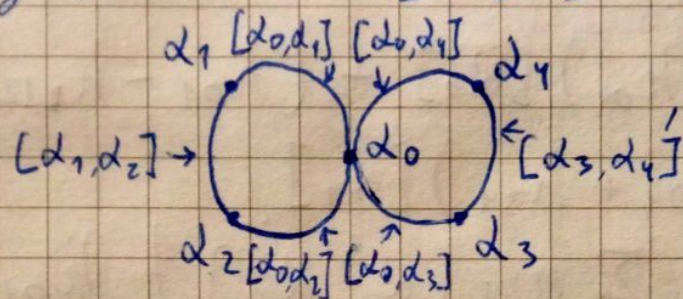


Зад. 1. Дана, рассмотрено  $S^1 \vee S^1$  как симп.  $n$ - $n$  з  
 гипермногообразие



моделью как

$$X = (S^1 \vee S^1, \{[x_0], [x_1], [x_2], [x_3], [x_4], [x_0, x_1], [x_0, x_2], [x_1, x_2], [x_0, x_3], [x_0, x_4], [x_3, x_4]\})$$

Она, является симп.  $n$ - $n$ .

$\forall$  ад. гр.  $G$ :

$$C_k(X, G) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=0}^4 g_i [x_i] \mid g_i \in G \right\} \cong G^5, & k=0 \\ \left\{ h_{01}[x_0, x_1] + h_{02}[x_0, x_2] + h_{12}[x_1, x_2] + h_{03}[x_0, x_3] + \right. \\ \quad \left. + h_{04}[x_0, x_4] + h_{34}[x_3, x_4] \mid h_{ij} \in G \right\} \cong G^6, & k=1 \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases}$$

Значит дв., так  $\partial_k = 0$  при  $k \neq 1$ , и

$$\partial_1 \left( \sum h_{ij} [x_i, x_j] \right) = \sum h_{ij} \partial_1 [x_i, x_j] = \sum h_{ij} ([x_j] - [x_i]) \equiv 0,$$

где пары  $(i, j)$  принимают значения  $(0, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 3), (0, 4), (3, 4)$ .



Приведем запись:

$$\oplus - (h_{01} + h_{02} + h_{03} + h_{04})[d_0] + (h_{01} - h_{12})[d_1] + (h_{02} + h_{12})[d_2] + (h_{03} - h_{34})[d_3] + (h_{04} + h_{34})[d_4].$$

Положим  $Z_1(X, G) = \left\{ \sum h_{ij} [d_i, d_j] \mid h_{01} + h_{02} + h_{03} + h_{04} = h_{01} - h_{12} = h_{02} + h_{12} = h_{03} - h_{34} = h_{04} + h_{34} = 0 \right\} \oplus$

где 5 групп соответствуют к  $Z$ :  $h_{01} = h_{12} = -h_{02}$  и  $h_{03} = h_{34} = -h_{04}$ , тогда

$$\oplus \left\{ h_1 ([d_0, d_1] - [d_0, d_2] + [d_1, d_2]) + h_2 ([d_0, d_3] - [d_0, d_4] + [d_3, d_4]) \mid h_1, h_2 \in G \right\} \simeq G^2, \quad \text{и } B_0(X, G) = \partial_1(C_1(X, G)) = \left\{ \sum h_{ij} ([d_j] - [d_i]) \mid h_{ij} \in G \right\}, \text{ лемма } Z_k B_k = 0. \text{ Тогда } H_k(X, G) = 0 \text{ при } k \neq 0, 2 \text{ и } H_1(X, G) = Z_1(X, G) / B_1(X, G) \simeq Z_1(X, G) \simeq G^2.$$

Покажем, что  $H_0(X, G) = Z_0(X, G) / B_0(X, G) = [\partial_0 = 0] = C_0(X, G) / B_0(X, G) \simeq G.$

Как получить аналог до  $S^1$  (групп. маневры зам. оператор маневры):



визначено  $\varphi: H_0(X, G) \rightarrow G : \sum_{i=0}^4 g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) \mapsto \sum_{i=0}^4 g_i$ .

