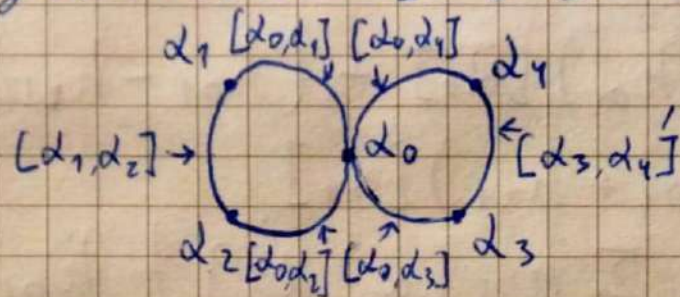


Зад. 1. Дана, рассмотрено $S^1 \vee S^1$ как симп. нр-нр Z инвариантно



можно как

$$X = (S^1 \vee S^1, \{[x_0], [x_1], [x_2], [x_3], [x_4], [x_0, x_1], [x_0, x_2], [x_1, x_2], [x_0, x_3], [x_0, x_4], [x_3, x_4]\})$$

Она, является симп. нр-нр.

$\forall$ ад. нр. G :

$$C_k(X, G) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=0}^4 g_i [x_i] \mid g_i \in G \right\} \cong G^5, & k=0 \\ \left\{ h_{01}[x_0, x_1] + h_{02}[x_0, x_2] + h_{12}[x_1, x_2] + h_{03}[x_0, x_3] + h_{04}[x_0, x_4] + h_{34}[x_3, x_4] \mid h_{ij} \in G \right\} \cong G^6, & k=1 \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases}$$

Значит дв., если $\partial_k = 0$ нрн $k \neq 1$, и

$$\partial_1 \left(\sum h_{ij} [x_i, x_j] \right) = \sum h_{ij} \partial_1 [x_i, x_j] = \sum h_{ij} ([x_j] - [x_i]) \equiv 0,$$

где нрн (i, j) принимают значения $(0, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 3), (0, 4), (3, 4)$.

Приведем запись:

$$\cong - (h_{01} + h_{02} + h_{03} + h_{04}) [d_0] + (h_{01} - h_{12}) [d_1] + (h_{02} + h_{12}) [d_2] + (h_{03} - h_{34}) [d_3] + (h_{04} + h_{34}) [d_4].$$

Поскольку $Z_1(X, G) = \left\{ \sum h_{ij} [d_i, d_j] \mid h_{01} + h_{02} + h_{03} + h_{04} = h_{01} - h_{12} = h_{02} + h_{12} = h_{03} - h_{34} = h_{04} + h_{34} = 0 \right\} \cong$

где 5 уравнений связывают h и Z : $h_{01} = h_{12} = -h_{02}$ и $h_{03} = h_{34} = -h_{04}$, тогда

$$\cong \{ h_1 ([d_0, d_1] - [d_0, d_2] + [d_1, d_2]) + h_2 ([d_0, d_3] - [d_0, d_4] + [d_3, d_4]) \mid h_1, h_2 \in G \} \cong G^2,$$

и $B_0(X, G) = \partial_1(C_1(X, G)) = \{ \sum h_{ij} ([d_j] - [d_i]) \mid h_{ij} \in G \}$, лемма $Z_k B_k = 0$. Поскольку $H_k(X, G) = 0$ при $k \neq 0, 2$ и $H_1(X, G) = Z_1(X, G) / B_1(X, G) \cong Z_1(X, G) \cong G^2$.

Покажем, что $H_0(X, G) = Z_0(X, G) / B_0(X, G) = [\partial_0 = 0] = C_0(X, G) / B_0(X, G) \cong G$.

Как известно, аналог S^1 (групп. маневр зам. оператор маневр):

известно $\varphi: H_0(X, G) \rightarrow G : \sum_{i=0}^4 g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) \mapsto \sum_{i=0}^4 g_i$.

Коректируем: $\sum_i g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) = \sum_i g'_i [\alpha_i] + B_0(X, G) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum (g_i - g'_i) [\alpha_i] \in B_0(X, G) \Leftrightarrow \exists \{h_{ij}\} \subset G : g_0 - g'_0 = -(h_{01} + h_{02} + h_{03} + h_{04}), g_1 - g'_1 = h_{01} - h_{12}, g_2 - g'_2 = h_{02} + h_{12}, g_3 - g'_3 = h_{03} - h_{34}, g_4 - g'_4 = h_{04} + h_{34} \Rightarrow \sum g_i - \sum g'_i = \sum (g_i - g'_i) = 0.$

Тогда видно — как проверить, верно: $\forall g \in G \quad g = \varphi(g[\alpha_0] + B_0(X, G))$,
 инт: $\sum_{i=0}^4 g_i [\alpha_i] \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \sum_{i=0}^4 g_i = 0 \Leftrightarrow g_0 = -\sum_{i=1}^4 g_i$.

