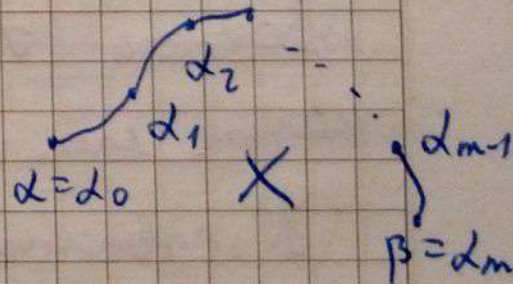


9/3.1. Повторно означена лін. зв'язності смм. при зв
нози, практично (особливо може не можна дати її для визн. АСК).

def. Смм. при-р (X, A) зв. * координатною лін. зв'язності,

Якщо $\forall$ вершин α, β мн. A (можливо $[\alpha], [\beta] \in A$) $\exists$ ребра
 $[\alpha, \alpha_1], [\alpha_1, \alpha_2], \dots, [\alpha_{m-1}, \beta] \in A$.



Тоді ап-по до компоненти лін. зв. мн. пр-ру:

дов. Компонентною комбінацією лін. зв-ти снмн. пр-ру
 (X, A) зветься максимальний за (снмн.) включенням
 снмн. підпростір $(Y, B) \subset (X, A)$, що є комбінаційно
 лін. зв'язним.

Тобто (Y, B) - комб. лін. зв. і $\forall$ комб. лін. зв. $(Z, C) \subset (X, A)$

Якщо $(Y, B) \subset (Z, C)$ - ^{сильн.} підпр., то $(Y, B) = (Z, C)$.

При цьому (Y, B) канд. лін. зв. $\Rightarrow Y$ лін. зв.

Дійсно, $\forall x, y \in Y$ лежать в якомусь сечі.

B^1, B^2 відп. тупан. B . З'єднаємо їх з якимсь

верш. z , B відп. цих симплексів (напр., образом евід. відп. у
станд. симплексі), і z з B послідовністю ребер з лев.

Потім добудуємо цих симплексів - маємо, що $z' \in \text{сечі}$ x y .

Зокрема, $\forall$ канд. канд. лін. зв. (X, A) міститься у якому
канд. лін. зв.

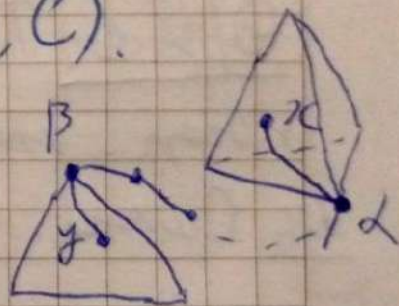
У навпаки, нехай Y лін. зв. Покажемо, що (Y, B) канд. лін.
зв. $\forall$ туп. B $\nRightarrow$ це не так для деякої B : $\exists$ верш. z і

B , що не можна поєднати ланц. ребер. Тоді вершиною

B розп. на (принаймні) два маси: $\{B^0_\beta\}_{\beta \in B_0} = \{B^0_\beta\}_{\beta \in B_0^1} \cup$

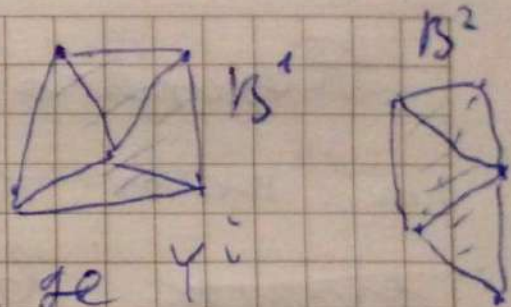
$\cup \{B^0_\beta\}_{\beta \in B_0^2}$, і кожен з симплексів з верш. з першою

масою $\nRightarrow$ інші й діють: $\cup \{z\}_{\beta \in B_0^2}$... Якщо вважати, що вершини $\forall \beta \in B_0^2$ не мають.



класу не перет. з ^{неспрот.} симплексом з другого.

