

Лекції з топології

Петров Є.В.

4 жовтня 2025 р.

Зміст

1	Топологічний простір. Околи	2
2	Замкнені множини	7
3	Порівняння топологій	9
4	База топології	10
5	Аксіоми зліченності. Теорема Ліндельофа	11
6	Критерій бази	14
7	Метричні простори	17
8	Метрична топологія	21
9	Прообраз топології. Індукована топологія	24
10	Розташування точок відносно множини	27
11	Властивості щільності та сепарабельність	32
12	Неперервні відображення	35
13	Границі та секвенційні означення	38
14	Гомеоморфність і топологічні інваріанти	40
	Література	43

Топологія – це частина математики, що вивчає загальне поняття неперервності, відношення еквівалентності, що будуються за допомогою неперервних відображень, та інваріанти цих відношень. Стандартним підходом до введення цих концепцій є використання поняття топологічного простору.

1 Топологічний простір. Околи

Означення 1.1. Нехай X – довільна множина. *Топологією* на X зветься сукупність $\mathcal{T}$ підмножин X , що задовольняє наступним властивостям:

1. Об'єднання будь-якої сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$, тобто якщо $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.
2. Перетин будь-якої скінченної сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$, тобто якщо $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$, то $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.
3. Порожня множина і сама множина X належать до $\mathcal{T}$: $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

Пара $(X, \mathcal{T})$, що складається з множини та топології на ній, зветься *топологічним простором*. Підмножини X , що належать до $\mathcal{T}$, називаються *відкритими* підмножинами цього простору (або відкритими в X відносно топології $\mathcal{T}$).

Зауваження. У позначеннях вище A – множина індексів (довільної потужності), n – натуральне число. Перераховані вимоги 1.–3. часто називають *аксіомами топології*. Інколи аксіому 3. виводять з перших двох, використовуючи стандартні узгодження теорії множин про об'єднання і перетин порожньої сукупності множин. Якщо зрозуміло, про яку топологію на множині X йдеться, ми будемо опускати її явне позначення і говорити просто про топологічний простір X . Елементи топологічного простору традиційно називають його *точками*.

Означення 1.2. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір. Підмножина $V \subset X$ називається *околом* точки $x \in X$, якщо існує відкрита підмножина U (тобто $U \in \mathcal{T}$) така, що $x \in U \subset V$.

Має місце наступний простий критерій відкритості множини:

Твердження 1.1. *Підмножина $U \subset X$ відкрита тоді й тільки тоді, коли вона є околом кожної своєї точки $x \in U$.*

Доведення. $\Rightarrow$ Необхідність очевидна, оскільки для будь-яких $U \in \mathcal{T}$ і $x \in U$ маємо $x \in U \subset U$.

$\Leftarrow$ Перевіримо достатність. Нехай для кожної точки $x \in U$ множина U є околом x , тобто існує відкрита $U_x \in \mathcal{T}$ така, що $x \in U_x \subset U$. Об'єднання усіх таких множин міститься в U , бо кожна з них міститься в U :

$$\bigcup_{x \in U} U_x \subset U.$$

З іншого боку, кожна точка $x \in U$ міститься у відповідній множині: $x \in U_x \subset \bigcup_{x \in U} U_x$, тому маємо обернене включення:

$$U \subset \bigcup_{x \in U} U_x.$$

Отже,

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x \in \mathcal{T}$$

відкрита як об'єднання відкритих підмножин за аксіомою 1. ■

Зауваження. У деяких джерелах поняття "окіл x " означає "відкритий окіл x ", тобто, в силу попереднього твердження, будь-яку відкриту множину, що містить x . Як правило, у всіх означеннях і твердженнях, що використовують ці поняття, вони взаємозамінні (перевірка цього у кожному конкретному випадку може розглядатися як нескладна справа).

Наведемо деякі класичні приклади топологій та відповідних топологічних просторів.

Приклад 1.1. Нехай X – довільна множина. В якості системи підмножин виберемо $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Ясно, що аксіоми 1–3 для такої сукупності виконані, тому вона утворює топологію на X , що зветься *тривіальною* або *антидискретною* топологією на X .

