

Д/з. 1. Формально довести $\forall d$ твердження з лекції про те, що VC-вимірність класу (х.ф.) d -вимірних паралелепіпедів дор. $2d$.

2. Знайти VC-вимірності:

- класу $\mathcal{H} = \{h_x\}_{x \in X} \cup \{h^-\}$ з нотер. Д/з;

- класу булевих кон'юнкцій з 2.

Обидва вони скінч., але треба спробувати знайти ^{точне} значення, що краще за оцінку $VCdim(\mathcal{H}) \leq \log_2 |\mathcal{H}|$ з лекції.

Д/з. 1. Дати, $\mathcal{H} = \{I[a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]\}$ на $\mathbb{R}^d$,

- $VCdim(\mathcal{H}) \geq 2d$: гіпотеза, нехай $C = \{(\pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \pm 1)\}$:

$|C| = 2d$. Показати, що $\mathcal{H}$ розбиває C . Це означає, що

$\forall$ посл. $0 \leq \frac{1}{z} \in \{0, 1\}^{2d}$ образ гомом. $\mathbb{K} \in \mathbb{K}$ на $\mathbb{C}$.

Означено, $\forall i = 1, d$ положено:

$$h(0, \dots, -1, \dots, 0) =$$

$$h(0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0) = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & [a_i, b_i] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] & [a_i, b_i] = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}] \\ 1 & [a_i, b_i] = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] & [a_i, b_i] = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \end{array}$$

Оскільки всі мінімуми досягаються в 0, умова $x^i \in [a_i, b_i]$ завжди виконана для i -го координ. $\forall i \neq i$. Тому гіперпл. $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ приймає ці значення.

$\forall \dim(K) \leq 2d$: нехай $|C| = 2d+1$. Покажемо, що K не розбиває C . $\forall i = \overline{1, n}$ нехай $a_i := \min \{x^i \mid x \in C\}$, $\bar{i}$

показан $x_{2i-1} = (\dots, a_i, \dots) \in C$ - "направлена" за y_i -ю координатой,

$b_i := \max \{x_i^i | x \in C\}$, $x_{2i} = (\dots, b_i, \dots) \in C$ - "направлена".

Если $x_1, \dots, x_{2d}$ не могут повторяться, але в $\mathbb{R}^d$ -
пространству существует x_{2d+1} , что до нас не нахлестывало.

Для него $x_{2d+1}^i \in [a_i, b_i] \forall i$. Тогда если $h \in \mathcal{H}$ задается
 $[c_1, e_1] \times \dots \times [c_d, e_d]$ и $h(x_{2i-1}) = h(x_{2i}) = 1 \forall i$, то $[c_i, e_i] \supset$
 $[a_i, b_i] \forall i$. Потому $h(x_{2d+1}) = 1$: не иначе h и $h(x_1) = \dots$
 $\dots = h(x_{2d}) = 1$ и $h(x_{2d+1}) = 0$.

Таким образом, чтобы доказать $VCdim(\mathcal{H}) = d$, надо показать:

$VCdim(\mathcal{H}) \geq d$: $\exists C: |C| = d$ и $\mathcal{H}$ разд. C . (Таким образом
максимум скручивается обратно $VCdim(\mathcal{H}) \leq \log_2 |\mathcal{H}|$)

$VCdim(\mathcal{H}) \leq d$: $\forall C: |C| = d+1$ $\mathcal{H}$ не разд. C .

①/3.2. - Для $\mathcal{H} = \{h_x = 1_{\{x\}}\}_{x \in X} \cup \{h^- = 0\}$ $VCdim(\mathcal{H}) =$
 ≥ 1 . Очевидно!

≥ 1 : Пусть richtig $\forall \{x\} \subset X: h_x(x) = 1 : h^-(x) = 0$.

≤ 1 : Если $\{x, y\} \subset X: x \neq y$. Тогда $\nexists h \in \mathcal{H}: h(x) = h(y) = 1$.

ya оценка не задана для всех x и y на X .
Итак:

1. Значит $\forall \dim(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} = \{h: X \rightarrow \{0, 1\} \mid |\{x \mid h(x) = 1\}| = k\}$:

k — минимальное значение k равно k максим.

Видно: $\min \{k, |X| - k\}$.

$\geq \min \{k, |X| - k\}$: Пусть $\forall C \subset X: |C| = d = \min \{k, |X| - k\}$,

тогда $d \leq k, d \leq |X| - k$. Видно, $\forall$ подм. $\exists h \in \mathcal{H}$

что минимальное значение: k или $|X| - k$, и $0 \leq d \leq k$, и $0 \leq d \leq |X| - k$.

$0 \leq d \leq |X| - k$, тогда k и $|X| - k$ заданы (на $|X|$) максим. k .

