX$, $f \in C^1(U)$, тому, наприклад $[X, Y] = [fY, Y] = f[Y, Y] - Y(f)Y = -Y(f)Y \in \mathcal{D}$). Знову ж, це аналог інтегровних вект. полів.

З. У $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $(n-1)$ -вимірний розподіл (гіперрозподіл) $\mathcal{D}_x := x^\perp$ ($y \in \mathbb{R}^n$, що ми отождествимо з $T_x(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$), очевидно, інтегровний його інтегральні гіперповерхості - це гіперсфери з центром у 0.



Перевіримо умову Тн Фроденіуса для $n=3$.

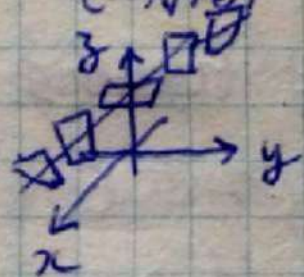
Скажімо, на $\{y \neq 0\}$ поля $X := -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ і $Y := -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}$ утворюють базис $\mathcal{D}$ (зазначені розподіл ω -м.). Умову Тн достатньо перевірити локально на базисних полях в одній $\forall$ точці (Внх).

Плун $[X, Y] = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{D}$ ($i = \frac{z}{y} X + \frac{x}{y} Y$),

отже дійсно має нульову інтегровність. Для $\{x \neq 0\}, \{z \neq 0\}$ ан-но.

Ех. 3 (Стандартна канонічна структура $\mathbb{R}^3$). Покладемо

$\mathcal{D}_{(x,y,z)} := \text{span} \{X_{(x,y,z)}, Y_{(x,y,z)}\}$ на $\mathbb{R}^3$, де $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$.
Це ∞ -м. 2-вим. розподіл.



$[X, Y] = \frac{\partial}{\partial z}$, тобто $\mathcal{D}$ не просто неінтегровний за

Тл. Фробеніуса (причому навіть локально), а цілком

неінтегровний: $\{X, Y, [X, Y]\}$ утворюють базис $\mathbb{R}^3$ у $\forall$ точці.
 $T_p \mathbb{R}^3$

def. Кусково k -м. $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ дотикається до розподілу $\mathcal{D}$ на M (є горизонтальним ^{ин} для нього), якщо $\forall t \in \gamma'(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$.

У точках порушення гладкості ця умова повинна виконуватися для обох дотичних векторів: $\gamma'(t-0) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$, $\gamma'(t+0) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$.

Рем. Це можна узагальнити і на криві $\gamma: I \rightarrow M$ для дов. I .

Тн. (Дамевський - Числу (Сков)). $\forall k$ -гладкого зв'язного $M, i \in \overline{k-1}$ -цілком неінтегровного $\mathcal{D}$ на множині $\forall p, q \in M \exists$ кусковогладкий шлях, що з'єднує p і q та дотикається до $\mathcal{D}$.

def. Метрикою (субрімановою) на $(k-1)$ -м. розподілі $\mathcal{D}$ ^(на) k -м. мн. M зветься $\bullet$ відображення g , що ставить у відповідність кожній $p \in M$ скалярний добуток g_p на $\mathcal{D}_p$ і є $(k-1)$ -гладким у наступному сенсі: $\forall p \in M \exists$ відкр. $U \ni p$ і посл. $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{X}^{k-1}(U)$ такі, що $\forall q \in U \{ (X_1)_q, \dots, (X_m)_q \}$ - ортонормований відносно g_q базис $\mathcal{D}_q$.

Рем. Можна просто взяти ріманову м-ку на M і обмежити її $\mathcal{D}$ $\forall p \in M$ на $\mathcal{D}_p$.

def. Субрімановий многовидом зветься трійка $(M, \mathcal{D}, g)$, де M - k -м. многовид, $k \geq 1$, $\mathcal{D}$ - цілком неінтегровний $(k-1)$ -м. розподіл на M , а g - $((k-1)$ -м.) метрика на $\mathcal{D}$.

Субріманового довписного кусково k -м. шляху $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, що дотикається до $\mathcal{D}$, тоді зветься

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt.$$

Рем. Знову не, $L(\gamma)$ завжди $\exists \geq 0$.

Ек. 1. Для тривіального розподілу ($\mathcal{D}_p = T_p M \forall p \in M$) і ріманової g це просто ріманова стр.

2. $\mathcal{D}$ - стандартна конт. стр. на $M = \mathbb{R}^3$, g - обмеження на неї еукл. метрики.

3. $\mathcal{D}$ - ст. конт. стр. на $M = \mathbb{R}^3$, g визначена умовою: X і Y утворюють $\forall p$ ортонури базис $\mathcal{D}_p$. Цей субрімановий многовид зветься (субрімановою) групою Гейзенберга.

