

Оскільки $\forall p \in U$ g_p год. визначена, n -ці G теж год. визначені, зокрема невідокресні. Позначимо $(g^{i\bar{j}})_{i,\bar{j}=1}^n = G^{-1}$ - коэф. оберненої n -ці, $g^{i\bar{j}} \in C^{k-1}(U)$. Показати, що матриця $g^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\bar{j}}}$ коректно задає (симетрична) $(k-1)$ -м.

$(0,2)$ -тензорне поле на M . Цей інваріант зветься метричним, що відповідає g . Як знайти значення цього поля біля 1-форми α, β на M ?

Далі $(M, g) \in (N, h)$ - ріманові k -м. многовиди ($k \geq 1$), $\dim M = \dim N = n$.

дев. k -диффеоморфізм $F: M \rightarrow N$ зветься ізометрією $(M, g) \in (N, h)$, якщо $\forall$ кусково n -многоу $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ $\ell_g(\gamma) = \ell_h(F \circ \gamma)$. Якщо F ізометрія $(M, g) \in (N, h)$, то вона зветься ізометричним.

лем. γ кусково k -м., F - k -м. $\Rightarrow F \circ \gamma$ куск. k -м. за дев.

визн. Ізометричність - відношення екв.-сті k -м. ріманових многовидів.

Рк. F - ізачетрїя $\Leftrightarrow F$ - к-диффеоморфізм і $F^*h = g$.

⊃ $\Leftarrow$. Аж-по властивості ч. довівати (це її частина, випадає, бо дифео-зм $F \in$ зануренням).

$\Rightarrow$. $\forall p \in M \quad \forall v \in T_p M$ нехай $\gamma \in C^k((- \epsilon, \epsilon), M) : \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v, \forall t \in (0, \epsilon)$ за умовою $\ell_g(\gamma|_{[0, t]}) = \ell_h(F \circ \gamma|_{[0, t]})$,

тоді

$$\begin{aligned} \int_0^t |\gamma'(\tau)|_g d\tau &= \int_0^t \sqrt{g_{\gamma(\tau)}(\gamma'(\tau), \gamma'(\tau))} d\tau = \int_0^t \sqrt{h_{F(\gamma(\tau))}(F_*\gamma'(\tau), F_*\gamma'(\tau))} d\tau = \\ &= \int_0^t \sqrt{(F_*\gamma'(\tau) = d_{\gamma(\tau)}F(\gamma'(\tau)), \text{ дов. } F^*)} d\tau = \int_0^t \sqrt{(F^*h)_{\gamma(\tau)}(\gamma'(\tau), \gamma'(\tau))} d\tau = \\ &= \int_0^t |\gamma'(\tau)|_{F^*h} d\tau. \end{aligned}$$

Продифференціюємо цю рівність за t у $t=0$:

$|v|_g = |v|_{F^*h}$, тоді $g_p(v, v) = (F^*h)_p(v, v)$. Оскільки це так $\forall v \in T_p M$ (а форми симетричні), $g_p = (F^*h)_p \quad \forall p$, тоді $g = F^*h$. Δ

Сл. Нехай g, h - рїм. м-ки на M . Тоді $g = h \Leftrightarrow \forall$ кр. зм. γ на M ,

$$\gamma: [a, b] \rightarrow M \quad \ell_g(\gamma) = \ell_h(\gamma).$$

⊃ Застосуємо поперед. Рк. до $F = \text{id}_M$: тоді мже $\ell_g(\gamma) = \ell_h(\gamma)$

$$\forall \gamma \Leftrightarrow g = id_M^* h = h. \triangle$$

Сол. F - ізометрія $\Leftrightarrow F$ - (k) -диффео-зм і $\forall p \in M$ $d_p F$ - ізометрія евклідових просторів $(T_p M, g_p) \subset (T_{F(p)} N, h_{F(p)})$.

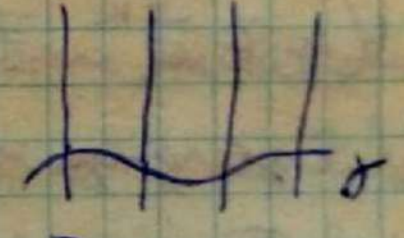
$$\Rightarrow \forall p \in M \quad g_p = (F^* h)_p \Leftrightarrow \forall v, w \in T_p M \quad g_p(v, w) = (F^* h)_p(v, w) = h_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(w)) \Leftrightarrow d_p F \text{ - ізометрія. } \triangle$$

Рем. Якщо F - диффео-зм, то $\forall p \in M$ в околах p і $F(p)$ $\exists$ карти такі, що локальне задання F - топосне відобр. (у цьому випадку говорять, що F задається локально рівністю координат).

