

Нехай $\dim M = 2$, $T - (2,1)$ -тензор $\neq p \in M$, у коорд. (x^1, x^2) всі його компоненти $T_{ij}^k = 1$.

- чи буде T симетричним або косиметричним?

Питання на звороті $T(v, w) = T(w, v)$ або $-T(w, v)$ для $T: T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M \Leftrightarrow T_{ij}^k = T_{ji}^k$ ($= -T_{ji}^k$) $\forall i, j, k = 1, 2$
(бо $T(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, w^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = v^i w^j T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$).

Повідно симетричний, не косиметричний.

- Нехай $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$ - лок. коорд. в околі $p: \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

~~Вопрос~~ Знайти $\tilde{T}_{12}^1$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 5 \cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{12}^1 &= T_{ij}^k \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^2} = T_{11}^1 \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} + T_{12}^1 \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} + \\ &+ T_{21}^1 \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} + T_{22}^1 \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} + T_{11}^2 \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} + T_{12}^2 \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} + \\ &+ T_{21}^2 \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} + T_{22}^2 \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot (-5) \cdot \\ &(-1) + 1 \cdot 2 \cdot (-5) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-5) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-5) \cdot 2 = -6. \end{aligned}$$

Д/З Знайти $\tilde{T}_{21}^1$ і переконатися, що $\tilde{T}_{21}^1 = \tilde{T}_{12}^1$.

Нехай $A - (1,1)$ -тенз. поле на M , i, j в. поля X, Y

$$N(X, Y) = A^2([X, Y]) - A([A(X), Y]) - A([X, A(Y)]) + [A(X), A(Y)]$$

- Показать, что N - $(2, 1)$ -мн. н.н.

Доказать, $\forall$ левых X, Y, Z и φ -линейных f, g на M :

$$\begin{aligned} N(fX + gY, Z) &= A^2([fX + gY, Z]) - A([A(fX + gY), Z]) - \\ &- A([fX + gY, A(Z)]) + [A(fX + gY), A(Z)] = \left[\begin{array}{l} \text{брак} \\ \text{с } [1, 1], A \cdot (1, 1)\text{-м.н.} \end{array} \right] = \\ &= A^2(f[X, Z] - Z(f)X + g[Y, Z] - Z(g)Y) - A([fA(X) + \\ &+ gA(Y), Z]) - A(f[X, A(Z)] - A(Z)(f)X + g[Y, A(Z)] - \\ &- A(Z)(g)Y) + [fA(X) + gA(Y), A(Z)] = \underline{f A^2([X, Z])} - \cancel{Z(f) A^2(X)} + \\ &+ \underline{g A^2([Y, Z])} - \cancel{Z(g) A^2(Y)} - \cancel{f A([A(X), Z])} + \cancel{Z(f) A^2(X)} - \\ &- \underline{g A([A(Y), Z])} + \cancel{Z(g) A^2(Y)} - \cancel{f A([X, A(Z)])} + \cancel{A(Z)(f) A(X)} - \\ &\bullet - \underline{g A([Y, A(Z)])} + \cancel{A(Z)(g) A(Y)} + \underline{f [A(X), A(Z)]} - \cancel{A(Z)(f) A(X)} + \\ &+ \underline{g [A(Y), A(Z)]} - \cancel{A(Z)(g) A(Y)} = \underline{f N(X, Z)} + \underline{g N(Y, Z)}, \end{aligned}$$

и аналогично для правого аргумента.

- $N \in \mathcal{N}$ симметричный или кососимметричный?

$$\begin{aligned} \forall X, Y \quad N(Y, X) &= A^2([Y, X]) - A([A(Y), X]) - A([Y, A(X)]) + \\ &+ [A(Y), A(X)] = -A^2([X, Y]) + A([X, A(Y)]) + A([A(X), Y]) - \\ &- [A(X), A(Y)] = -N(X, Y). \quad \text{Кососимметричный.} \end{aligned}$$

Розглянемо векторні поля на $\mathbb{R}^4$: $X := y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial w}$, $Y_{(x,y,z,w)} := z \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z} - y \frac{\partial}{\partial w}$. Знайдемо $[X, Y]$.

$$[X, Y] = X(Y) \frac{\partial}{\partial x} + X(w) \frac{\partial}{\partial y} - X(x) \frac{\partial}{\partial z} - X(y) \frac{\partial}{\partial w} - \left(Y(y) \frac{\partial}{\partial x} - Y(x) \frac{\partial}{\partial y} + Y(w) \frac{\partial}{\partial z} - Y(z) \frac{\partial}{\partial w} \right) = w \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial w} - w \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} - x \frac{\partial}{\partial w} = 0.$$

Зауважимо, що ці поля точильні $\forall (x, y, z, w)$ до сфери з центром в 0 радіуса $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$ (поле $[X, Y]$ не може бути точильним до такої сфери, адже точильний розклад існує).