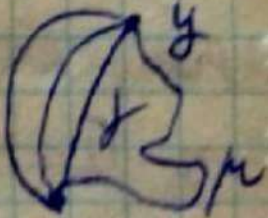
Впр. 1. Показати, що (M, Γ, ℓ) , де $(M, \mathcal{D}, g)$ - субрімановий многовид, Γ - куск. м. шляхи, що дотикаються до $\mathcal{D}$, а ℓ - субрімановий σ -л довжини, $\in$ ПВМ.

Рем. З Тм. 9.-10. вище випливає, що для зв'язного M sign ,
внутрішня m -ка d_e скінченна.

2. Чи збігається метрична топологія d_e з визначеною на M ?

3. Що таке суборієнтована структура?

def. у ПБМ (X, Γ, e) для $x, y \in X$, що з'єднує x і y , зветься
найкоротшою, якщо $\ell(x) = d_e(x, y)$. Якщо $\forall x, y \in X \exists$
найкоротша, що з'єднує x і y , m -ка d_e зветься строго внутрішньою.

Рем. З def. d_e , γ -найкоротша $\Leftrightarrow \forall \mu \in \Gamma$, що з'єднує x і y ,
 $\ell(\gamma) \leq \ell(\mu)$ (інф досягається). 

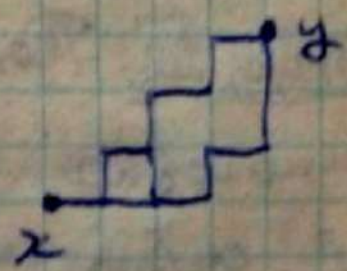
Ек. 1. Ланані у евкл. $\mathbb{R}^n$: найкоротша $\exists!$ (визначені прямою).

2. Кусково гладкі у евкл. $\mathbb{R}^n$: так само.

3. Ланані у евкл. $\mathbb{R}^n$ з ланками, що $\parallel$ осей:

найкоротший $\exists$ ("~~якийсь~~ сходин") , але не $!$ при

$n > 1$.



Путь единично розуміємо внаслідок з точністю до заміни напрямку. Отже, m -ки з Ex. 1-3 строго внутрішні.

4. Діагональний випадок детально розглянемо нижче.

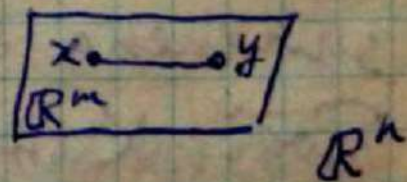
5. Індукована m -ка може не бути строго внутр., навіть якщо індукована стр. внутр. Наприклад, нехай $X = U \subset \mathbb{R}^n$ - відкрита неопукла, стр. на $\mathbb{R}^n$ евклідова (з Ex. 1 або Ex. 2), на U - обмежена евкл. ℓ



(тобто внутр. m -ка, що індукована включенням $i: U \rightarrow \mathbb{R}^n$). Тоді для деяких точок найкоротшої не існує. Але:

Рк. Якщо $d\tilde{e}$ індукована d_e за допомогою φ і $\varphi \circ \gamma$ для $\gamma \in \tilde{\Gamma}$ - найкоротша $\text{fig. } d_e$, то γ - найкоротша $\text{fig. } d\tilde{e}$.
 (тобто маємо НВМ $(X, \tilde{\Gamma}, \tilde{e}) : (Y, \Gamma, e)$ як вище (Ex. 5).

Нехай $\gamma: [a, b] \rightarrow X$, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Тоді



$$d\tilde{e}(x, y) \geq [\text{Рк. вище}] \geq d_e(\varphi(x), \varphi(y)) = [\text{урава}] = \\ = \ell(\varphi \circ \gamma) = [\text{deb. } \tilde{e}] = \tilde{e}(\gamma) \geq [\text{deb. } d\tilde{e}] \geq d\tilde{e}(x, y),$$

має $\tilde{e}(x) = d\tilde{x}(x, y)$, x - найкоротша. $\triangle$

Лем. Обернене, взагалі наспучи, певне.

Лем. ПБМ (X, Γ, ℓ) зветься повним, якщо метричний простір (X, d_ℓ) повний.

Лем. Зокрема, саме це ми будемо ~~маємо~~ розуміти під повнотою ріманових (фіксованих, субріманових) метрик.

Лем. 1. E^n повний.

2. Якщо X компактний (як завжди, відносно топології d_ℓ), то він повний (зокрема, компактні ріманові м.).

3. Лем. Якщо (Y, Γ, ℓ) повний, $\varphi \in C(X, Y)$ - топологічне вбилення (тобто $\varphi: X \rightarrow \varphi(X)$ - гомеоморфізм), $\varphi(X)$ - замкнена в Y і визначена індукована стр. $(X, \tilde{\Gamma}, \tilde{\ell})$.

Тоді X повний.

