

3. Абстрактні симпліційні та персистентні комплекси
G. Carlsson. Topology and Data.

-11- Topological Pattern Recognition for Point Cloud Data.

-11- , M. Vejdemo-Johansson. Topological Data Analysis with Applications.

Зауважимо, що при описанні симпл. комплексу X та граф. запису ми записували симплікси триангуляції Δ симпл. пр-гу X як впорядковані підмножини $[x_0, \dots, x_k]$ неперетинні вершини $\Delta \{x_i\}$ (або $X_0 = \{[x_i]\}$ - 0-вим. підмножина X), тобто працювали не з топологічним пр-ком X , а з деяким комбінаторним об'єктом. Визначимо його формально:
def. 3.1. Абстрактним симпліційним комплексом (АСК) звемося пару (V, Σ) , де V - неперетинна множина, а $\Sigma \subset 2^V$ - деяка

скупність скінченних неперервних підмножин V така, що $\forall B \in \Sigma$
 $\exists \emptyset \neq J \subset B$ підм. $J \in \Sigma$ (тобто $\forall$ підм. входить до Σ разом
з усіма її ^{неперервними} підмножинами). $(k+1)$ -елементна підм. $B \in \Sigma$, де
 $k \in \mathbb{Z}_+$, зветься k -випірним симплексом даною АСК, будо-
ва $(\ell+1)$ -елементна $J \subset B$ - ℓ -випірною гранню B , зокрема,
0-випірні грані (1-точк. підм., що ототожнюються з ел-тами
 V) - вершинами, 1-випірні - ребрами.

Ром. Зазвичай ототожнюють V з множиною усіх вершин
 (V, Σ) , прибираючи точки, що не $\in$ вершинами. $\left(\begin{smallmatrix} \text{Плуг}[\alpha_i] - \text{дуги} \\ \delta \ B_i^0 \end{smallmatrix} \right)$

Екз. 1. Як було зазначено, $\forall$ скінч. м.-р-у $(X, \mathcal{A})$, де мн-н.
 $\mathcal{A} = \{B_\alpha^k\}_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+ \\ \alpha \in A_k}}$, $\text{sign. } (V, \Sigma)$, де $V := X_0 = \{B_\alpha^0\}_{\alpha \in A_0} \xrightarrow{\text{bij}} A_0$ -
множина вершин $\mathcal{A}$, а Σ скл. з множин вершин усіх
 $B_\alpha^k \in \mathcal{A}$: симплексу $B_\alpha^k = [\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_k}] \text{ sign. } \{\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_k}\}$. Σ -
сук. непер. скінч. підм. V (що включає усі 1-точкові), і в
силу н. 2. лев. 2.5., (V, Σ) -АСК, при цьому Σ знах. у bij

Візн. з $\mathcal{A}$ п. 3. def 2.5. При цьому визнається очевидну
 властивість: $\forall$ дві підмножини з Σ або не перетинаються, або
 перет. по скінч. підмножині, що менш $\in \Sigma$ за п. 2. def
def 3.2. (V, Σ) , що описаний у поперед. Ex., зветься АСК, що
 визнається скінч. пр-ру $(X, \mathcal{A})$.

Поняття "камерізується" поняття АСК:

def 3.3. АСК (W, T) зв. підкомплексом АСК (V, Σ) , якщо
 $W \subseteq V$ і $T \subseteq \Sigma$ (тобто $\forall$ підм. W з T належить до Σ як
 підм. V). Відображення $f: V \rightarrow W$ зв. скінченним
 відобр. АСК (V, Σ) і (W, T) , якщо $\forall \sigma \in \Sigma: f(\sigma) \in T$ і
 $|\sigma| = |f(\sigma)|$ (тобто $f|_{\sigma}$ - із : k -випірні скінченні пере-
 ходять у k -випірні $\forall k \in \mathbb{N}_+$).

Ex 3.2. $\forall$ підкомплекса (W, T) у (V, Σ) включення $i: W \rightarrow V$,
 оч., скінченне; скінч. підпростором візн. підкомплекс.