Приклад 1.2. Нехай X – довільна множина. В якості сукупності підмножин $\mathcal{T}$ виберемо систему всіх підмножин X (інколи це позначають $\mathcal{T} = 2^X$). Так само очевидно, що аксіоми 1–3 виконані, й система $\mathcal{T}$ утворює топологію на X . Її називають *дискретною* топологією на X .

Приклад 1.3. Нехай множина X складається з двох точок: $X = \{x, y\}$. Неважко встановити, що існують всього 4 сукупності підмножин X , які задовольняють аксіомам топології:

- $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{x, y\}\}$ – тривіальна;
- $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{x, y\}, \{x\}, \{y\}\}$ – дискретна;
- $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{x, y\}, \{x\}\}$;
- $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{x, y\}, \{y\}\}$.

Системи $\mathcal{T}_3$ і $\mathcal{T}_4$ зветься *топологіями зв'язної двокрапки* (або *топологіями Серпінського*), а X з будь-якою з них – *простором Серпінського*.

Вправа 1.1. Описати всі топології на триточковій множині $X = \{x, y, z\}$.

Приклад 1.4. Розглянемо дійсну пряму $X = \mathbb{R}$. Визначимо сукупність її підмножин $\mathcal{T}$ умовою:

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0: (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U\}.$$

Тобто множина належить до $\mathcal{T}$ тоді й тільки тоді, коли кожна її точка входить до неї з деяким ε -околом. Перевіримо, що ця сукупність утворює топологію на $\mathbb{R}$:

1. Для довільної сукупності підмножин $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ і довільної точки $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, оскільки $x \in U_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Тому $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Для довільної скінченної сукупності підмножин $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$ і довільної $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ маємо $x \in U_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$. Тому для кожного i існує таке $\varepsilon_i > 0$, що $(x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i$. Покладемо $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Тоді для усіх $i = \overline{1, n}$

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i,$$

тому

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i,$$

отже $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

3. Для порожньої множини умова виконується тривіально; для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ достатньо взяти $\varepsilon = 1$.

Ця топологія зветься *стандартною* (природною, натуральною, евклідовою) топологією прямої. Це приклад *метричної топології* (детальніше про це див. нижче у розділі 7).

Стандартним прикладом відкритої множини у цій топології є інтервал. Так, для довільної точки скінченного інтервалу $x \in (a, b)$ можна взяти $\varepsilon := \min\{x - a, b - x\}$, для напівнескінчених інтервалів усе ще простіше. З іншого боку, наприклад, напівінтервали не є відкритими: для будь-якого $\varepsilon > 0$ околі $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ не міститься у $[a, b)$. Зауважимо, що $[a, b)$ можна представити у вигляді перетину зліченної кількості інтервалів: $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$. Тому умова скінченності у аксіомі 2. топології для цього прикладу суттєва.

Важливість інтервалу як прикладу відкритої підмножини стандартної прямої підкреслюється наступною теоремою:

Теорема 1.1 (Опис відкритих підмножин прямої). *Підмножина $U \subset \mathbb{R}$ дійсної прямої зі стандартною топологією є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона є об'єднанням не більш ніж зліченної кількості інтервалів, що попарно не перетинаються.*

Зауваження. Вираз "не більш ніж злічений" означає "скінченний або злічений". Об'єднання підмножин, що попарно не перетинаються, зазвичай називають *диз'юнктним* і позначають знаком $\sqcup$. Отже, в теоремі стверджується, що відкриті підмножини прямої – це в точності ті, що мають вигляд

$$U = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i),$$

де замість ∞ може стояти натуральне n або 0 – для порожньої U , інтервали можуть мати нескінченні межі, й $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ при $i \neq j$.

Доведення. $\Leftarrow$ Достатність тут очевидна: ми вже встановили, що інтервали відкриті, а отже і їхні об'єднання.