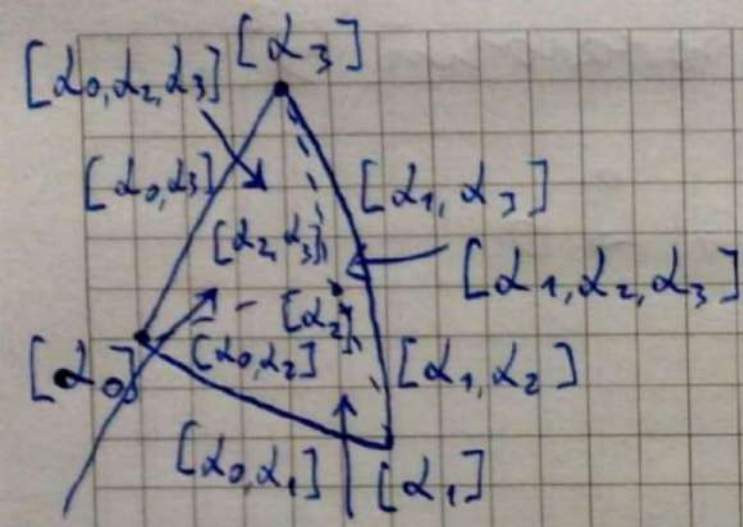
Получи $\sum_{i=0}^4 g_i [\alpha_i] = \sum_{i=1}^4 g_i ([\alpha_i] - [\alpha_0]) = \sum_{i=1}^4 g_i [\alpha_0, \alpha_i] \in B_0(X, G)$, поэтому $\sum_{i=0}^4 g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) = B_0(X, G)$.

Ит.ч., $H_k(X, G) \simeq \begin{cases} G^2, & k=1; \\ G, & k=0; \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases}$ Замеч., $H_k(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & k=1; \\ \mathbb{Z}, & k=0; \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases}$

more $b_k(S^1 V S^1) = \begin{cases} 2, & k=1; \\ 1, & k=0; \\ 0, & k \neq 0, 1, \end{cases}$: end. then $\chi(S^1 V S^1) =$

$= 1 - 2 + 0 - \dots = -1$. Also $\chi(S^1 V S^1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k \text{rank } C_k(S^1 V S^1) = 5 - 6 + 0 - \dots = -1$.

Известно, что g^2 :



Примеры

$$A = \{ [d_0], [d_1], [d_2], [d_3], [d_0, d_1], [d_0, d_2], [d_0, d_3], [d_1, d_2], [d_1, d_3], [d_2, d_3], [d_0, d_1, d_2], [d_0, d_1, d_3], [d_0, d_2, d_3], [d_1, d_2, d_3] \},$$

групп. чисел. μ -р X . $\forall$ ад. гр. G !

$$C_k(X, G) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=0}^3 v_i [d_i] \mid v_i \in G \right\} \simeq G^4, & k=0; \\ \left\{ \sum_{0 \leq i < j \leq 3} e_{ij} [d_i, d_j] \mid e_{ij} \in G \right\} \simeq G^6, & k=1; \\ \left\{ \sum_{0 \leq i < j < k \leq 3} f_{ijk} [d_i, d_j, d_k] \mid f_{ijk} \in G \right\} \simeq G^4, & k=2; \\ 0, & k \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

разрешения комплекса має вигляд

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} C_2(X, G) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X, G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, G) \xrightarrow{0} 0,$$

$\begin{smallmatrix} 12 \\ G^4 \end{smallmatrix}$

$\begin{smallmatrix} 12 \\ G^6 \end{smallmatrix}$

$\begin{smallmatrix} 12 \\ G^4 \end{smallmatrix}$

можна $\partial_k = 0$ при $k \neq 0, 1$. За доб.,

$$\partial_1 \left(\sum_{i < j} e_{ij} [d_i, d_j] \right) = \sum e_{ij} ([d_j] - [d_i]),$$

$$\partial_2 \left(\sum_{i < j < k} f_{ijk} [d_i, d_j, d_k] \right) = \sum f_{ijk} ([\hat{d}_i, d_j, d_k] - [d_i, \hat{d}_j, d_k] +$$