Дійсно, нехай $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ - атлас M . Покл $\{(F(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F^{-1})\}_{\alpha \in A}$ - атлас з н. структур N (Важ.), і у парі відп. карт лок. задання F - це $\varphi_\alpha \circ F^{-1} \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$.

Рем. Якщо диффео-зм F локально задається рівністю коорд., то мовва $g = F^* h$ перетворюється на $g_{ij} = h_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, n}$ для коефіцієнтів g і h у відп. лок. координатах.

Ек. 1. Можна розглянути ізометрії (M, g) на собі. Вони утворюють групу з операцією композиції (Вип.). Ця група сама ця група є гладким многовидом (це Тн. Майерса-Стіюкса). Наприклад, для $(M, g) = E^n$ це афінні ізометрії $F(x) = Ax + b$, де $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, а для $(M, g) = S^n$ - об'єднані лінійні ізометрії E^{n+1} : $F(x) = Ax$, $A \in O(n+1)$ (Вип.).

2. Для T^n з прикладу вище або прямий циліндр у E^3 ($\gamma(u, v) = (f(u), g(u), v)$, де $\gamma = (f, g)$ - крива, паралелізована крива у E^2 : $\gamma_u = (f', g', 0)$, $\gamma_v = (0, 0, 1) \Rightarrow g_{11} =$ 
 $= \langle \gamma_u, \gamma_u \rangle = 1$, $g_{12} = \langle \gamma_u, \gamma_v \rangle = 0$, $g_{22} = \langle \gamma_v, \gamma_v \rangle = 1$, тобто $g = du^2 + dv^2$; звідси так можна ходити в поверхні в E^3 , що розгортається). Вони мають m -ки, що локально виглядають як m -ка E^n , але тому, звідси кожен, не ізометричний, то не дифеоморфні (справді, T^n або циліндр $S^1 \times \mathbb{R}$).

деф. Будемо говорити, що (M, g) локально ізометричний (N, h) , якщо $\forall p \in M \exists q \in N$ і відкриті $U \ni p, V \ni q$ такі, що $\exists$ ізометрія $F: (U, g|_U) \rightarrow (V, h|_V)$.

Рем. Це деф. несиметричне, але його можна зробити симетричним, вимагаючи того ж для точок N .

Якщо (M, g) лок. ізометричний E^n в сенсі цього деф. і, навпаки, оскільки (відкр.) $U \ni p \xrightarrow{\exists M}$ ізометричний відкр. $V \ni x$ в E^n , то $\forall y \in E^n \exists$ ізометрія $\Psi: E^n \rightarrow E^n$ така, що $x \mapsto y$, тоді V ізометрично переходить у відкр. $\Psi(V) \ni y$, що ізометрична U . Тому для цього випадку деф. виконується для усіх точок E^n автоматично (це так $\forall$ однорідного простору N , тобто такою, що $\forall$ точку можна перевести у будь-яку ізометрією $N \rightarrow N$, наприклад, для E^n, S^n, H^n - Вкр.). Якщо (M, g) лок. ізометричний E^n , його називають пласким.

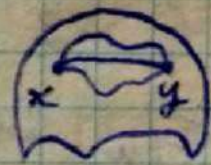
Есл. γ Есл.2. вище, якщо (U, φ) -карта M , γ який $g_{ij} = \delta_{ij}$,
то $\varphi : (U, g|_U) \rightarrow E^n$ - ізометрія.

Впр. Нехай $F: M \rightarrow N$ - k -гидро-зм. Показати, що $\exists \lambda \in C^{k-1}(M)$:

$F^*h = \lambda g \Leftrightarrow \forall k$ -м. ∇ кривих γ і μ у M , що пере-
тинаються у деякій $p \in M$ і для яких визначені $\angle_p(\gamma, \mu)$
вірно, що $\angle_p(\gamma, \mu) = \angle_{F(p)}(F \circ \gamma, F \circ \mu)$. γ звату випадку F
роз. конформною еквівалентністю (M, g) і (N, h) . Показати,
що конформ. екв-сті менш задають відношення екв-сті річково-
многовидів (слабше за ізометричність, бо згідно з крите-
рієм вище, ізометрії $\in$ конформ. екв-сті). Навести приклад
конформ. екв-сті, що не $\in$ ізометричності.