Рем. Оск. монотонні відобр. і конт. скінч. - скінч. за

лев., отримуючи категорію. В силу лев. 2.12. ссилк. вибір $f: X \rightarrow Y$ ссилк. пр-рів $(X, \mathcal{A}) : (Y, \mathcal{B})$, визначає інжек. $f_*: V \rightarrow W$ для ссилк. АСК $(V, \Sigma) : (W, T)$: це просто обмеження f на вершини $\mathcal{A}$; і воно є ссилк. Карпати, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ і $(id_X)_* = id_V$:

Сол. 3.1. АСК грив. категорію, а функціональність мінс. ссилк. пр-рів та їх АСК (та мінс ссилк. вибір та інжек.) є ковариантним функтором.

Тл. 3.1.

Цей функтор можна отримати з наступного ссилк. $\forall$ АСК $(V, \Sigma) \exists$ ссилк. пр-р $(X, \mathcal{A}) : (V, \Sigma)$ йому функціональн., і $\forall$ ссилк. відображення АСК $(V, \Sigma) : (W, T)$ має вибір $f_*: V \rightarrow W$, де $f: X \rightarrow Y$ - ссилк. $(X, \mathcal{A}) : (Y, \mathcal{B})$ якщо ссилк. вибір (W, T) . При цьому, якщо ссилк. пр-рів ссилк. ізоморфні АСК (зокрема, одна й та ж ссилк.), то ці простори ссилк. ізоморфні, зокрема неізоморфні

як топ. простори.

Рем. Це пояснює, чому симп. пр-ри часто звучать симп. комплексами: вони вимірюють своє комбінаторно-структурно з точністю до гомеоморфізму.

def. 3.4. Якщо $ACK(V, \Sigma)$ фікс. симп. пр-ру $(X, \mathcal{A})$, то $(X, \mathcal{A})$ (або просто топ. пр-р X) звється (геометричною, топологічною) реалізацією (V, Σ) .

⇒ Див. [Katcher, p. 456-460].

Ідея доведення для симплексів V :

Нехай $V = \{\alpha_0, \dots, \alpha_m\}$, $y \in \mathbb{R}^{m+1}$ розр. станд. m -вип. симплекс σ^m маємо отримати оболонку точок $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$. $\forall \sigma = \{\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_k}\} \in \Sigma$ поставимо у фікс. оп. оболонку т. $(0, \dots, \underset{i_0}{1}, \dots, 0), \dots, (0, \dots, \underset{i_k}{1}, \dots, 0)$, що є k -вип. гранню σ^m . Це, нагадаємо, k -вип. евал. симплекс (станд. у $\overset{\text{rig}}{\vee}_{\text{пр-рі}} \{x \mid x^i = 0, i \neq i_0, \dots, i_k\}$ $i \in \text{перестановка значень } \overset{\text{rig}}{\vee}_{\text{пр-ру}} z \in \sigma^m$), звідси топологічний

y монотоні, що інг. з $\mathbb{R}^{m+1}$. Келан X - об'єднання цих симплексів
 для всіх $\sigma \in \Sigma$ з інг. монотоністю, а Π - сус. симплексів. Тоді
 (X, Π) - сінгл. п-р-р (поліедр). Дійсно, змова п. 1. def. 2.5. ви-
 кладає, що Π - скінченне замкнене покр. X (отже фундаменталь-
 не: $\forall A \subset X \quad \forall \sigma_2^k \in \Pi \quad A \cap \sigma_2^k$ замкн. для замкн. A , і
 $A = \bigcup_{k, \sigma_2^k} A \cap \sigma_2^k$ замкн. для замкн. $A \cap \sigma_2^k$ (в пок. σ_2^k , а отже і
 у $\mathbb{R}^{m+1}$, і у X) як сінгл. об'єднання замкн.), п. 2. Випливає
 з того, що (V, Σ) - АСК: $\forall$ грань $\forall$ симплекса Π , що sign.
 $\sigma \in \Sigma$, sign. підмембрани σ , що менш $\in \Sigma$, а отже належать до Π ,
 і $\forall$ два симплекси з Π , як опуклі оболонки, перет. по оп.
 Обертати перетинку простору їх вершин (монетиво, $\mathbb{Q}$), тобто
 (якщо $\neq \mathbb{Q}$) менш по симплексу Π . За побудовою, $(X, \Pi) \text{ sign. } (V, \Sigma)$,
 тобто це реалізація (V, Σ) . За $\forall$ сінгл. відобр. $(V, \Sigma) \rightarrow$
 (W, T) тоді побудуємо відобр. таких поліедрів наст. чином.
 Якщо $g: V \rightarrow W$ - це відобр., то $\forall \sigma = \{\alpha_{i0}, \dots, \alpha_{ik}\} \in \Sigma$