$$+ [d_i, d_j, \hat{d}_k]) = \sum f_{ijk} ([d_j, d_k] - [d_i, d_k] + [d_i, d_j]) =$$

$$= f_{012} ([d_1, d_2] - [d_0, d_2] + [d_0, d_1]) + f_{013} ([d_1, d_3] - [d_0, d_3] + [d_0, d_1]) +$$

$$+ f_{023} ([d_2, d_3] - [d_0, d_3] + [d_0, d_2]) + f_{123} ([d_2, d_3] - [d_1, d_3] + [d_1, d_2]) =$$

$$= (f_{012} + f_{013}) [d_0, d_1] + (-f_{012} + f_{023}) [d_0, d_2] + (-f_{013} + f_{023}) [d_0, d_3] +$$

$$+ (f_{012} + f_{123}) [d_1, d_2] + (f_{013} - f_{123}) [d_1, d_3] + (f_{023} + f_{123}) [d_2, d_3].$$

$$y_e = 0 \Leftrightarrow f_{012} = -f_{013} = f_{023} = -f_{123}. \quad \text{Пл. 4.},$$

$$H_2(X, G) = Z_2(X, G) / B_2(X, G) \cong \left[\begin{array}{l} \partial_3 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow B_2(X, G) = 0 \end{array} \right] \cong Z_2(X, G) =$$

$$= \{ f([x_0, x_1, x_2] - [x_0, x_1, x_3] + [x_0, x_2, x_3] - [x_1, x_2, x_3]) \mid f \in G \} \cong$$

$$\cong G.$$

$H_0(X, G) \cong G$ доводиться так само, як і інших прип. (зв. також задачу гомі), $H_k(X, G) = 0$ при $k \neq 0, 1, 2$, тому залишилося з'ясувати H_1 .

1 спосіб правильне, коли G - поле (наприклад, $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$ для простого p). Тоді $\forall k$ $C_k(X, G) \in$ вект.

г-мод на G : $h \cdot (\sum g_i \sigma_i^k) = \sum h g_i \sigma_i^k \quad \forall h \in G$,
і всі аксіоми вик. За побудовою, усі ∂_k моді

dimenzi, a $\dim H_k(X, G) = \dim Z_k(X, G) - \dim B_k(X, G) =$
 $= \dim \text{Ker } \partial_k - \dim \text{Im } \partial_{k+1} (= \dim \text{Coker } \partial_{k+1})$
($\uparrow$ fixat. y Z_k)

B gauray bunagay $\dim \text{Im } \partial_2 = \dim C_2(X, G) - \dim \text{Ker } \partial_2 =$
 $= 4 - 1 = 3$, a $\dim \text{Ker } \partial_1 = \dim C_1(X, G) - \dim \text{Im } \partial_1 =$
 $= 6 - \dim B_0(X, G) = 6 + \dim H_0(X, G) - \dim Z_0(X, G) = [H_0(X, G) \cong G]:$
 $= 6 + 1 - \dim C_0(X, G) = 6 + 1 - 4 = 3$. Maray $\dim H_1(X, G) = 0$,
 modmo $H_1(X, G) = 0$.

2 cnoai Pomancemo Jeynoceneyno, mo $H_1(X, G) = 0$, modmo
 $\text{Im } \partial_2 = B_1(X, G) = Z_1(X, G) = \text{Ker } \partial_1$, max mo ye firno $\forall G$.
 C bnee E , jo ye lany. konnleks (i nebanco perebirame
 Jeynoc.). Pomancemo $\supset$: nexai $\sum_{i < j} e_{ij} [\alpha_i, \alpha_j] \in Z_1(X, G)$,
 modmo $0 = \sum_{i < j} e_{ij} ([\alpha_j] - [\alpha_i]) = e_{01} ([\alpha_1] - [\alpha_0]) + e_{02} ([\alpha_2] - [\alpha_0]) +$
 $+ e_{03} ([\alpha_3] - [\alpha_0]) + e_{12} ([\alpha_2] - [\alpha_1]) + e_{13} ([\alpha_3] - [\alpha_1]) + e_{23} ([\alpha_3] - [\alpha_2])$.
 Trybegemo nojidni:

$$\begin{cases} -l_{01} - l_{02} - l_{03} = 0 \\ l_{01} - l_{12} - l_{13} = 0 \\ l_{02} + l_{12} - l_{23} = 0 \\ l_{03} + l_{13} + l_{23} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_{01} = l_{12} + l_{13} \\ l_{02} = -l_{12} + l_{23} \\ l_{03} = -l_{13} - l_{23} \end{cases}$$