Простори з внутрішньою метрикою

Ідея: якщо є правило вивірювання
 довжин шляхів, що з'єднують дві
 точки, то можна визначити відстань між цими точками
 як інф таких довжин.



def. Класом функціональних шляхів у топологічному просторі
 X хвється клас множини Γ шляхів, тобто відображень
 вигляду $\gamma \in C([a, b], X)$ така, що:

0. Γ містить усі постійні шляхи $\gamma: [a, a] \rightarrow x \in X$.
1. $\gamma \in \Gamma, \gamma: [a, b] \rightarrow X \Rightarrow \forall [c, d] \subset [a, b] \quad \gamma|_{[c, d]} \in \Gamma$.
2. $\forall \gamma \in C([a, b], X)$ якщо $\exists c \in [a, b]$ таке, що $\gamma|_{[a, c]} \in \Gamma$ і
 $\gamma|_{[c, b]} \in \Gamma$, то $\gamma \in \Gamma$.
3. $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma: [a, b] \rightarrow X$ і $\forall$ лінійної бієкції $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$
 (тобто $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, де $\alpha \neq 0$) $\gamma \circ \varphi \in \Gamma$.

Рем. У випадку 2. будемо називати γ об'єднаними шляхами

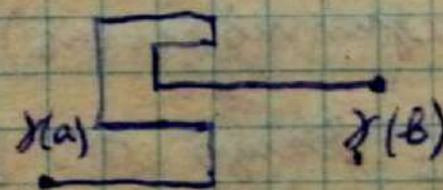
$\gamma_1 := \gamma|_{[a,c]}$ і $\gamma_2 := \gamma|_{[c,b]}$ і позначати $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ (як вище).
Ек. 0. γ і γ ~~шляхи~~ γ .

Ек. 1. $X = \mathbb{R}^n$, Γ - лінійно параметризовані  шляхи.

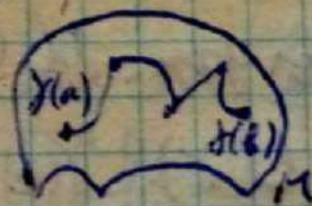
2. $X = \mathbb{R}^n$, Γ - кусково k -гладкі шляхи (містять попередній клас).

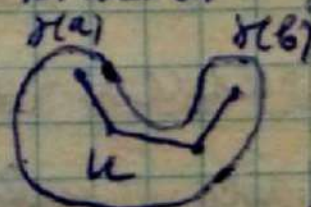


Рем. k -гладкі шляхи при $k \geq 1$ не складають класу гомотопних шляхів, бо не задовольняють 2.

3. $X = \mathbb{R}^n$, Γ - лінійно параметризовані шляхи,  шляхи, γ і γ ~~шляхи~~ γ паралельні осі координат (зв'язний клас з Ек. 1.)

4. $X = M$ - k -м. многовид, Γ - кусково k -м. шляхи ($k \geq 1$, при $k=0$ це просто всі шляхи).

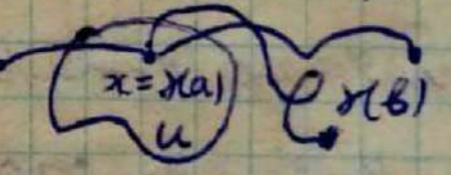


5. $X = U$ - підпростір простору ~~і~~ ~~і~~ ~~і~~ U з класом гомотопних шляхів Δ (на U - індукована топологія), 

$\Gamma := \{ \gamma \in \Delta \mid \gamma: [a,b] \rightarrow U \}$ - шляхи з Δ , що не виходять з U .

def. Клас Γ - клас функцій на X .

Функціонал заданий на Γ наз. $l: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,
 $\{x \geq 0\}$
що задовольняє умови:

1. $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma: [a, b] \rightarrow X$ функція $t \mapsto l(\gamma|_{[a, t]})$ неперервна на $[a, b]$ (якщо всі її значення скінченні).
2. Якщо $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \gamma = \gamma_1 * \gamma_2$, то $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ (адитивність).
3. Якщо $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ - лін. б'їж ($\varphi(t) = \alpha t + \beta, \alpha \neq 0$), то $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma: [a, b] \rightarrow X$ $l(\gamma \circ \varphi) = l(\gamma)$ (інваріантність). 
4. $\forall$ б'їж. $U \subset X \quad \forall x \in U$
 $\inf \{ l(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma, \gamma: [a, b] \rightarrow X, \gamma(a) = x, \gamma(b) \notin U \} > 0$.