Але тоді $B = B^1 \sqcup B^2$, і реалізацію
фігм. АСК можна побудувати як $Y^1 \sqcup Y^2$, де Y^i
має тр. B^i . Тоді $Y \cong Y^1 \sqcup Y^2$ невід'язний $\downarrow$.



Нехай тепер Y - комп. лін. зв. X . Тоді $B = \{B \in A \mid B \subset Y\}$ -
трианг. Y . Дійсно, об'єктами ^{Y-ліній.} симп. $B \subset Y$, і $\forall x \in Y$
 $\exists$ симп. $B \in A$: $x \in B \Rightarrow [B \text{ лін. зв.}] \Rightarrow B \subset Y \Rightarrow B \in B$, тобто
 Y деп. узору об'єкт. За побудовою, воно задов. лев. трианг.
Тобто (Y, B) - симп. пр-р. Це комп. коад. лін. зв.: він коад.
лін. зв. за доведенням, і $\forall$ коад. лін. зв. $(Z, C) \supset (Y, B)$
 Z - лін. зв. за дов. $\Rightarrow Z = Y \Rightarrow C = B$.

Сол. Компоненти коад. лін. зв. (X, A) збігаються (як
ідентичність) з цим комп. лін. зв.

Тому далі говоримо просто про комп. лін. зв., але
використовуємо комбінаторне означення.

Покажем, що $\forall G$ (ад. гр. коэф.) $H_0(X, G) \cong G^m$, де m - кільк. конн. лін. зв. X . Зокрема, при $G = \mathbb{Z}$ це означає $b_0 = m$, а при $G = \mathbb{K}$ - поле - $\dim H_0(X, \mathbb{K}) = m$. Будемо вважати як у випадку $m = 1$ раніше.

Як показано вище, можемо розбити множину вершин (триангл.) X у групу об. $\bigsqcup_{i=1}^m \{x_{ij}\}_{j=0}^{n_i}$ (зім'я загалом, $\bigsqcup_{i=1}^m \{x_{ij}\}_{j \in \Gamma_i}$, але далі усі суми скінч., тому можемо WLOG вважати, що їх скінч. кільк.), де усі x_{ij} для фікс. i - вершини i -тої конн. лін. зв. X . Подбудуємо $\varphi: H_0(X, G) \rightarrow G^m$: $\sum_{\substack{i=1, m \\ j=0, n_i}} g_{ij} x_{ij} + B_0(X, G) \mapsto \left(\sum_{j=0}^{n_1} g_{1j}, \dots, \sum_{j=0}^{n_m} g_{mj} \right) \in G^m$.

Коректність: $\sum g_{ij} x_{ij} + B_0(X, G) = \sum g'_{ij} x_{ij} + B_0(X, G) \Leftrightarrow \sum (g_{ij} - g'_{ij}) x_{ij} \in B_0(X, G) \Leftrightarrow \exists$ ланцюг з ребер X , що від

где ∂_1 переводит $\sum (g_{ij} - g'_{ij}) d_{ij}$. Аре bin менс
 разлагается в сумму лапласов, ~~а~~ ребра конечно $\exists$ i i -той зв. конн.

$$\sum (g_{ij} - g'_{ij}) d_{ij} = \partial_1 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{L_i} h_{ie} [d_{ie0}, d_{ie1}] \right) \Rightarrow [\text{lin. зв.}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall i = \overline{1, m} \quad \sum_{j=0}^{L_i} (g_{ij} d_{ij} - g'_{ij} d_{ij}) = \partial_1 \left(\sum_{j=0}^{L_i} h_{ie} [d_{ie0}, d_{ie1}] \right), \text{ где зв. } i$$

i справа - ~~ребра~~ вершины и ребра i -той конн. Потому,

как раньше, $\sum_j g_{ij} = \sum_j g'_{ij} \quad \forall i$. Тогда ∂_1 превращает

так же. Значит: $\forall (g_1, \dots, g_m) \in G^m \quad \varphi \left(\sum_{i=1}^m g_i d_{i0} + B_0(X, G) \right) =$

$= (g_1, \dots, g_m)$. Напротив, из: $\sum_{j=0}^{L_i} g_{ij} d_{ij} + B_0(X, G) \in \text{Ker } \varphi$

следует, что $\forall i \quad \sum_{j=0}^{L_i} g_{ij} = 0$. Тогда просто повторимо $\forall$

i i -й зв. конн. $m=1$, так как ставим конн.