$g(\sigma) = \{g(x_{i_0}), \dots, g(x_{i_k})\} \in T$, і y_{i_0} y_{i_1} образи точок на н. рівні, тобто це $\{\beta_{j_0}, \dots, \beta_{j_k}\}$, де $W = \{\beta_j\}_{j=0}^n$. Тоді функ. f на bign. симплексі належна $\{\sum_{e=0}^k \lambda_e (0, \dots, 1, \dots, 0) = (0, \dots, \lambda_0, \dots, \lambda_k, \dots, 0) \mid \lambda_e \geq 0, \sum_{e=0}^k \lambda_e = 1\}$ наст. чинен: $f(0, \dots, \lambda_0, \dots, \lambda_k, \dots, 0) := (0, \dots, \lambda_0, \dots, \lambda_k, \dots, 0)$.
 $= (0, \dots, \lambda_0, \dots, \lambda_k, \dots, 0)$.

Впр. 3.1. f коректно визн. і неперервне. Як ω -адаптивна на V ω -ад. на образі, тобто ω -адаптивна.

За побудовою f - симпл. відобр. належить, і $f_* = f$.

Наявності, для V існують реалізації (Y, B) $ACK(V, \Sigma)$ (або ізоморфного до нього) констант $\sigma = \{x_{i_e}\}_{e=0}^k \in \Sigma \text{ bign.}$
 $\sigma_\alpha^k \in B$ - топ. симплекс з кан. відобр. $\varphi_\alpha^k: \sigma_\alpha^k \rightarrow Y$ (що, нехай, є вкладенням; σ_α^k топ-станд. k -визн. симплекс).

Тепер визначимо f на bign. симплексі (X, T) умовою

$$f(0, \dots, \lambda_0, \dots, \lambda_k, \dots, 0) := \varphi_\alpha^k(\lambda_0, \dots, \lambda_k).$$

Впр. 3.2. f кер. визначене $i \in$ симм. ізоморфізмом, зокр. гомеоморфізмом X на Y .

За транзитивності, моги $\bar{u} \in V$ дві реалізації симм. ізоморфії, зокр. гомеоморфії. $\triangle$

Рем. Тіпер ми можемо визначити симм. ланцюговий комплекс i симм. гомоморфії АСК (V, Σ) як комплекс i гомоморфії V його реалізації $(X, \mathcal{A})$: за "функціональністю" (Р. 1.8.) і Т. 3.1. вони визначені однозначно з точністю до ізоморфізму. Але дано явне означення, просто повторивши def. 2.6-8.

def. 3.5. Кесай (V, Σ) -АСК, де V лінійно впорядкована. Моги $\bar{u} \in V$ $B \in \Sigma$ впорядк. i має вигляд $\{\alpha_0, \dots, \alpha_k\}$, де $\alpha_0 < \dots < \alpha_k$ (це однозначно визначає, яким точкам B при індекс). Кесай G -довільна аб. група.

Представимо Σ у вигляді $\{B_x^k\}_{x \in \Gamma_k}^{k \in \mathbb{Z}_+}$, де $\{B_x^k\}_{x \in \Gamma_k}$ усі k -вим. симплекси ($(k+1)$ -лі підмнож. $V \underset{\text{мн}}{\subseteq} \Sigma$).

Для $k \in \mathbb{Z}_+$ k -вал. симп. ланцюжок (V, Σ) з коэф. з G названо k симп. форм. лін. комб. симплексів $\underbrace{\sigma_x^k}_{\text{з коэф. з } G}$, а множиною всіх таких ланцюжків — k -тою групою симп. ланцюжків (V, Σ) з коэф. з G (де стр. група визначена умовою $\sum_{x \in \Gamma_k} g_x \sigma_x^k + \sum_{x \in \Gamma_k} g'_x \sigma_x^k = \sum_{x \in \Gamma_k} (g_x + g'_x) \sigma_x^k$).

$$C_k((V, \Sigma), G) := \left\{ \sum_{x \in \Gamma_k} g_x \sigma_x^k \mid g_x \in G \ \forall x \in \Gamma_k, |\{x \in \Gamma_k \mid g_x \neq 0\}| < \infty \right\}.$$