$\Rightarrow$ Покажемо зворотне. Нехай $U \subset \mathbb{R}$ – відкрита, й $x \in U$. За означенням, існує таке $\varepsilon_x > 0$, що $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U$. Покладемо:

$$a_x := \inf\{a \mid \exists (a, b): x \in (a, b) \subset U\};$$

$$b_x := \sup\{b \mid \exists (a, b): x \in (a, b) \subset U\}.$$

За побудовою, $a_x \leq x - \varepsilon_x < x$ і $b_x \geq x + \varepsilon_x > x$, тобто $x \in (a_x, b_x)$. З іншого боку, $(a_x, b_x) \subset U$. Дійсно, якщо $y \in (a_x, b_x)$ і, скажімо, $y \leq x$, то з $a_x < y$ і означення інфімуму маємо, що існує інтервал (a, b) такий, що $x \in (a, b) \subset U$ і $a_x \leq a < y$. Тоді $y \in (a, x] \subset (a, b) \subset U$. Аналогічно отримуємо $y \in U$ і для випадку $y \geq x$ з властивостей супремума.

Вправа 1.2. Перевірити, що

$$(a_x, b_x) = \bigcup_{x \in (a, b) \subset U} (a, b),$$

і що (a_x, b_x) – найбільший за включенням інтервал, що містить x та міститься в U (це не буде потрібне для подальшого доведення).

Отже, оскільки для кожного $x \in U$ маємо $x \in (a_x, b_x) \subset U$, аналогічно до доведення попереднього твердження отримуємо, що

$$U = \bigcup_{x \in U} (a_x, b_x).$$

Нехай два таких інтервали (a_x, b_x) і (a_y, b_y) перетинаються, тобто мають спільний елемент $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) \neq \emptyset$. Тоді, оскільки $z \in (a_x, b_x) \subset U$, $(a_x, b_x) \subset (a_z, b_z)$ за побудовою a_z і b_z . Зокрема, $x \in (a_x, b_x) \subset (a_z, b_z)$, тому, з аналогічних міркувань, $(a_z, b_z) \subset (a_x, b_x)$. Таким чином, $(a_x, b_x) = (a_z, b_z)$. Аналогічно, $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$, тому $(a_y, b_y) = (a_x, b_x)$. Отже, ми показали, що будь-які два побудовані нами інтервали або не перетинаються, або збігаються. Зауважимо, що межі цих інтервалів не обов'язково скінченні: можливо $a_x = -\infty$ або $b_x = +\infty$, і для цих випадків усі попередні міркування залишаються вірними.

Згрупуємо інтервали, що збігаються, залишивши лише попарно різні (а отже такі, що не перетинаються), і перепозначимо їх за допомогою множини індексів A . Отримаємо диз'юнктне об'єднання:

$$U = \bigsqcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha).$$

Залишилося помітити, що в кожному з цих інтервалів, що попарно не перетинаються, є раціональне число, тому потужність $|A| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, тобто A не більш ніж зліченна. Це й означає, що множина U має потрібний вигляд.

■

Приклад 1.5. Знову покладемо $X = \mathbb{R}$, а в якості системи підмножин в X розглянемо

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}}.$$

Неважко пересвідчитися у тому, що це топологія на $\mathbb{R}$:

1. $\bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, +\infty) = (\inf\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}, +\infty)$. Це виконується й для випадку, коли одна з лівих меж дорівнює $+\infty$ (тобто відповідна множина порожня) або $-\infty$ (тобто це вся пряма) – перевірте це!
2. $\bigcap_{i=1}^n (a_i, +\infty) = (\max\{a_i\}_{i=1}^n, +\infty)$. Це теж справедливо й для нескінченних меж. Як і у минулому прикладі, скінченність перетину тут є суттєвою (чому?).
3. виконана за побудовою.

Така $\mathcal{T}$ зветься *топологією напівнескінченних інтервалів* на прямій.

2 Замкнені множини

Означення 2.1. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір. Підмножина $V \subset X$ зветься *замкненою*, якщо доповнення до неї $X \setminus V$ відкрите (тобто $X \setminus V \in \mathcal{T}$).