$\leq \min \{k, |X| - k\}$: $\forall C \subset X: |C| = \min \{k, |X| - k\} + 1$ адо

$d > k$, тогда h не может принимать $(1, \dots, 1)$ на C , адо

$d > |X| - k$, тогда h не может принимать $(0, \dots, 0)$ на C .

2. Значит $\forall \dim(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} = \{h: X \rightarrow \{0, 1\} \mid |\{x \mid h(x) = 1\}| \leq k\}$:

Візнає: k .

$VCdim(\mathcal{H}) \geq k$: Як правило, $\forall C: |C|=k \quad \forall$ посл. з $\{0,1\}^k$
реалізується функція $h \in \mathcal{H}$: тут вже можна не обмежувати
за кільк. нулів.

$VCdim(\mathcal{H}) \leq k$: $\forall C: |C|=k+1 \quad \nexists h \in \mathcal{H}$, що приймає $(1, \dots, 1)$ на C .

Діалог 2 - Визначимо $VCdim$ класу $\mathcal{H}$ функцій кон'юнктивів на
 $X = \{0,1\}^d$. Як $k = \frac{x_1}{x_1} \wedge \frac{x_2}{x_2} \wedge \dots \wedge \frac{x_d}{x_d}$ (де $x_i = 1$ — означає $k=1$)

разом з $k=0$, маємо $|\mathcal{H}| = 3^d + 1$, як уже знаємо. Верхня
оцінка: $VCdim(\mathcal{H}) \leq \log_2(3^d + 1)$. Тут $d \rightarrow \infty$ як
 $\sim \log_2 3^d = d \log_2 3 > d$. Чи можна збільшити крайнє?

Спочатку покажемо $VCdim(\mathcal{H}) \geq d$. Покладемо $C :=$
 $= \left\{ (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0) \right\}_{i=1}^d$ (базисні вектори $\{0,1\}^d$ як
вект. пр-ту над полем $\{0,1\} = \mathbb{Z}_2$).

Несан $h(\bar{e}_i) = 0$ гда $\bar{i} = \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_k$ ма $h(\bar{e}_i) = 1$ гда $\bar{i} = \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_k$

$$(0, \dots, \overset{\text{ii}}{1}, \dots, 0)$$

Погр $h = \overline{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \overline{x_{i_k}}$ нигде, где $d \geq 2$

Выводимая, что $VCdim(\mathcal{H}) \leq d$ $\leftarrow$ Димено, несан $|C| = d+1$:

$C = \{c_1, \dots, c_{d+1}\} \nearrow \mathcal{H}$ позб. C . Зокрема, $\forall i = \overline{1, d+1}$

$\exists h_i \in \mathcal{K}: h_i(C_j) = \overline{\delta_{ij}}$ (0 при $i = j$ та 1 в інших C_j),
 $h_1(C_{d+1}) = 1$ означає, що h_1 "містить" y $x_1^{E_1} \wedge \dots \wedge x_d^{E_d}$,
 де $C_{d+1} = (E_1, \dots, E_d)$ і тут позн. $x_i^1 = x_i$, $x_i^0 = \overline{x_i}$, тобто
 є цей виразом z , монотонно, викреслені множителі.
 C_d відрізняється від C_{d+1} принаймні у одній коорд.,
 тому вона не входить до h_1 (інакше $h_1(C_d) = 0$),
 C_{d-1} - менше, ніж C_d в іншій (інакше $C_{d-1} = C_d$), тому
 вона менше не входить etc. Крім $d-1$ країв отрим-

можно, что $h_i = x_{e_i}$ або $\overline{x_{e_i}}$ для каждого $e_i = 1, d$
 (не пом. 1, можно также координ. вхождений). Тогда само
 $h_2 = x_{e_2}$ або $\overline{x_{e_2}}$ etc. Оск. h_i всего $d+1$ и все
 non. пизни, где i все имеют вид $h_i = x_{e_i}$ ма
 $h_{\bar{i}} = \overline{x_{e_i}}$. При этом $C_i = (\dots, 0, \dots)_{e_i}$ и $C_k = (\dots, 1, \dots)_{e_i}$
 при $k \neq i$, $C_{\bar{i}} = (\dots, \frac{1}{e_i}, \dots)_{e_i}$ и $C_k = (\dots, 0, \dots)_{e_i}$, $k \neq \bar{i}$. Оск.
 $d \geq 2$, $d+1 \geq 3$, можно $\exists k \neq i, \bar{i}$, где для него существуют
 сгруппированные одна одна. $\downarrow$

Например, при $d=1$ $VCdim(\mathcal{H}) = 2$: Единообразно 2-ел.
 мн. $\{0, 1\}^1 \in \{(0), (1)\}$, что порожд. $\mathcal{H} = \{x_1, \overline{x_1}, 0, 1\}$.
 Все примеры на всех знач. $(0, 1), (1, 0), (0, 0), (1, 1)$ sign.