Для $k \geq 1$ k -та границьна гомоморфізм (границею) (V, Σ) (з коэф. з G) зветься

$$\partial_k: C_k((V, \Sigma), G) \rightarrow C_{k-1}((V, \Sigma), G) : \sum_{x \in \Gamma_k} g_x \sigma_x^k \mapsto \sum_{x \in \Gamma_k} g_x \partial_k \sigma_x^k,$$

$$\text{де } \forall \sigma_x^k = \{\alpha_0, \dots, \alpha_k\}$$

$$\partial_k \{\alpha_0, \dots, \alpha_k\} := \sum_{i=0}^k (-1)^i \{\alpha_0, \hat{\alpha}_i, \alpha_k\},$$

де, як раніше, $\hat{\alpha}_i$ позначає пропуск вершини α_i , а "—" — запис sign. коефіцієнта g_x на $-g_x$.

Рл. 3.1. $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ $C_k((V, \Sigma), G)$ — абелева група. $\forall k \in \mathbb{N}$

∂ k -ком-зи груп $\forall k \geq 2$ $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, П.ч. $C_*(\langle V, \Sigma \rangle, G) :=$
 $= \{C_k(\langle V, \Sigma \rangle, G), \partial_k\}$ (де вважало $C_k = 0$ при $k < 0$;
 $\partial_k = 0$ при $k \leq 0$) - невід'ємний ланцюговий комплекс.

► Дослідно як для груп ланцюгів: границь сечел. гр-пу. Δ
def. 3.6. $C_*(\langle V, \Sigma \rangle, G)$ названо алгебраїчним сечел. комплексом
з коэф. з G , що відн. (V, Σ) . $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ його групи циклів
 $Z_k(\langle V, \Sigma \rangle, G) := Z_k(C_*(\langle V, \Sigma \rangle, G))$, границь $B_k(\langle V, \Sigma \rangle, G) := B_k(C_*$
 $(\langle V, \Sigma \rangle, G))$ і гомологій $H_k(\langle V, \Sigma \rangle, G) := H_k(C_*(\langle V, \Sigma \rangle, G)) =$
 $= Z_k(\langle V, \Sigma \rangle, G) / B_k(\langle V, \Sigma \rangle, G)$ зв. k -тами групамі циклів, границь і
гомологій (V, Σ) з коэф. з G відн.

Рем. Як і раніше, при $G = \mathbb{Z}$ група не вказується, Також
можемо визначити сечел. гомології (V, Σ) дослідно так
як для сечел. гр-рів.

Впр. 3.3. Перевірити, що існую вибору лін. порядку на
 V відповідає ізоморфний лань. комплекс, а отже ізоморфні

групи гомологій H^k (H^k групи коєф. G).

Лем. Нехай f визначає функтор: $\forall$ сист. відоб.

$f: V \rightarrow W$ АСК $(V, \Sigma) \rightarrow (W, T)$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ визначимо $(\forall G)$

$$f_k: C_k((V, \Sigma), G) \rightarrow C_k((W, T), G): \sum_{\sigma \in \Gamma_k} g_\sigma \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in \Gamma_k} g_\sigma f(\sigma).$$

л. 3.2. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ є морфізмом комплексів $C_*((V, \Sigma), G) \rightarrow$

$C_*((W, T), G)$, а відповідність $(V, \Sigma) \mapsto C_*((V, \Sigma), G)$,

$f \mapsto \{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ – коваріантним функтором з категорії

АСК у категорію ланц. комплексів. Зокрема, ізоморфизм

АСК відн. ізоморфні ланц. компл., а отже ізоморфні

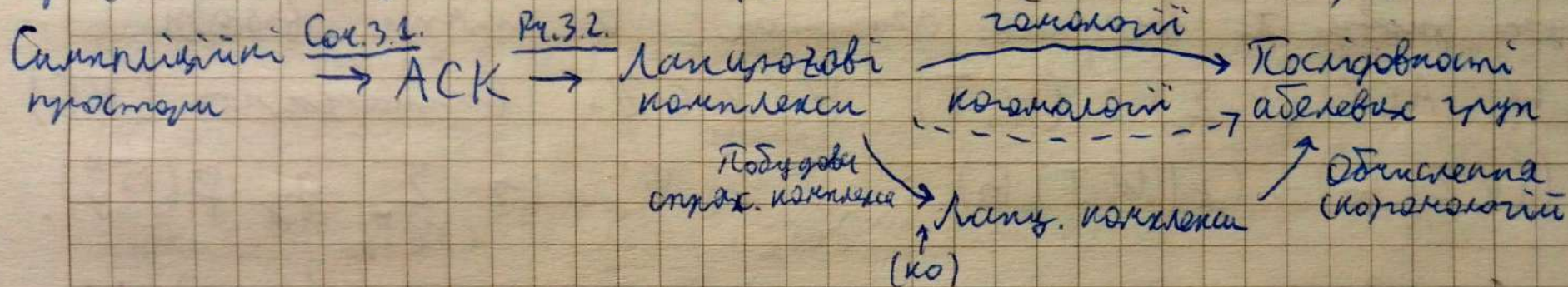
групи гомологій та когомологій H^k, G .