Rem. Коректність у п. 1-3 забезпечена б'їж. пунктами у

def. класа функцій на X . У 2. використані очевидні
правила поводження з $+\infty$ (як у теорії міри): $C + \infty = +\infty$ і т.д.

Рем. Для непрерывных функций $\gamma: [a, a] \rightarrow x$ имеет
 $\gamma = \gamma * \gamma$, тогда $\underline{2.} \quad \ell(\gamma) = \ell(\gamma) + \ell(\gamma) \Rightarrow \ell(\gamma) = 0$.

Длины ломаных принадлежат сигма-алгебре измеримых для классов ген. функций:

Ек. 1. (ломані в $\mathbb{R}^n$). Нехай $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$ - розбиття
на проміжки лінійності ломаної $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\ell(\gamma) := \sum_{i=1}^m |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \quad (\text{де } |\cdot| - \text{евкл. норма на } \mathbb{R}^n)$$

Це евклідова довжина ломаної. 1-3 (навіть) очевидні,

4 4. $\inf_{k \geq 1} \ell(\gamma_k) \geq \varepsilon$, де $B_\varepsilon(x) \subset U$ - евкл. куля.



2. (к-м. в $\mathbb{R}^n$). $\ell(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ - менш евклідова довжина.

3. (ломані в $\mathbb{R}^n$ з ланками, що паралельні осей). Аж-но 1.

4. (к-м. в (M, g) , $k \geq 1$). $\ell(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$ - р-м. довжина.

5. $(X = U \cup V) \quad \ell|_U$, де ℓ - функц. довжини на Δ .

4 4. (зокрема в 2.) 1 випливає з власт. інтеграла Рімана,

2 і 3 - з сигн. властивостей ріманової довжини (3).

очевидно вірно і для нус. м. при лінійному P), 4. доведено
написе.

Впр. Перевірити властивості 1-4. у лс. 5.

def. Простором з внутрішньою метрикою (ПВМ, length space)
будемо називати трійку (X, Γ, ℓ) , де X - Т₀- топ. простір,
 Γ - клас гомеоморфізмів між X , ℓ - ф-л довжини на Γ .

def. Внутрішньою метрикою ПВМ (X, Γ, ℓ) наз. $d_\ell : X \times X \rightarrow$
 $\rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} : \forall x, y \in X$

$d_\ell(x, y) := \inf \{ \ell(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma, \gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y \},$

Rem. У таких випадках $(\gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y)$ будемо

говорити, що γ з'єднує x і y ($z \neq y$). $d_\ell(x, y) = +\infty$,

якщо або таких шляхів немає, або всі вони мають
довжину $+\infty$.

(тобто така, що може приймати знач.
 $+\infty$, з вим. позитивного пер-ості метрики)

Вн. d_ℓ - розширена метрика на X .

► $\forall x \in X$ постійний шлях $\gamma: [a, a] \rightarrow X: a \mapsto x$ належить до Γ в силу того власт. 0. і $\ell(\gamma) = 0$ в силу лем. вище. Оскільки γ з'єднує x з собою, за лев. $d_L(x, x) = 0$.

Нехай $x \neq y$. За аксіомою T_0 $\exists$ відкр. $U \ni x: y \notin U$ або $\exists$ відкр. $U \ni y: x \notin U$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати що виконає перше (для групової ак-но). За власт. 4. ф-ла $\ell C := \inf \{ \ell(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \text{ з'єднує } x \text{ і точку за межами } U \} > 0$. Оскільки $y \notin U$, за лев. маємо $d_L(x, y) \geq C > 0$ (бо d_L - $\inf$ меншої множини, ніж C). Отже, d_L невід'ємна.

Симетричність: нехай $\gamma \in \Gamma$ з'єднує x і $y: \gamma: [a, b] \rightarrow X$, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Маємо для $\bar{\gamma}(t) := \gamma(a+b-t)$ ($\bar{\gamma}: [a, b] \rightarrow X$) $\bar{\gamma} \in \Gamma$ і $\ell(\bar{\gamma}) = \ell(\gamma)$ в силу n-мів 3. з лев. Γ і ℓ відкр. Крім того $\bar{\gamma}(a) = \gamma(b) = y$, $\bar{\gamma}(b) = \gamma(a) = x$ - $\bar{\gamma}$ з'єднує y з x . І навпаки, якщо γ з'єднує y з x , то $\bar{\gamma} - x$ з y . Тому

$d_e(x, y) = d_e(y, x)$ - інверсна ознака і ми її не чакатимемо
 монотонну $\Rightarrow d_e(x, y) = d_e(y, x)$.

