

Варіант 1

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\cos u, v, \sin u, v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = yz \frac{\partial}{\partial x} + xz \frac{\partial}{\partial y} + xy \frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y , інтегровним?
3. Компоненти $(0, 4)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $T^{2111} = 2$, $T^{1211} = a$, $T^{1121} = b$, $T^{1112} = c$, інші компоненти дорівнюють нулю. Знайти a, b, c такі, що цей тензор симетричний. Записати його компоненти $\widehat{T^{2111}}$ і $\widehat{T^{1112}}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v) :

$$r(u, v) = (\cos u, v, \sin u, v).$$

Варіант 2

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u \cos v, u \sin v).$$

2. Знайти запис векторних полів $X = \frac{\partial}{\partial r}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial \psi}$ у декартовій системі координат, якщо (r, φ, ψ) – сферичні координати на $\mathbb{R}^3$. Перевірити, що у декартових координатах їхня дужка Лі дорівнює 0.
3. Компоненти $(1, 2)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a_1^{11} = 1$, $a_1^{22} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним (за верхньою парою індексів)? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v) :

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u \cos v, u \sin v).$$

Варіант 3

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v).$$

2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = x^3 \frac{\partial}{\partial x} - y^3 \frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.
3. Компоненти $(2, 1)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $A_{11}^2 = a$, $A_{12}^1 = -1$, $A_{21}^1 = b$, $A_{22}^2 = c$, інші компоненти дорівнюють нулю. Знайти a, b, c такі, що цей тензор кососиметричний (за нижньою парою індексів). Записати його компоненти $\widetilde{A_{11}^2}$ і $\widetilde{A_{22}^2}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Записати зовнішню 2-форму $\frac{y}{x} dx \wedge dy$ у полярних координатах (r, φ) на $\mathbb{R}^2$.

Варіант 4

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u, v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y , інтегровним?
3. Компоненти $(0, 3)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a^{111} = 1$, $a^{121} = -1$, $a^{211} = 1$, $a^{112} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти $\widetilde{a^{111}}$ і $\widetilde{a^{121}}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v) :

$$r(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v).$$

Варіант 5

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v).$$

2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.
3. Компоненти $(2, 1)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a_{11}^2 = 1$, $a_{12}^1 = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним (за нижньою парою індексів)? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v) :

$$r(u, v) = (\cos u, e^v, \sin u, e^{-v}).$$

Варіант 6

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\cos u, e^v, \sin u, e^{-v}).$$

2. Знайти запис векторного поля $X = -\varphi \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial \varphi}$ у декартовій системі координат, якщо (r, φ) – полярні координати на $\mathbb{R}^2$. Знайти похідну функції $f(x, y) = x^2 - y^2$ у напрямку цього поля.
3. Компоненти $(3, 0)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a_{212} = 1$, $a_{121} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v) :

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v).$$

Варіант 7

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, u^2 - v^2).$$

2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.
3. Компоненти $(0, 3)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a^{211} = 1$, $a^{112} = 1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Записати зовнішню 2-форму $(x^2 - y^2) dx \wedge dy$ у полярних координатах (r, φ) на $\mathbb{R}^2$.

Варіант 8

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\cos u, v, \sin u, v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = yz \frac{\partial}{\partial x} + xz \frac{\partial}{\partial y} + xy \frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y , інтегровним?
3. Компоненти $(0, 4)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $T^{2111} = 2$, $T^{1211} = a$, $T^{1121} = b$, $T^{1112} = c$, інші компоненти дорівнюють нулю. Знайти a, b, c такі, що цей тензор симетричний. Записати його компоненти $\widehat{T}^{2111}$ і $\widehat{T}^{1112}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v) :

$$r(u, v) = (\cos u, v, \sin u, v).$$

Варіант 9

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u, v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y , інтегровним?
3. Для якого найменшого n існують кососиметричні $(3, 0)$ -тензори у точці n -вимірного многовида? Навести приклад такого тензора, виписавши його компоненти у деяких локальних координатах $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Знайти компоненти цього тензора у координатах $(x^1 + x^2, x^2, \dots, x^n)$.
4. Записати зовнішню 2-форму $dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$ у сферичних координатах (r, φ, ψ) на $\mathbb{R}^3$.

Варіант 10

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u \cos v, u \sin v).$$

2. Знайти запис векторних полів $X = \frac{\partial}{\partial r}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial \psi}$ у декартовій системі координат, якщо (r, φ, ψ) – сферичні координати на $\mathbb{R}^3$. Перевірити, що у декартових координатах їхня дужка Лі дорівнює 0.
3. Компоненти $(1, 2)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a_1^{11} = 1$, $a_1^{22} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним (за верхньою парою індексів)? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v) :

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u \cos v, u \sin v).$$

Варіант 11

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y , інтегровним?
3. Компоненти $(0, 3)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a^{221} = 1$, $a^{122} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або косиметричним? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Записати зовнішню 3-форму $(x^2 + y^2) dx \wedge dy \wedge dz$ у циліндричних координатах (r, φ, z) на $\mathbb{R}^3$.