В Додатку як для сист. пр-рів. Δ

Лем. Нехай так само побудову гомологій (та когомологій)

можемо розглядати як композицію двох функторів.

Тоді перехід від симпл. пр-ру до його груп (ко)гомологій можна розкласти у ланк. з функторів (більш точно, 4 для коом.):



Розглянемо тепер приклади АСК, що початково будуються не за симпл. пр-рами:

Ек. 3.3. Нехай $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - відкрите покриття топ. пр-ру X (з неперервних функцій) його першим зветься $N\mathcal{U}$ - сукуп. скінченних підпокрытих $\mathcal{U}$, що визн. умовою

$$\{U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_k}\} \in N\mathcal{U} \Leftrightarrow U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k} \neq \emptyset$$

Оскільки тоді й будь-яка мінша сукупність перетинається, пара $(\mathcal{U}, N\mathcal{U})$ - це АСК, що такс називають первом $\mathcal{U}$.



def. 3.4. Покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ топ. пр-ру X звется локально скінченним, якщо $\forall x \in X \exists$ відкр. $U \ni x : |\{\alpha \in A \mid U \cap U_\alpha \neq \emptyset\}| < \infty$.
Товариство, що ^{покриває} $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ вписане в $\mathcal{U}$, якщо $\forall \beta \in B \exists \alpha \in A : V_\beta \subset U_\alpha$.
 X звется паракompактним, якщо у будь-яке його відкр. покриття можна вписати лок. скінч. відкр. підпокривання.

Ex. 3.4. Компактні простори паракompактні за def.
 Усі метричні пр-ри, зокрема мноровиди (ква. метр. з топологією), зокрема $\mathbb{R}^n$ паракompактні.

Th. 3.2. (Лере про перв). Нехай $\mathcal{U}$ - відкрите покриття топ. пр-ру X таке, що $\forall$ непорожній скінченний перетин ел-тів $\mathcal{U}$ стягнений (т.зв. добре (good) покриття). Нехай го тощо $\mathcal{U}$ скінченне або X паракompактний. Тоді X гомеоморфно еквівалентній реалізації перва $\mathcal{U}$.

▷ Див. [Katchen, p. 456-460]. $\triangle$

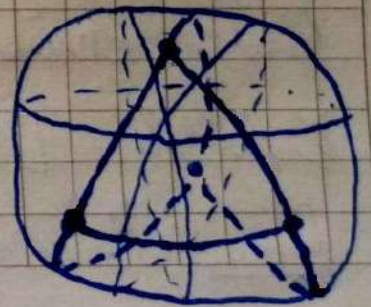
Rem. В світ Th. 3.1, тут неважливо, про яку саме

реалізацію ідеться. Тл. 3.2. дає, зокрема, достатні умови, за яких можна обчислити сингл. гомології X навіть якщо X не має стр. симпліційного пр-ру, тобто триангуляції: ми назвемо так сингл. гомології $\forall$ сингл. пр-ру, що мають етв. X , наприклад, реалізації перша доброго покриття. Коректність тут забезпечує Тл. 2.1.