Тогда з базиса ∂_2 следует, что $\sum_{i < j} l_{ij} [d_i, d_j] =$
 $= \partial_2 (l_{12} [d_0, d_1, d_2] + l_{13} [d_0, d_1, d_3] + l_{23} [d_0, d_2, d_3]) \in$
 $\in B_1(X, G)$, что и требовалось. Т.ч.,

$$H_k(X, G) \simeq \begin{cases} G, & k=0, 2; \\ 0, & k \neq 0, 2; \end{cases} \text{ экв. } H_k(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, 2; \\ 0, & k \neq 0, 2; \end{cases}$$

$$\text{матр. } b_k(S^2) = \begin{cases} 1, & k=0, 2; \\ 0, & k \neq 0, 2; \end{cases} \Rightarrow \chi(S^2) = 1 - 0 + 1 - 0 + \dots = 2.$$

$$\text{Аналогично з матриц. : } \chi(S^2) = 4 - 6 + 4 - 0 + \dots = 2.$$

Д/З 3. Изобразить матриц. $\mathbb{D}^3$, задав ему непер. матриц.

S^2 представить $[d_0, d_1, d_2, d_3]$. Тогда $B := \mathcal{A} \cup \{[d_0, d_1, d_2, d_3]\}$,

$i(\mathbb{D}^3, B)$ - current. рп-м, матриц $(S^2, \mathcal{A})$ - current.

норм. $(\mathbb{D}^3, B)$, с тем можно, что 2-базисный

дискретно, $\simeq$

висновок. Тому $H_k(\mathbb{D}^3, G) \stackrel{\downarrow}{=} H_k(S^2, G)$ при $k \leq 1$, і, згідно, $H_k(\mathbb{D}^3, G) = 0$ при $k \geq 4$, бо $C_k(\mathbb{D}^3, G) = 0$. Тому знайдемо H_2 і H_3 ($\forall G$):

$C_3(\mathbb{D}^3, G) = \{g[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \mid g \in G\} \simeq G$, і $C_k(\mathbb{D}^3, G) = C_k(S^2, G)$ для інших k ; за def.,

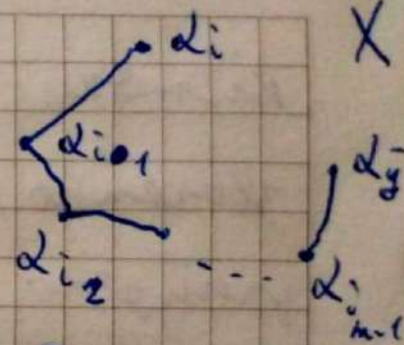
$\partial_3(g[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]) = g \sum_{i=0}^3 (-1)^i [\hat{\alpha}_i, \dots] = g[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] - g[\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3] + g[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3] - g[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$.

Тому $Z_3(\mathbb{D}^3, G) = \text{Ker } \partial_3 = 0 \Rightarrow H_3(\mathbb{D}^3, G) = 0$, і $B_2(\mathbb{D}^3, G) = \text{Im } \partial_3 = [\text{оскільки } Z_2(S^2, G) = \text{Ker } \partial_2 = Z_2(\mathbb{D}^3, G) \text{ вимір } 1] = Z_2(\mathbb{D}^3, G) \Rightarrow H_2(\mathbb{D}^3, G) = 0$. Тому гіпотеза за поперед. завданням

$H_k(\mathbb{D}^3, G) \simeq \begin{cases} G, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \simeq H_k(\{x\}, G) \quad \forall G$, як і необхідно було.

1. Показати, що якщо (X, A) "сильнішим іск. зв'язним", тобто $\forall$ двох вершин A α_i та $\alpha_j \in A$ існує $[\alpha_i, \alpha_j]_1$, то

$[d_{i_0}, d_{i_1}], \dots, [d_{i_{m-1}}, d_{i_m}] \in A$ (use $\in \Rightarrow X$ in. зб'яжнн), то $\forall$ ад. гр. G $H_0(X, G) \cong G$.



Добудемо як раніше: визначимо $\varphi: H_0(X, G) \rightarrow G$:

$\sum_i g_i [d_i] + B_0(X, G) \mapsto \sum_i g_i \in G$. Тимчасово $\partial_0 = 0 \Rightarrow Z_0(X, G) = C_0(X, G) = \{ \sum_i g_i [d_i] \mid g_i \in G, |\{i \mid g_i \neq 0\}| < \infty \}$, d_i - верш. A .