Коректність:  $\sum_i g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) = \sum_i g'_i [\alpha_i] + B_0(X, G) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum (g_i - g'_i) [\alpha_i] \in B_0(X, G) \Leftrightarrow \exists \{h_{ij}\} \subset G : g_0 - g'_0 = -(h_{01} + h_{02} + h_{03} + h_{04}), g_1 - g'_1 = h_{01} - h_{12}, g_2 - g'_2 = h_{02} + h_{12}, g_3 - g'_3 = h_{03} - h_{34}, g_4 - g'_4 = h_{04} + h_{34} \Rightarrow \sum g_i - \sum g'_i = \sum (g_i - g'_i) = 0.$

Твердження - як наміре, зум:  $\forall g \in G \quad g = \varphi(g[\alpha_0] + B_0(X, G))$ ,  
 інж:  $\sum_{i=0}^4 g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \sum_{i=0}^4 g_i = 0 \Leftrightarrow g_0 = -\sum_{i=1}^4 g_i$ .

Потім  $\sum_{i=0}^4 g_i [\alpha_i] = \sum_{i=1}^4 g_i ([\alpha_i] - [\alpha_0]) = \sum_{i=1}^4 g_i [\alpha_0, \alpha_i] \in B_0(X, G)$ , отже  $\sum_{i=0}^4 g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) = B_0(X, G)$ .

П.ч.,  $H_k(X, G) \simeq \begin{cases} G^2, & k=1; \\ G, & k=0; \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases}$  Зокр.,  $H_k(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & k=1; \\ \mathbb{Z}, & k=0; \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases}$

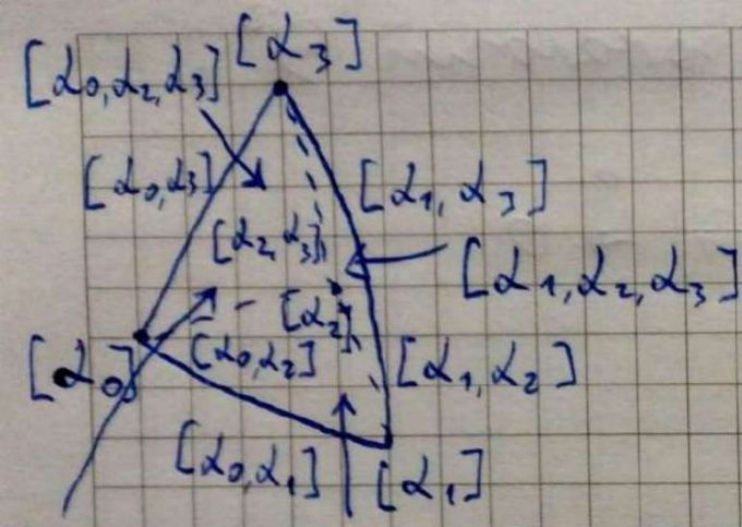


more  $b_k(S^1 V S^1) = \begin{cases} 2, & k=1; \\ 1, & k=0; \\ 0, & k \neq 0, 1, \end{cases}$  ; end. then  $\chi(S^1 V S^1) =$

$$= 1 - 2 + 0 - \dots = -1. \text{ Also } \text{rank} : \chi(S^1 V S^1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+}$$

$$(-1)^k \text{rank } C_k(S^1 V S^1) = 5 - 6 + 0 - \dots = -1.$$

Две поговы ошан вары  $G^2$ :



Прямая реализация

$$A = \{ [d_0], [d_1], [d_2], [d_3], \\ [d_0, d_1], [d_0, d_2], [d_0, d_3], [d_1, d_2], [d_1, d_3], [d_2, d_3], \\ [d_0, d_1, d_2], [d_0, d_1, d_3], [d_0, d_2, d_3], [d_1, d_2, d_3] \},$$

греб. covering.  $n$ - $n$   $X$ .  $\forall$  ад. гр.  $G$ !

$$C_k(X, G) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=0}^3 v_i [d_i] \mid v_i \in G \right\} \simeq G^4, & k=0; \\ \left\{ \sum_{0 \leq i < j \leq 3} e_{ij} [d_i, d_j] \mid e_{ij} \in G \right\} \simeq G^6, & k=1; \\ \left\{ \sum_{0 \leq i < j < k \leq 3} f_{ijk} [d_i, d_j, d_k] \mid f_{ijk} \in G \right\} \simeq G^4, & k=2; \\ 0, & k \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$



канонический комплекс має вигляд

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} C_2(X, G) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X, G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, G) \xrightarrow{0} 0,$$