Прямые имеют вид $-Z = w \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} - x \frac{\partial}{\partial w}$,

X, Y, Z образуют базис касательного пространства 3-вещного сфера с центром в 0.

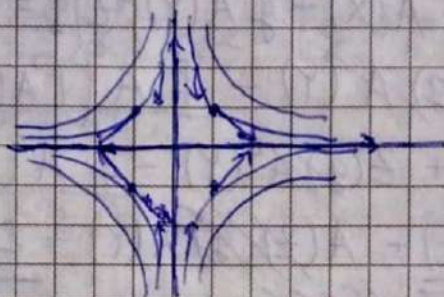
2)3. Найти $[Y, Z], [Z, X]$.

Найти интегральные траектории поля $X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^t \\ y = C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Поэтому $xy = C_1 C_2$



Найти первую фундаментальную форму S^n в E^{n+1} .

в стереографических координатах для $n=3$:

$$u_a = \frac{1}{(u^2+v^2+w^2+1)^2} (2(1-u^2+v^2+w^2), -4uv, -4uw, -4u)$$

$$u_v = \frac{1}{(u^2+v^2+w^2+1)^2} (-4uv, 2(1+u^2-v^2+w^2), -4vw, -4v)$$

$$u_w = \frac{1}{(u^2+v^2+w^2+1)^2} (-4uw, -4vw, 2(1+u^2+v^2-w^2), -4w)$$

Косинусы I формы:

$$g_{11} = \langle u_a, u_a \rangle = \frac{4}{(u^2+v^2+w^2+1)^4} ((1-u^2+v^2+w^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2w^2 + 4u^2) = \frac{4}{(u^2+v^2+w^2+1)^2}$$

$$g_{22} = \langle u_v, u_v \rangle = g_{11}$$

$$g_{33} = \langle u_w, u_w \rangle = g_{11}$$

$$g_{12} = \langle u_a, u_v \rangle = \frac{4}{(u^2+v^2+w^2+1)^4} (-2uv + 2u^3v - 2uv^3 - 2uvw^2 - 2uv - 2u^3v + 2uv^3 - 2uvw^2 + 4uvw^2 + 4uv) = 0$$

$$g_{13} = \langle u_a, u_w \rangle = 0$$

$$g_{23} = \langle u_v, u_w \rangle = 0$$

Отсюда, $g = \frac{4}{(u^2+v^2+w^2+1)^2} (du^2 + dv^2 + dw^2)$

Пошто S^3 лок. изоморфно еквивалентна E^3 (а стереопр.
пр. - лок. метр. екв-ство, то зберигає криви). Аліна для
 S^n .

Для гипер. проекции на $x^{n+1} > 0$:

$$\chi_{y^i} = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0, -\frac{y^i}{\sqrt{1-|y|^2}}),$$

$$g_{ii} = 1 + \frac{(y^i)^2}{1-|y|^2}$$

$$g_{ij} = \frac{y^i y^j}{1-|y|^2}, \quad i \neq j.$$

Поэтому $g = \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{(y^i)^2}{1-|y|^2}\right) dy^i{}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2y^i y^j}{1-|y|^2} dy^i dy^j$

$$= dy^1{}^2 + \dots + dy^n{}^2 + \frac{1}{1-|y|^2} (y^1 dy^1 + \dots + y^n dy^n)^2.$$

Для сферических коорд при $n=2$:

$$\chi_\varphi = (-\sin\varphi \cos\psi, -\sin\varphi \sin\psi, \cos\varphi)$$

$$\chi_\psi = (-\cos\varphi \sin\psi, \cos\varphi \cos\psi, 0)$$

$$g_{11} = \langle \chi_\varphi, \chi_\varphi \rangle = 1, \quad g_{12} = \langle \chi_\varphi, \chi_\psi \rangle = 0, \quad g_{22} = \langle \chi_\psi, \chi_\psi \rangle = \cos^2\varphi.$$

Пример 1 Записать аналог сфер. коорд. для $n=3$ и I ф. фр.

S^3 в них.

2. Проверить для любых пары л.к. с.к. тензорный закон перемб. для g_{ij} (хотя δ для одного индекса).