лин. зв. i -той конн.: $\forall i \quad \sum_{j=0}^{L_i} g_{ij} d_{ij} \in B_0(X, G) \Rightarrow$

$\sum_{i,j} g_{ij} \alpha_{ij} \in B_0(X, G)$, что и требовалось.

Л/З. 2. — Показано, что многообразие $S^n (= \mathbb{D}^{n+1})$ представимо S^n как поверхность $(n+1)$ -вм. симплекса, B^{n+1} тогда об'единяет n -вм. граней, а $\mathbb{D}^{n+1}$ — как весь симплекс. Если B^{n+1} нае верш. $\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}$. Тогда $\forall$ аб. гр. $G \quad \forall k = \overline{0, n}$ (то $n+1$ у верш. $\mathbb{D}^{n+1}$)

$$C_k(X, G) = \left\{ \sum_{i_0 < \dots < i_k} g_{i_0 \dots i_k} [\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_k}] \right\} \cong G^{C_{n+2}^{k+1}},$$

и 0 для остальных k .

Получено сначала ент. хар. S^n . Если $G = \mathbb{Z}$:

$$\chi(S^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \text{rank } C_k(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{n+2}^{k+1} = \begin{bmatrix} l := k+1, \\ (-1)^k = -(-1)^l \end{bmatrix} =$$

$$= - \sum_{l=1}^{n+1} (-1)^l C_{n+2}^l = 1 + (-1)^n - \sum_{l=0}^{n+2} (-1)^l C_{n+2}^l = \begin{bmatrix} \text{det } \Delta_{\text{diag}} \\ \text{попер.} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 + (-1)^n + (1-1)^{n+2} = 1 + (-1)^n = \begin{bmatrix} 2, & n \text{ нечетное,} \\ 0, & n \text{ четное} \end{bmatrix}.$$

Збиген $\chi(\mathbb{D}^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+2}^{k+1} = \chi(S^n) + (-1)^{n+1} = 1.$

Дати виваємо $G = \mathbb{K}$ - поле (губ. левий або нирк. глв S^n париме). Тоді, зокрема $C_k(X, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{C_{n+2}^{k+1}}$ (глв $\text{figr. } k$), і $H_k(X, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{C_{n+2}^{k+1} - \text{rank } \partial_k - \text{rank } \partial_{k+1}}$. Тим

∂_k - ран. виграш. B^{n+1} , що менш $\in$ мінімуми, і виваємо $\partial_{n+1} = 0$ глв S^n . Коротави $\in$ наступне:

Рн $\text{rank } \partial_k = C_{n+2}^{k+1} - C_{n+2}^{k+2} + \dots + (-1)^{n+1-k} C_{n+2}^{n+2} \quad (\equiv)$

Тим можемо проговорити: оск., як встановили вище при одч. X , $\sum_{l=0}^{n+2} (-1)^l C_{n+2}^l = 0$,

$(\equiv) C_{n+2}^k - C_{n+2}^{k-1} + \dots + (-1)^k C_{n+2}^0 = [\text{власн.} \text{ } \partial_{n+1-k}] = C_{n+2}^{n+2-k} - C_{n+2}^{n+3-k} + \dots + (-1)^k C_{n+2}^{n+2} = \text{rank } \partial_{n+1-k}.$

$= (n+1) - (n+1-k)$

Ке все виваємо $\forall k = \overline{1, n}$, зокр. $\text{rank } \partial_1 = \text{rank } \partial_n = C_{n+2}^{n+1} - C_{n+2}^{n+2} =$