$\begin{matrix} 12 \\ G^4 \end{matrix}$ 
 $\begin{matrix} 12 \\ G^6 \end{matrix}$ 
 $\begin{matrix} 12 \\ G^4 \end{matrix}$

можливо  $\partial_k = 0$  при  $k \neq 0, 1$ . За дов.,

$$\partial_1 \left( \sum_{i < j} e_{ij} [d_i, d_j] \right) = \sum e_{ij} ([d_j] - [d_i]),$$

$$\begin{aligned} \partial_2 \left( \sum_{i < j < k} f_{ijk} [d_i, d_j, d_k] \right) &= \sum f_{ijk} ([\hat{d}_i, d_j, d_k] - [d_i, \hat{d}_j, d_k] + \\ &+ [d_i, d_j, \hat{d}_k]) = \sum f_{ijk} ([d_j, d_k] - [d_i, d_k] + [d_i, d_j]) = \\ &= f_{012} ([d_1, d_2] - [d_0, d_2] + [d_0, d_1]) + f_{013} ([d_1, d_3] - [d_0, d_3] + [d_0, d_1]) + \\ &+ f_{023} ([d_2, d_3] - [d_0, d_3] + [d_0, d_2]) + f_{123} ([d_2, d_3] - [d_1, d_3] + [d_1, d_2]) = \\ &= (f_{012} + f_{013}) [d_0, d_1] + (-f_{012} + f_{023}) [d_0, d_2] + (-f_{013} + f_{023}) [d_0, d_3] + \\ &+ (f_{012} + f_{123}) [d_1, d_2] + (f_{013} - f_{123}) [d_1, d_3] + (f_{023} + f_{123}) [d_2, d_3]. \end{aligned}$$

$\forall e = 0 \Leftrightarrow f_{012} = -f_{013} = f_{023} = -f_{123}$ . Пит. 4.



$$\begin{aligned}
 H_2(X, G) &= Z_2(X, G) / B_2(X, G) \cong \left[ \begin{array}{l} \partial_3 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow B_2(X, G) = 0 \end{array} \right] \cong Z_2(X, G) = \\
 &= \{ f([x_0, x_1, x_2] - [x_0, x_1, x_3] + [x_0, x_2, x_3] - [x_1, x_2, x_3]) \mid f \in G \} \cong \\
 &\cong G.
 \end{aligned}$$

$H_0(X, G) \cong G$  доводиться так само, як і інших прип. (зв. таке заду гомі),  $H_k(X, G) = 0$  при  $k \neq 0, 1, 2$ , тому залишилося знайти  $H_1$ .

1 спосіб правильне, коли  $G$  - поле (наприклад,  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$  для простого  $p$ ). Тоді  $\forall k$   $C_k(X, G) \in$  вект.

г-ром над  $G$ :  $h \cdot (\sum g_i \sigma_i^k) = \sum h g_i \sigma_i^k \quad \forall h \in G$ ,  
 і всі аксіоми вик. За побудовою, усі  $\partial_k$  моги



diminuti,  $\bar{u}$   $\dim H_k(X, G) = \dim Z_k(X, G) - \dim B_k(X, G) =$   
 $= \dim \text{Ker } \partial_k - \dim \text{Im } \partial_{k+1} (= \dim \text{Coker } \partial_{k+1})$   
( $\uparrow$   $\hat{u}$   $\text{fiksir. y } Z_k$ )

$B$  ganany bunagay  $\dim \text{Im } \partial_2 = \dim C_2(X, G) - \dim \text{Ker } \partial_2 =$   
 $= 4 - 1 = 3$ , a  $\dim \text{Ker } \partial_1 = \dim C_1(X, G) - \dim \text{Im } \partial_1 =$   
 $= 6 - \dim B_0(X, G) = 6 + \dim H_0(X, G) - \dim Z_0(X, G) = [H_0(X, G) \cong G]:$   
 $= 6 + 1 - \dim C_0(X, G) = 6 + 1 - 4 = 3$ .  $\text{Mony } \dim H_1(X, G) = 0,$   
 modmo  $H_1(X, G) = 0$ .