Ил.ч., $VCdim(\mathcal{H}) = \begin{cases} d, & d \geq 2; \\ 2, & d = 1. \end{cases}$

3. Показано $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ с nonen. загорами, что сам. $\mathcal{H}$

т.зв. монотонное разбиение, то есть для всех h не
 иметь $\bar{x}_i$: $h = x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$ для каких $i_1 < \dots < i_k =$
 $= 1, d$, $0 \leq 1$ такое получается. Значит $VCdim(\mathcal{H})$.

Пусть d (меньше $\forall d$). Доведем $VCdim(\mathcal{H}) \leq d$ мне
 спротивуется: пусть все не менее. Пусть пусть $x_{i_1}, \bar{x}_{i_1},$
 i приходится до противоречия все на узлы сами без учета
 $d \geq 2$. И конечно, при $d = 1$ $\{(0), (1)\}$ все не возм.:
 в $\mathcal{H} = \{x_1, 0, 1\}$ не может быть $(1, 0)$.
 И доведем $VCdim(\mathcal{H}) \geq d$ заметим $C = \{e_i\}_{i=1}^d$
 выберем $C = \{\bar{e}_i := (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)\}$. Пусть $h = x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$
 где 0 на $\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_k}$ на 1 big пусть $\bar{e}_i$.

4. И теперь доведем, что $VCdim$ класс интервалов
 $\{h_{a,b} = 1_{[a,b]}\}$ на $\mathbb{R}$ не ≥ 2 (не может быть больше
 $0/3 1$). Заметим, $VCdim \leq 2$, то на

$C = \{x, y, z\}$ $x < y < z$ монотонно ограничены $(1, 0, 1)$:
 $h_{a,b}(x) = 1 \Rightarrow a \leq x$, $h_{a,b}(z) = 1 \Rightarrow z \leq b \Rightarrow a \leq y \leq b \Rightarrow$
 $\Rightarrow h_{a,b}(y) = 1$:

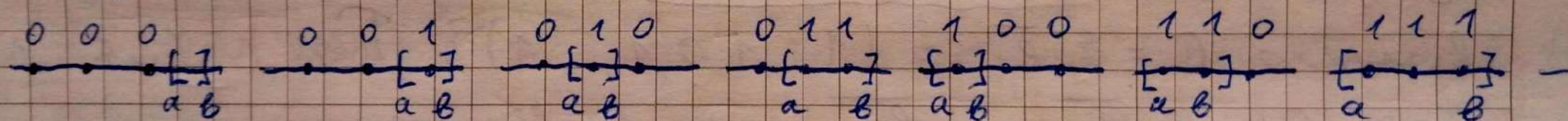


Рассмотрим теперь м. в. интервалов z_i знаков:

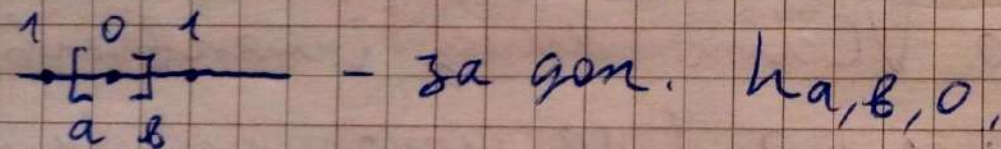
$$\mathcal{H} := \left\{ h_{a,b,1} : x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases} \right\} \cup \left\{ h_{a,b,0} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in [a,b] \\ 1, & x \notin [a,b] \end{cases} \right\} \quad a \leq b$$

Найдем $VCdim(\mathcal{H})$.

Нужно все 3 доказать, $VCdim(\mathcal{H}) \geq 3$, То на $C = \{x, y, z\}$,
 $x < y < z$ можно ограничить 8 вариантами!



Ах напиме, за генератором $h_{a,b,1}$, i

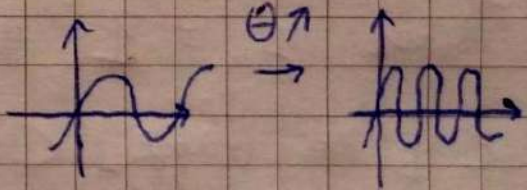


Але $VCdim(\mathcal{H}) \leq 3$: Если $|C| = 4$, можно $C = \{x, y, z, w\}$,

$x < y < z < w$. Можі перемешувати отриманні $(1, 0, 1, 0)$: $\nexists$ маха h , можі, як раніше, $h(x) = 1, h(y) = 0, h(z) = 1$ означає, що $h \neq h_{a,b,1}$ для кожного a, b , можна може бути лише $h = h_{a,b,0}$. Але можі $h(y) = 0 \Rightarrow a \leq y, h(w) = 0 \Rightarrow w \leq b$, тому $a \leq z \leq b \Rightarrow h(z) = 0 \nmid$.