$= n+2-1 = n+1$. Тоді $H_0(X, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{C_{n+2}^0 - \text{rank } \partial_1 - \text{rank } \partial_0^0}$
 $= \mathbb{K}^{n+2-(n+1)-0} = \mathbb{K}$ як і повинно бути за попереднього.
 Загалом, для сфери $H_n(S^n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{C_{n+2}^{n+1} - \text{rank } \partial_n - \text{rank } \partial_{n+1}}$
 $= \mathbb{K}^{n+2-(n+1)-0} = \mathbb{K}$. Для $\mathbb{D}^{n+1}$ $\text{rank } \partial_{n+1} = 1$ (чому?),

отже $H_{n+1}(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{K}) \cong Z_{n+1}(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{K}) = \ker \partial_{n+1} = 0$, і
 $H_n(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n+2-(n+1)-1} = 0$. Напевно, $\forall k = 1, n-1$
 $\dim H_k(X, \mathbb{K}) = C_{n+2}^{k+1} - \text{rank } \partial_k - \text{rank } \partial_{k+1} = C_{n+2}^{k+1} - (C_{n+2}^{k+1} - C_{n+2}^{k+2} + \dots + (-1)^{n+1-k} C_{n+2}^{n+2}) - (C_{n+2}^{k+2} - \dots + (-1)^{n-k} C_{n+2}^{n+2}) = 0$!

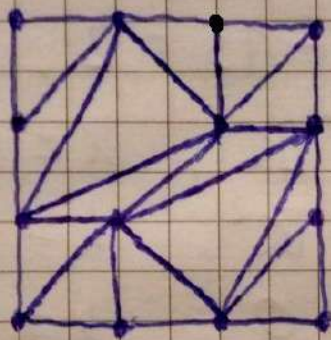
$H_k(X, \mathbb{K}) = 0$. Тоді,

$$H_k(X, \mathbb{K}) \cong \begin{cases} \mathbb{K}, & k=0 \vee (k=n \vee X=S^n) \\ 0 & \text{в усіх інших випадках} \end{cases}$$

Це, звичайно, дає нам $X(S^n) \cong X(\mathbb{D}^{n+1})$.

Саме це Рн можна довести за інш. : наприклад, порів-
 нявши матриці ∂_k і ∂_{k-1} або одна з них вивести.

$-T^2$: Можна показати, що найменша можлива кільк.
вершин триангуляції — 7. Вона може бути, на-
приклад, такою: (також ця тр. має найменшу
можливу кільк. граней).



Зокрема, ейл. хар.: $\chi(T^2) = 7 - 21 + 14 = 0$, як і потрібно.
Комбінаторно це повний граф з 7 вершинами: кожна з'єд-
нана з 6 іншими. Тому для з коеф. з полі $\mathbb{K}$ можна
обчислити як раніше для S^2 :

— обчислити ∂_2 і переконатися, що $\dim H_2(T^2, \mathbb{K}) =$
 $= \dim Z_2(T^2, \mathbb{K}) = \dim \ker \partial_2 = 1 \Rightarrow \text{rank } \partial_2 = \dim C_2(T^2,$
 $\mathbb{K}) - \dim \ker \partial_2 = 14 - 1 = 13,$

— використати відомий факт $H_0(T^2, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$, бо
 T^2 (ліа.) зв'язний. Отже, $1 = \dim H_0(T^2, \mathbb{K}) =$

$$= \dim C_0(T^2, \mathbb{K}) - \text{rank } \partial_1 = 7 - \text{rank } \partial_1 \Rightarrow \text{rank } \partial_1 = 6.$$

— Напротив, очевидно $\dim H_1(T^2, \mathbb{K}) = \dim C_1(T^2, \mathbb{K}) -$

$$- \text{rank } \partial_1 - \text{rank } \partial_2 = 21 - 6 - 13 = 2.$$

т.к.,

$$H_k(T^2, \mathbb{K}) \cong \begin{cases} \mathbb{K}, & k = 0, 2; \\ \mathbb{K}^2, & k = 1; \\ 0, & k \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

Зокр., знову $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0.$