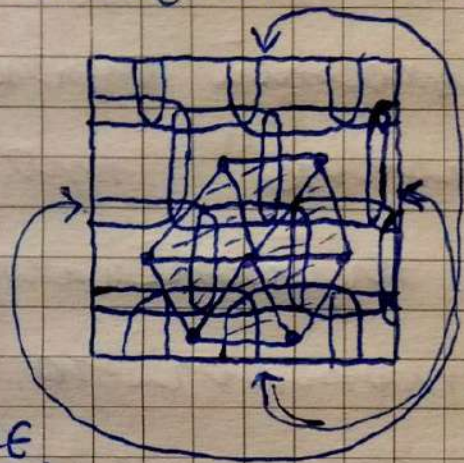
Ех. 3.5. При $n \geq 1$ покриття S^n множинами $S^n \setminus \{N\}$ і $S^n \setminus \{S\}$ (де, як завжди, $N = (0, \dots, 0, 1)$ і $S = (0, \dots, 0, -1)$ - полюси) не задов. умовам Тл. 3.2.: хоча ці множини й компактні, їхній перетин нестаціонарний ($\cong S^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq S^{n-1}$).



При $n=2$ добрим буде, наприклад, покриття, реалізацією перша якого є простір з Впр. 2.4. лемати (сфера як поверхня тетраедра), тому тв. теоремі Лебе очевидне: покр. сферичними дисками з центрами у вершинах правильного тетраедра й однакового радіуса такою, що кожен з перетинів двох, а усі 4 - ні.

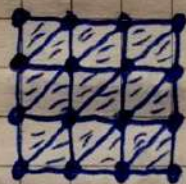


Ex. 3.6. Покрыття тора T^2 з фікр. мінимални, що зобр. нинше (де T^2 представлений як факторизація квадрата зі склеєними сторонами), є добрим:



(кожен ел-т перетинається з 6 сусідніми та утв. 6 перетинів по 3; усі ці перетини, вкл. з ел-тами покр., стійкі).

перв має
тою реалізацію



, де сторони квадрата ототожнюються так само. Це зображення T^2 , тому й тут мв. Th. 3.2. очевидне. Зокрема, можемо порахувати ейл. характеристику: $\chi(T^2) = V - E + F = 9 - 24 + 18 = 0$.

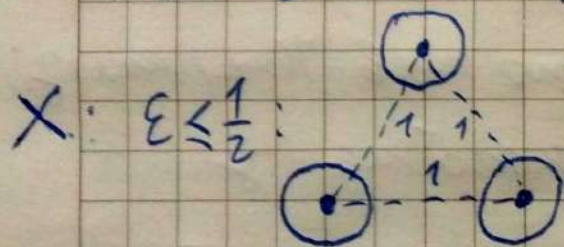
Впр. 3.7. Знайти добре покр. T^2 з меншою кільк. ел-тів та обчислити його симпл. гомології.

Рем. Дати будемо розглядати метр. пр-ри X . На практиці часто виникають простори $X \subset \mathbb{R}^m$ (з обмеженою евклідовою або якоюсь іншою метрикою) з великої кількості точок та для великих m (кількості ознак, features), але скінченні - т.зв. "хмари точок", про які ми можемо припустити, що вони є підпросторами (вибірками) якоїсь $Y \subset \mathbb{R}^m$ з неметризованою топологією. Щоб "наближитися" до топ. Y , потрібно описати топологію X , наприклад, за допомогою алгебро-топологічних інваріантів. При цьому метр. топологію X використовувати не можна: вона дискретна. Замість цього розглянемо реалізації деяких АСК, що пов'язані з X :

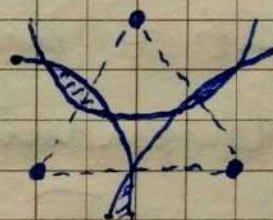
Ех. 3.7. Комплекс Чеха метричного простору (X, ρ) , що визн. числом $\varepsilon > 0$, - це перше покриття відкритими кривими $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$ радіусів ε з центрами в усіх точках X .

Покр. $\check{C}(X, \varepsilon)$.

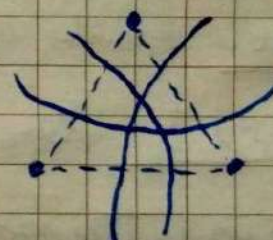
Наприклад, нехай X - триїтка вершин рівностороннього трикутника зі стороною 1 у евкл. площині:



$\frac{1}{2} < \varepsilon \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$:



$\varepsilon > \frac{\sqrt{3}}{3}$:



Реалізація.

$\check{C}(X, \varepsilon)$:



Рем. Часто накривають розглядають $\check{C}(A, \varepsilon)$ для підмножини

$A \subset X$. Для $X \subset \mathbb{R}^m$ перетини евкл. куль стянєні, бо

опуклі, але це ще не означає, що покр. з конструкції
комплекса Чека добре: кулі в X - це перетини евкл. куль з X ,
(зрештою, коли $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in A}$ - накр. покр. X , накриваю, для покр. S^2 з Ек.3.5.).