2 cnoic  $\text{Pomancemo}$   $\text{Jeznocenegnro}$ , mo  $H_1(X, G) = 0$ , modmo  
 $\text{Im } \partial_2 = B_1(X, G) = Z_1(X, G) = \text{Ker } \partial_1$ , max mo ze firno  $\forall G$ .  
 $C$  brce  $E$ , jo ze lany. konnleks ( $i$  nebanco perebirame  
 jeznoc.).  $\text{Pomancemo } \supset$ : nescan  $\sum_{i < j} e_{ij} [\alpha_i, \alpha_j] \in Z_1(X, G)$ ,  
 modmo  $0 = \sum_{i < j} e_{ij} ([\alpha_j] - [\alpha_i]) = e_{01} ([\alpha_1] - [\alpha_0]) + e_{02} ([\alpha_2] - [\alpha_0]) +$   
 $+ e_{03} ([\alpha_3] - [\alpha_0]) + e_{12} ([\alpha_2] - [\alpha_1]) + e_{13} ([\alpha_3] - [\alpha_1]) + e_{23} ([\alpha_3] - [\alpha_2])$ .  
 Prubezemo nojidni:



$$\begin{cases} -l_{01} - l_{02} - l_{03} = 0 \\ l_{01} - l_{12} - l_{13} = 0 \\ l_{02} + l_{12} - l_{23} = 0 \\ l_{03} + l_{13} + l_{23} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_{01} = l_{12} + l_{13} \\ l_{02} = -l_{12} + l_{23} \\ l_{03} = -l_{13} - l_{23} \end{cases}$$

Получим з boundary  $\partial_2$  boundary, что  $\sum_{i < j} l_{ij} [d_i, d_j] =$   
 $= \partial_2 (l_{12} [d_0, d_1, d_2] + l_{13} [d_0, d_1, d_3] + l_{23} [d_0, d_2, d_3]) \in$   
 $\in B_1(X, G)$ , что и необходимо. Т.ч.,

$$H_k(X, G) \simeq \begin{cases} G, & k=0, 2; \\ 0, & k \neq 0, 2; \end{cases} \text{ экв. } H_k(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, 2; \\ 0, & k \neq 0, 2; \end{cases}$$

$$\text{мы имеем } b_k(S^2) = \begin{cases} 1, & k=0, 2; \\ 0, & k \neq 0, 2; \end{cases} \Rightarrow \chi(S^2) = 1 - 0 + 1 - 0 + \dots = 2.$$

$$\text{Аналогично мы имеем: } \chi(S^2) = 4 - 6 + 4 - 0 + \dots = 2.$$

Д/З 3. Имеем мы имеем  $\mathbb{D}^3$ , заданном го непер. мы имеем.

$S^2$  mapping  $[d_0, d_1, d_2, d_3]$ . Тогда  $B := \mathbb{R} \cup \{[d_0, d_1, d_2, d_3]\}$ ,  
 $i(\mathbb{D}^3, B)$  - current. map- $\mu$ , mapping  $(S^2, \mathbb{R})$  - current.  
 map.  $(\mathbb{D}^3, B)$ , с тем можно, что 2- boundary



дискретно,  $\simeq$

висота. Тому  $H_k(\mathbb{D}^3, G) \stackrel{\downarrow}{=} H_k(S^2, G)$  при  $k \leq 1$ , і, згідно,  $H_k(\mathbb{D}^3, G) = 0$  при  $k \geq 4$ , то  $C_k(\mathbb{D}^3, G) = 0$ . Тому значення  $H_2$  і  $H_3$  ( $\forall G$ ):

$C_3(\mathbb{D}^3, G) = \{g[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \mid g \in G\} \simeq G$ , і  $C_k(\mathbb{D}^3, G) = C_k(S^2, G)$  для інших  $k$ ; за доб.,

$$\partial_3(g[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]) = g \sum_{i=0}^3 (-1)^i [\dots, \hat{\alpha}_i, \dots] = g[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] - g[\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3] + g[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3] - g[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2].$$