5. Доведемо Впр. з лемми: для $\mathcal{H} = \{x \mapsto \lceil \sin \theta x \rceil\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ на $\mathbb{R}$ (де вважаємо $\lceil -1 \rceil = 0$) $\text{VCdim}(\mathcal{H}) = \infty$.

Потім $h(x) = \begin{cases} 1, & \sin \theta x > 0 \\ 0, & \sin \theta x \leq 0 \end{cases}$. Треба довести, що $\forall d \in \mathbb{N} \exists C \subseteq \mathbb{R} : |C| = d$ і $\mathcal{H}$ розділяє C .

Збільшена θ зменшує період $\sin \theta x$:  Тому можна припустити, що θ великий. Будемо шукати для $\theta = \pi 2^n$.

$h(x) = 1 \Leftrightarrow \sin \pi 2^n x > 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \pi 2^n x \in (2\pi k, 2\pi k + \pi)$, тобто $\frac{k}{2^{n-1}} < x < \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$;

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sin \pi 2^n x \leq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}. \pi 2^n x \in [2\pi k + \pi, 2\pi k + 2\pi]$,
тоді $\frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq x \leq \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}$.

З іншого боку, нехай x — довільний ссн. Записує має вигляд $x = x_m \cdot 2^m + \dots + x_1 \cdot 2 + x_0 + \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{4} + \dots + \frac{y_n}{2^n} + \dots + \frac{y_l}{2^l}$ (обмеженість ссн означає, що $y_l = 1$ (для $l > n$)).

Позначимо $x_i, y_i \in \{0, 1\}$ при цьому $y_l = 1$ (для $l > n$). Приведемо до сп. знак:

$$x = \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{y_n}{2^n} + \frac{y_{n+1}}{2^{n+1}} + \dots + \frac{y_l}{2^l}.$$

При $y_n = 0$ $y_l > \frac{k}{2^{n-1}} \leq \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^l} < \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} =$
 $= \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$, тоді $h(x) = 1$,

При $y_n = 1$ $y_l \geq \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^l} <$
 $< [\text{як вище}] < \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}$, тоді $h(x) = 0$.

Після чого, щоб отримати $h(x) = 1$ при $\theta = \pi^n$, потрібно x з 0 на n -мому місці після коми (і 1 десь далі), а решту

$h(x) = 0$ - з 1. Тому C можна побудувати так: записано усі попр. знач. d -їм, тобто d -та $\{0, 1\}^d$ побудовано як стовпчик n -ї $d \times 2^d$:

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 2^{d-1} & 2^d \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ d \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Нехай h повинна приймати на $C_1, \dots, C_d$ знач. з інвертованою n -тою стовпчика, $n = \overline{1, 2^d}$, тобто $(0, \dots, 0)$ для $n = 2^d$, $(0, \dots, 0, 1)$ для $n = 2^d - 1, \dots, (1, \dots, 1)$ для $n = 1$. Покладемо $C_i \in (0, 1)$ - число, знач. двійкового запису якого після коми - це i -тий рядок n -ї. Тоді $h(C_i)$ для $\theta = \pi 2^n$ - це, як було показано вище, $1 - x_{in}$ (де $C_i = 0, x_{i1}, \dots, x_{i2^d}$) - інвертований i -тий d -т n -ї, x_{in} та n поперібно.

Наприклад, при $n = 1$ $\sin(\pi x) > 0$ для $x = C_i$, $i = \overline{1, d}$, отже $h(C_i) = 1 \ \forall i$, при $n = 2$ $\sin^2(\pi x) > 0$ для $x = C_1, \dots, C_{d-1}$, бо

Вони $\in (0, \frac{1}{4})$ і $\sin 4\pi C_d < 0$, до $C_d \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, оскільки
в прийм. зн. $(1, \dots, 1, 0)$ etc. Також $C = \{C_i\}_{i=1}^d$ —

вектор. нростає.

2) / 3 (на оцінку) Розглянемо ще один клас булевих ф-цій на $\{0,1\}^d$ - функції парності (parity functions): для довільної підмножини $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, d\}$ (де $i_1 < \dots < i_k$; k тут не фіксоване, а довільне big o of d)

$$h_I(x_1, \dots, x_d) := (x_{i_1} + \dots + x_{i_k}) \bmod 2,$$

тобто застосовуємо до $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ бінарну функцію (XOR). Зокрема, сюди входить постійна 0 (для $I = \emptyset$), але не постійна 1.

Знайти $VCdim(\mathcal{H})$ для $\mathcal{H} = \{h_I\}_{I \subset \overline{1,d}}$ (точне значення).