Еск.3.8. Комплекс Вісториса - Дінса метр. пр-ву (X, ρ) ,
що відн. числу $\varepsilon > 0$, - це пара (X, Σ_ε) , де Σ_ε - сукуп. всіх
скінченних непорожніх підмножин X діаметра $\leq \varepsilon$.

Скінченна $\mathcal{B} \in \Sigma_\varepsilon \Leftrightarrow \text{diam } \mathcal{B} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathcal{B} \rho(x, y) \leq \varepsilon$.

Ще АСК, то $\mathcal{B} \in \Sigma_\varepsilon \cap (\text{сінч.} \neq \emptyset) \Rightarrow \text{diam } \mathcal{B} \leq \varepsilon$. Позначасться ще $VR(X, \varepsilon)$.

Рем. Для цих комплексів є аналоги теореми про перв. Коприклад:

Th. 3.3. Нехай M - компактний рімановий многовид з внутрішньою метрикою. Тоді існує $E > 0$ таке, що $\forall 0 < \varepsilon \leq E$ реалізації $\check{C}(M, \varepsilon) \subset VR(M, \varepsilon)$ гомот. екв.-ні M . Крім того, $\forall 0 < \varepsilon \leq E$ існує скінченна $A \subset M$ така, що реалізація $\check{C}(A, \varepsilon)$ гомот. екв.-на M , і так само для комплексів B - $\mathcal{D}$. Рем. Прикладом такого $\check{C}(A, \varepsilon)$ знову ж є первпокр. ком. рім. $\tilde{S}^2$ Ex 3.5

Рем. Очевидно, $\forall A \subset X \quad \check{C}(A, \varepsilon) \subset \check{C}(X, \varepsilon) \subset VR(A, \varepsilon) \subset VR(X, \varepsilon)$ - підкомплекс. Крім цього:

Рм. 3.3. 1. $\forall$ метр. пр-гу $X, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon' \quad \check{C}(X, \varepsilon) \subset \check{C}(X, \varepsilon') \subset VR(X, \varepsilon) \subset VR(X, \varepsilon')$ - підкомплекс.

З. $\forall$ метр. пр-ру X і $\varepsilon > 0$ $\check{C}(X, \varepsilon) \subset VR(X, 2\varepsilon)$ – підкомпакт. і $\forall \varepsilon' > \varepsilon$ $VR(X, \varepsilon) \subset \check{C}(X, \varepsilon')$ – підкомпакт.

Реш. Путь і галі виваємо $\check{C}(X, \varepsilon) = (X, NU_\varepsilon)$, де $\{x_0, \dots, x_k\} \in NU_\varepsilon \Leftrightarrow \bigcap_{i=0}^k B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$, тобто існують центри. Тому всі АСК з умови мають одну і ту саму мн. вершини X .

Д. 1. Дійсно, оск. $B_\varepsilon(x_i) \subset B_{\varepsilon'}(x_i) \forall i$ і позн. як вище, $\bigcap_{i=0}^k B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=0}^k B_{\varepsilon'}(x_i) \neq \emptyset$, тому $NU_\varepsilon \subset NU_{\varepsilon'}$, отже $\check{C}(X, \varepsilon) - \text{підкомпакт. у } \check{C}(X, \varepsilon')$ і $\forall \sigma \in \Sigma_\varepsilon \text{ diam } \sigma \leq \varepsilon \leq \varepsilon' \Rightarrow \sigma \in \Sigma_{\varepsilon'}$, тому $VR(X, \varepsilon) - \text{підкомпакт. у } VR(X, \varepsilon')$.

З. Якщо $\{x_i\}_{i=0}^k \in NU_\varepsilon$, то, зокрема $\forall i, j = 0, k \exists y \in B_\varepsilon(x_i) \cap B_\varepsilon(x_j) \neq \emptyset$, тому за нер-сно трикутника $\rho(x_i, x_j) \leq \rho(x_i, y) + \rho(y, x_j) < 2\varepsilon$, тому $\{x_i\}_{i=0}^k \in \Sigma_{2\varepsilon}$. Тл.ч., дійсно $\check{C}(X, \varepsilon) - \text{підкомпакт. у } VR(X, 2\varepsilon)$.