$\triangleright$ Якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ - фундаментальна відн. $d_{\tilde{\ell}}$:

$d_{\tilde{e}}(x_n, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$. Тоді $d_e(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ в силу
Рн. вище ($d_e(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) \leq d_{\tilde{e}}(x_n, x_m)$), тобто $\{\varphi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ —
 фундаментальна відносно d_e . В силу повноти Y , вона збігається:
 $\varphi(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in Y$. В силу замкнутості $\varphi(X)$, $y \in \varphi(X)$, тобто
 $y = \varphi(x)$, $x \in X$. В силу вкладеності φ , тоді $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, т.ч.,
 X повний. $\triangle$

Зокрема, вкладені підпростори повного річ. множини
 з замкнутим образом повні.

Ч. Нехай Y повний та зв'язний, $X = U \subset Y$, $\overline{U} = Y$ (т.ч. U — відкрита,
 U — внутр. індукована m -на X — обмежена внутр. m -на Y (це так, коли,
 наприклад, $Y = \mathbb{R}^n$ з еукл. стр., а U — Вотр.). Тоді
 X повний $\Leftrightarrow X = Y$ (Вотр. або дов. курсом аналізу).

Рн. $F: M \rightarrow N$ — лінійна ізометрія $(M, g) \hookrightarrow (N, h) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow F$ — метрична ізометрія $(M, d_{eg}) \hookrightarrow (N, d_{eh})$.

$\Rightarrow$. F - bij , $\forall p, q \in M \forall$ куск. т. м. χ , що $z' \in \text{supp } p \cap q$, $F \circ \chi$ - куск. т. м. χ , що $z' \in \text{supp } F(p) \cap F(q)$. При цьому $\ell_k(F \circ \chi) = \ell_k(\chi)$, бо F - ізометрія. У max куск. т. м. χ N , що z' єдиний $F(p) \cap F(q)$, sign. куск. т. м. χ M між не довгими. Тому $\deg(p, q) = d_k(F(p), F(q))$ (іпримитивні одиниці не мають кінця). Отже, F - метрична ізометрія.

$\Leftarrow$. Це (ще одна) теорема Майєрса-Стієнрода. Її найскладніша частина - доведення, що F - дифеоморфізм. Те, що він зберігає довжини мож χ , впливає з опису ℓ , який ми дамо нижче. $\triangle$

Впр. Довести $\Leftarrow$ для $(M, g) = (N, h) = \mathbb{E}^n$.

Для розв'язку задачі опису найпростіших внутрішньої n -м-ріманового многовида, потрібний додатковий апарат.

Афінні та риманові зв'язності. Геометричні

M - k -м. многовид, $k \geq 2$, $\dim M = n$.

def. Афінною зв'язністю на M звється відображення $\nabla: \mathcal{X}^{k-2}(M) \times \mathcal{X}^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{X}^{k-2}(M): X, Y \mapsto \nabla_X Y$ таке, що

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}^{k-2}(M), f, g \in C^{k-2}(M), Z \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$;

2. $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad \forall X \in \mathcal{X}^{k-2}(M), Y, Z \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$;

3. $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y \quad \forall X \in \mathcal{X}^{k-2}(M), Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M), f \in C^{k-1}(M)$.

$\nabla_X Y$ при цьому зветься коваріантною похідною Y за X . Пара (M, ∇) зветься многовидом з афінною зв'язністю.

Rem. Подіто зв'язність - це правило диференціювання в. полів у напрямку інших полів. 3. є аналогом правила Лейбніца. З цього для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ маємо $\nabla_X (\lambda Y) = \lambda \nabla_X Y$, тобто $\nabla_X \cdot: \mathcal{X}^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{X}^{k-2}(M)$ лінійне над $\mathbb{R}$.

Ex. Точасна зв'язність на $\mathbb{R}^n$ (з шод. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$): для

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \nabla_X Y := X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = X(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} - \text{заглов. дер.}$$

Рем. Нехай $(x^1, \dots, x^n)$ - лока. коорд. на $U \subset M$. $\forall i, j = \overline{1, n}$ покладемо ви-
значені на U поле $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$ за $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$:

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \text{де } \Gamma_{ij}^k \in C^{\infty}(U), \quad i, j, k = \overline{1, n}.$$

Звичайно, для цього треба визначити ∇ на U . Це можна коректно
зробити, продовжуючи поля з U на M (Впр. або задати век. підмодуль
дер. $\{\Gamma_{ij}^k\}_{i,j,k=1}^n$ поз. символами Крістоффеля зв. ∇ у $(x^1, \dots, x^n)$).

Впр. При заміні $(x^1, \dots, x^n)$ на $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ нові с.к. мають вигляд

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{lm}^0 \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^0} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l}$$

(Зокрема, це не компоненти $(2,1)$ -тенз. поля).

Рем. Нехай $X \in \mathcal{X}^{2-2}(M)$, $Y \in \mathcal{X}^{2-1}(M)$, $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_U = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$.

$$\begin{aligned} \nabla_X Y|_U &= \nabla_{(X^i \frac{\partial}{\partial x^i})} (Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = [\underline{1}] = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = [\underline{2} \text{ і } \underline{3}] = \\ &= X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = [\underline{\text{дер. } \Gamma_{ij}^k}] = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right). \end{aligned}$$

Отже,