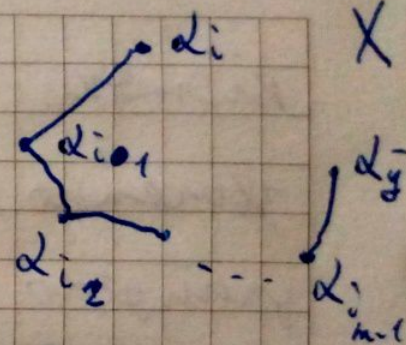
Тому  $Z_3(\mathbb{D}^3, G) = \ker \partial_3 = 0 \Rightarrow H_3(\mathbb{D}^3, G) = 0$ , і  $B_2(\mathbb{D}^3, G) = \operatorname{Im} \partial_3 = [\operatorname{Im} Z_2(S^2, G) = \ker \partial_2 = Z_2(\mathbb{D}^3, G) \text{ бачив}] = Z_2(\mathbb{D}^3, G) \Rightarrow H_2(\mathbb{D}^3, G) = 0$ . Тому гімна за повн. загальн

$$H_k(\mathbb{D}^3, G) \simeq \begin{cases} G, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \simeq H_k(\{x\}, G) \quad \forall G, \text{ як і повн. загальн.}$$

1. Показати, що якщо  $(X, A)$  "сильнішою ін. зв'язності", то  $\forall$  двох вершин  $A$   $\alpha_i$  та  $\alpha_j \exists$  певна  $[\alpha_i, \alpha_j]_{i=0}^j$ .



$[d_{i_0}, d_{i_1}], \dots, [d_{i_{m-1}}, d_{i_m}] \in A$  (use  $\in \Rightarrow X$  in.  
 зб'яжнн), то  $\forall$  ад. гр.  $G$   $H_0(X, G) \cong G$ .



Добудемо як правило: визначимо  $\partial: H_0(X, G) \rightarrow G$ :

$\sum_i g_i [d_i] + B_0(X, G) \mapsto \sum_i g_i \in G$ . Тим  $\partial_0 = 0 \Rightarrow Z_0(X, G) =$   
 $= C_0(X, G) = \{ \sum_i g_i [d_i] \mid g_i \in G, |\{i \mid g_i \neq 0\}| < \infty \}$ ,  $d_i$  - верш.  $A$ .

( $i$  може бути з множ. індексів дов. потужності, але, оскільки ми можемо скінч. кільк.  $g_i \neq 0$ , гаді будемо писати  $\sum_{i=0}^n g_i [d_i]$ ; зокрема  $\sum_{i=0}^n g_i \in G$  визн.). Коректність:

$$\sum_i g_i [d_i] + B_0(X, G) = \sum_i g'_i [d_i] + B_0(X, G) \Leftrightarrow \sum_i (g_i - g'_i) [d_i] \in B_0(X, G) \Leftrightarrow$$

$\exists$  скінч. множини ребер  $\{[d_{j_0}, d_{j_1}]\}_{j=0}^k$  і коеф.  $\{h_j\}_{j=0}^k \subset G$ :

$$\sum_{i=1}^n (g_i - g'_i) [d_i] = \partial_1 \left( \sum_{j=0}^k h_j [d_{j_0}, d_{j_1}] \right) = \sum_j h_j ([d_{j_1}] - [d_{j_0}]).$$

Тим  $\sum_{i=1}^n (g_i - g'_i)$  - це сума коеф. цього ланцюга  $h_0 - h_0 + h_1 -$







$$= \partial_1 \left( \sum_{i=1}^n g_i ([\alpha_0, \alpha_{i-1}] + \dots + [\alpha_{i-1}, \alpha_i]) \right) \in B_0(X, G), \text{ тобто}$$

$$\sum_{i=0}^n g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) = B_0(X, G).$$

2. Побудувати <sup>добре</sup> згесь (за Лоре) покриття тора  $T^2$ ,  
 знайти його перб і перевірити, що його реалізація  $\sim T^2$ .  
 - Один з варіантів фізобігів дуб. у Ex.3.6. лекції.

D/3.1. Визначити "компоненти сикла. лік. зв'язності" сикла.  
 гр-гу  $(X, A)$ , перевірити, що вони збіг. з конк. лік. зв.  $X$   
 та показати, що  $\forall G \quad H_0(X, G) \cong G^m$ , де  $m$  - кількість таких  
 конк.

2. Спробувати порівнювати сикла. гомології (принаймні ціло-  
 чисельні):

- $S^n : D^{n+1}$  для дов.  $n$  (перевірити, що  $H_k(D^{n+1}) \cong H_k(\{x\})$ ).
- $T^2$  (спробувати знайти ядє простішу приам. <sup>добре</sup>  $\wedge$  або  
 за Лоре покриття). Обчислити ел. хар.