Кожані терен $\{x_i\}_{i=0}^k \in \Sigma_\varepsilon$. Також, зокрема, $d(x_0, x_i) \leq \varepsilon < \varepsilon'$
 $\forall i = \overline{1, n}$ (i для $i=0$, звичайно, мене), тому $x_0 \in \bigcap_{i=0}^k B_\varepsilon(x_i)$,
 тобто цей терен $\neq \emptyset \Rightarrow \{x_i\}_{i=0}^k \in N' \mathcal{U}_\varepsilon$. Тому дійсно
 $VR(X, \varepsilon) - \text{підклас. } \checkmark \checkmark (X, \varepsilon')$. $\triangle$

Зокрема, п. 1. мотивує наступне означення:

def. 3.8. Персистентним (persistent) об'єктом деякої категорії
 $\mathcal{C}$ будемо називати сім'ю об'єктів $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{C}$
 разом з набором морфізмів $\{f_{\varepsilon\varepsilon'} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X_\varepsilon, X_{\varepsilon'})\}_{\varepsilon \leq \varepsilon' \in \mathbb{R}}$
 таких, що

$$- f_{\varepsilon\varepsilon} = \text{id}_{X_\varepsilon} \quad \forall \varepsilon;$$

$$- f_{\varepsilon\varepsilon''} = f_{\varepsilon'\varepsilon''} \circ f_{\varepsilon\varepsilon'} \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon' \leq \varepsilon''.$$

Рем. Зокрема, персистентними можуть бути групи (зокр.
 абелеві), вект. пр-ри, топ. пр-ри (зокр. симпліційні), АСК,
 ламу комплексів, посл. (аб.) групи ...

Ех. 3.9. В силу л. 1. Рч. 3.3., $\{\check{C}(X, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ и $\{VR(X, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ є персидентивними АСК $\forall X$ (де можна вважати $\check{C}(X, \varepsilon) = VR(X, \varepsilon) = [X, \{\{x\}\}_{x \in X}] \forall \varepsilon \leq 0$ за побх.).
 При цьому морфізми з перс. означення - це просто
 виключення підкомплексів $i_{\varepsilon\varepsilon'}: \check{C}(X, \varepsilon) \rightarrow \check{C}(X, \varepsilon')$ та $i_{\varepsilon\varepsilon'}: VR(X, \varepsilon) \rightarrow VR(X, \varepsilon')$ (що на $X \in \text{топоспаци}$), що умож-
 еч. виконати.

Рем. Якщо тепер $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ - ков. функтор, то $\forall$
 перс. $\{X_\varepsilon\}$ у $\mathcal{C}$ (з позн. дов. 3.8.) розглянемо $\{F(X_\varepsilon)\} \subset$
 $\subset \text{Ob } \mathcal{D}$: $F(f_{\varepsilon\varepsilon'}) \forall \varepsilon \leq \varepsilon'$: за означ. функтора, $F(f_{\varepsilon\varepsilon'}) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}$
 $(F(X_\varepsilon), F(X_{\varepsilon'}))$, $F(f_{\varepsilon\varepsilon}) = F(\text{id}_{X_\varepsilon}) = \text{id}_{F(X_\varepsilon)} \forall \varepsilon$: $F(f_{\varepsilon\varepsilon''}) =$
 $= F(f_{\varepsilon'\varepsilon''} \circ f_{\varepsilon\varepsilon'}) = F(f_{\varepsilon'\varepsilon''}) \circ F(f_{\varepsilon\varepsilon'}) \forall \varepsilon \leq \varepsilon' \leq \varepsilon''$. Отже,

Сол. 3.2. $\forall$ ков. ф-ра $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ і перс. об'єкта
 $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ у $\mathcal{C}$ $\{F(X_\varepsilon)\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ разом з $\{F(f_{\varepsilon\varepsilon'})\}_{\varepsilon \leq \varepsilon' \in \mathbb{R}}$ є перс.

об'єктам y ①.

Рез. Тл.ч., користуючися ков. ф-лами, що були описані
вище, за $\forall$ персистентним АСК (наприклад, $\{\check{C}(x, \varepsilon)\}$
або $\{VR(x, \varepsilon)\}$ для метр. пр-гу X) можна побудувати
перс. лану. комплекс і потім перс. послідовності
груп співвідітних гомологій.