Варіант 12

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\cos u, \operatorname{ch} v, \sin u, \operatorname{sh} v).$$

2. Знайти запис векторних полів $X = \frac{\partial}{\partial r}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ у декартовій системі координат, якщо (r, φ, z) – циліндричні координати в $\mathbb{R}^3$. Перевірити, що у декартових координатах їхня дужка Лі дорівнює 0.
3. Нехай (a_{ijk}) – компоненти симетричного тензора, а (b^{ijk}) – косиметричного для деяких локальних координат в околі точки. Чому дорівнює сума $a_{ijk}b^{ijk}$? Чи залежить це число від вибору координат?
4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v) :

$$r(u, v) = (\cos u, \operatorname{ch} v, \sin u, \operatorname{sh} v).$$

Варіант 13

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v).$$

2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = x^3 \frac{\partial}{\partial x} - y^3 \frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.
3. Компоненти $(2, 1)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $A_{11}^2 = a$, $A_{12}^1 = -1$, $A_{21}^1 = b$, $A_{22}^2 = c$, інші компоненти дорівнюють нулю. Знайти a, b, c такі, що цей тензор кососиметричний (за нижньою парою індексів). Записати його компоненти $\widetilde{A_{11}^2}$ і $\widetilde{A_{22}^2}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Записати зовнішню 2-форму $\frac{y}{x} dx \wedge dy$ у полярних координатах (r, φ) на $\mathbb{R}^2$.

Варіант 14

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u, v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y , інтегровним?
3. Компоненти $(0, 3)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a^{111} = 1$, $a^{121} = -1$, $a^{211} = 1$, $a^{112} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти $\widetilde{a^{111}}$ і $\widetilde{a^{121}}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v) :

$$r(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v).$$

Варіант 15

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v).$$

2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.
3. Компоненти $(2, 1)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a_{11}^2 = 1$, $a_{12}^1 = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним (за нижньою парою індексів)? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v) :

$$r(u, v) = (\cos u, e^v, \sin u, e^{-v}).$$

Варіант 16

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\cos u, e^v, \sin u, e^{-v}).$$

2. Знайти запис векторного поля $X = -\varphi \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial \varphi}$ у декартовій системі координат, якщо (r, φ) – полярні координати на $\mathbb{R}^2$. Знайти похідну функції $f(x, y) = x^2 - y^2$ у напрямку цього поля.
3. Компоненти $(3, 0)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a_{212} = 1$, $a_{121} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v) :

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v).$$

Варіант 17

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \cos u, \cos v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ і $Y = y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y , інтегровним?
3. Нехай a_1, a_2, a_3 – дотичні вектори у деякій точці тривимірного многовида. Визначимо для якихось локальних координат в околі цієї точки тензор B компонентами $B_{ijk} = (a_i, a_j, a_k)$, де (a_i, a_j, a_k) позначає детермінант з координат цих векторів у відповідному базисі. Показати, що B є кососиметричним. Чи зберігається формула для його компонент в інших координатах?
4. Записати зовнішню 3-форму $dx \wedge dy \wedge dz$ у сферичних координатах (r, φ, ψ) на $\mathbb{R}^3$.

Варіант 18

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = z \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = z \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y , інтегровним?
3. Визначимо для якихось локальних координат в околі точки многовида тензор A компонентами $A_{ijk} = \delta_{ij} + \delta_{jk} + \delta_{ki}$. Показати, що A є симетричним. Чи зберігається формула для його компонент в інших координатах?
4. Записати зовнішню 2-форму $dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$ у циліндричних координатах (r, φ, z) на $\mathbb{R}^3$.

Варіант 19

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, u^2 - v^2).$$

2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.
3. Компоненти $(0, 3)$ -тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a^{211} = 1$, $a^{112} = 1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Записати зовнішню 2-форму $(x^2 - y^2) dx \wedge dy$ у полярних координатах (r, φ) на $\mathbb{R}^2$.

Варіант 20

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u, v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y , інтегровним?
3. Для якого найменшого n існують кососиметричні $(3, 0)$ -тензори у точці n -вимірного многовида? Навести приклад такого тензора, виписавши його компоненти у деяких локальних координатах $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Знайти компоненти цього тензора у координатах $(x^1 + x^2, x^2, \dots, x^n)$.
4. Записати зовнішню 2-форму $dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$ у сферичних координатах (r, φ, ψ) на $\mathbb{R}^3$.