Керівництво трасування: $\forall x, y, z \in X \quad \forall$ шляхів $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$,
 де $\gamma_1: [a, b] \rightarrow X, \gamma_2: [c, d] \rightarrow X, \gamma_1(a) = x, \gamma_1(b) = \gamma_2(c) = y,$
 $\gamma_2(d) = z$ розглянемо $\tilde{\gamma}_2(t) := \gamma_2(t - b + c), \tilde{\gamma}_2: [b, d + b - c] \rightarrow X$.
 В курсі 3 з доб. $\Gamma \subset \mathcal{L}, \tilde{\gamma}_2 \in \Gamma \subset \mathcal{L}(\tilde{\gamma}_2) = \mathcal{L}(\gamma_2); \tilde{\gamma}_2$ з'єднує
 y і z (як і γ_2) і визначимо об'єднання $\gamma := \gamma_1 * \tilde{\gamma}_2, \gamma: [a,$
 $d + b - c] \rightarrow X$, що з'єднує x і z . В курсі н. 2 доб. $\Gamma \subset \mathcal{L}, \gamma \in \Gamma$, і

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\tilde{\gamma}_2) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

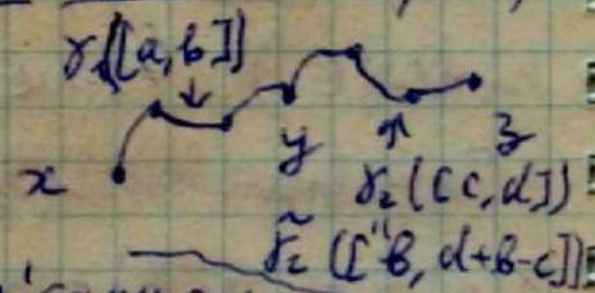
За доб. $d_e, d_e(x, z) \leq l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$

Теперішню го інф за y circa γ_1, γ_2 ($\exists \Gamma$, що з'єднує

x з y і y з z бигн.):

$$d_e(x, z) \leq d_e(x, y) + d_e(y, z).$$

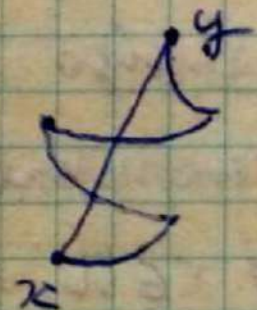
Бмн що буде, якщо озна з ~~бигн.~~ бигнати герівнос + 10? $\triangle$



Ех. 1. За порівняністю трикутника евід. n -ки,
інв евалідовах довгосап лананас, що з'єднують x і y
в $\mathbb{R}^n$ - це довгосап відрізна праной, що їх з'єднує,
тобто $d_e(x, y) = |x - y|$ - евід. метрика.

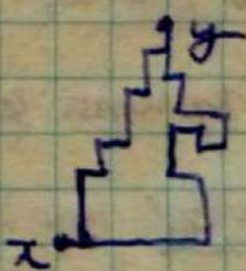


2. Для довільних кусково k -мадних шліхів, що
з'єднують x і y в $\mathbb{R}^n$ і їх евід. довгосап інв.



той сачан: $d_e(x, y) = |x - y|$ (тр. адо дов. нале про функціонали
довгосап, що порансєт метрикою).

3. Для лананас з ланкати $\parallel$ осан координат, що
з'єднують x і y в $\mathbb{R}^n$, і їх евід. довгосап, інв - це



$d_e(x, y) = \sum_{i=1}^n |x^i - y^i|$ (довгосап "~~манхеттен~~" ^{скадів}, де на коській ланці $\parallel O x_i$
координата x^i зависє або зависє спадє). d_e - це n -на
 d_1 (таксав, вулицна, манхеттенська), і сачнака више виниває
з порівнєстї тр-ка для d_1 і того, що довгосап ланка

латані з τ горіжко d_1 - bigmani minc i minyama (що
тут = свідовіт).

4 Річардові випадок розглянемо на жме.