(i може бути з множ. індексів зов. поточності, але, оскільки ми можемо скінч. кільк. $g_i \neq 0$, гаді будемо писати $\sum_{i=0}^n g_i [d_i]$; зокрема $\sum_{i=0}^n g_i \in G$ визн.). Коректність:

$$\sum_i g_i [d_i] + B_0(X, G) = \sum_i g'_i [d_i] + B_0(X, G) \Leftrightarrow \sum_i (g_i - g'_i) [d_i] \in B_0(X, G) \Leftrightarrow$$

$\exists$ скінч. множини ребер $\{[d_{j_0}, d_{j_1}]\}_{j=0}^k$ і коеф. $\{h_j\}_{j=0}^k \in G$:

$$\sum_{i=1}^n (g_i - g'_i) [d_i] = \partial_1 \left(\sum_{j=0}^k h_j [d_{j_0}, d_{j_1}] \right) = \sum_j h_j ([d_{j_1}] - [d_{j_0}]).$$

Тимчасово $\sum_{i=1}^n (g_i - g'_i)$ - це сума коеф. цього ланцюга $k_0 - k_0 + k_1 -$

$$h_1 + \dots + h_k - h_k = 0, \text{ тогда } \sum_i g_i = \sum_i g_i'$$

$$\begin{aligned} & \text{Тождество как зависимость: } \varphi \left(\left(\sum_i g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) \right) + \right. \\ & \left. + \left(\sum_i g_i' [\alpha_i] + B_0(X, G) \right) \right) = \varphi \left(\left(\sum_i g_i [\alpha_i] + \sum_i g_i' [\alpha_i] \right) + B_0(X, G) \right) = \\ & = \varphi \left(\sum_i (g_i + g_i') [\alpha_i] + B_0(X, G) \right) = \sum_i (g_i + g_i') = \sum_i g_i + \sum_i g_i' = \varphi \left(\sum_i g_i \right. \\ & \left. [\alpha_i] + B_0(X, G) \right) + \varphi \left(\sum_i g_i' [\alpha_i] + B_0(X, G) \right). \end{aligned}$$

$$\text{гип: } \forall g \in G \quad g = \varphi \left(g [\alpha_0] + B_0(X, G) \right).$$

$$\text{имп: } \sum_{i=0}^n g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \text{~~гип. не выполняется~~}$$

$$\text{~~тогда не выполняется~~ } \sum_{i=0}^n g_i = 0, \text{ тогда } g_0 = -\sum_{i=1}^n g_i. \text{ Тогда}$$

$$\sum_{i=0}^n g_i [\alpha_i] = -\sum_{i=1}^n g_i [\alpha_0] + \sum_{i=1}^n g_i [\alpha_i] = \sum_{i=1}^n g_i ([\alpha_i] - [\alpha_0]) \in$$

За каждое $\forall i = \overline{1, n} \exists$ некоторая цепочка $[\alpha_0, \alpha_{i_1}], [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}], \dots$

$$[\alpha_{i_{m_i-1}}, \alpha_i] \in R, i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n g_i ([\alpha_i] - [\alpha_{i_{m_i-1}}] + [\alpha_{i_{m_i-1}}] - \dots - [\alpha_{i_1}] + [\alpha_{i_1}] - [\alpha_0]) =$$

$$= \partial_1 \left(\sum_{i=1}^n g_i \left([\alpha_0, \alpha_{i-1}] + \dots + [\alpha_{i-m_i-1}, \alpha_i] \right) \right) \in B_0(X, G), \text{ тобто}$$

$$\sum_{i=0}^n g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) = B_0(X, G).$$

2. Побудувати ^{добре} згесь (за Лоре) покриття T^2 ,
 знати його перш і перевірити, що його реалізація $\sim T^2$.
 - Один з варіантів фігурати дов. у Ex.3.6. лекції.

D/3.1. Визначити "компоненти сикла. лік. зв'язності" сикла.
 гр-гу (X, A) , перевірити, що вони збіг. з конк. лік. зв. X
 та показати, що $\forall G \quad H_0(X, G) \cong G^m$, де m - кількість таких
 конк.

2. Спробувати порівнювати сикла. гомології (принаймні ціло-
 чисельні):

- $S^n : D^{n+1}$ для дов. n (перевірити, що $H_k(D^{n+1}) \cong H_k(\{x\})$)
- T^2 (спробувати знати який простіший приклад ^{добре} $\wedge$ або
 за Лоре покриття). Обчислити ел. хар.