Властивості замкнених підмножин топологічного простору дуальні до властивостей відкритих:

Твердження 2.1 (Властивості замкнених множин). *Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір.*

1. *Перетин будь-якої сукупності замкнених підмножин замкнений, тобто якщо $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ замкнені, то $\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ замкнена.*
2. *Об'єднання будь-якої скінченної сукупності замкнених підмножин замкнене, тобто якщо $\{V_i\}_{i=1}^n$ замкнені, то $\bigcup_{i=1}^n V_i$ замкнена.*
3. *Порожня множина та X замкнені.*

Доведення. Ці властивості випливають з означень топології, замкненої множини та формул де Моргана:

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus V_\alpha);$$

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus V_i).$$

■

Повернемося до наших прикладів топологій:

Приклад 2.1. У тривіальній топології є лише дві відкритих підмножини $\emptyset$ та X , тому в точності вони є і замкненими. У подальшому ці дві одночасно відкриті й замкнені у кожній топології множини ми будемо називати *тривіальними*.

Приклад 2.2. Відносно дискретної топології будь-яка підмножина X є відкритою і замкненою одночасно.

Приклад 2.3. У топології зв'язної двокрапки $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{x, y\}, \{x\}\}$ на двоточковій множині $X = \{x, y\}$ єдиною нетривіальною замкненою підмножиною є $\{y\}$. Аналогічно для топології $\mathcal{T}_4$ (у позначеннях прикладу 1.3) на цій множині.

Приклад 2.4. Приклади замкнених підмножин прямої $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією суб'єктивно різноманітніші, ніж відкритих. Зокрема, до них відносяться:

- Відрізки $[a, b]$ (зокрема, одноточкова множина $\{a\} = [a, a]$), бо доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ відкрите в даній топології. Аналогічно для напівнескінчених напівінтервалів $[a, +\infty)$ і $(-\infty, b]$.
- Множина цілих чисел $\mathbb{Z}$, бо доповнення $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ відкрите (і аналогічно для множини натуральних чисел $\mathbb{N}$).
- Множина Кантора утворюється з відрізка $[0, 1]$ послідовним викиданням інтервалів $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$; $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ і т.д. Вона замкнена, бо її доповнення є об'єднанням зліченної кількості інтервалів, що попарно не перетинаються. Також її можна описати як множину дійсних чисел від 0 до 1, запис яких у трійковій системі числення не містить одиниць, лише нулі та двійки (відтворіть деталі самостійно). Як відомо з курсу аналізу, ця множина, зокрема, континуальна. Її більш детальний опис можна знайти у [10, с. 57-58].

З іншого боку, скінченний напівінтервал $[a, b)$ не є замкненим, оскільки його доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ не відкрите в цій топології (чому?). При цьому $[a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$ (де n_0 – натуральне число достатньо велике для того, щоб ці відрізки існували), тож умова скінченності об'єднання у властивості 2. твердження 2.1 суттєва.

Вправа 2.1. Показати, що множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ не є замкненою в цій топології.

Приклад 2.5. У прямій $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінчених інтервалів нетривіальні замкнені підмножини мають вигляд $(-\infty, a]$.

Дуальність властивостей відкритих і замкнених множин підказує нам, що топологію можна визначати за допомогою сукупності замкнених підмножин:

Твердження 2.2. Нехай $\mathcal{C}$ – система підмножин деякої множини X , що задовольняє умовам 1.–3. з твердження 2.1. Тоді

$$\mathcal{T} := \{U \mid X \setminus U \in \mathcal{C}\}$$

є топологією на X , а $\mathcal{C}$ – сукупністю підмножин, що замкнені у цій топології.

Доведення. Як і твердження 2.1, це безпосередній наслідок означень і формул де Моргана.

■

Приклад 2.6. Нехай X – довільна множина, а $\mathcal{C}$ складається з усіх скінченних підмножин X і (за потреби) самої X . Умови 1.–3. твердження 2.1 для такого $\mathcal{C}$, очевидно, виконані, бо перетин будь-якої кількості та об'єднання скінченної кількості скінченних підмножин скінченні. Отже, доповнення до скінченних підмножин (і $\emptyset$ за потреби) утворюють топологію на X , що зветься *кофінітною*. Якщо X скінченна, то ця топологія збігається з дискретною.

3 Порівняння топологій

Означення 3.1. Нехай X – деяка множина, а $\mathcal{T}$ і $\mathcal{S}$ – топології на X . Кажуть, що $\mathcal{T}$ *слабша (грубша)* за $\mathcal{S}$, а $\mathcal{S}$ *сильніша (тонша)* за $\mathcal{T}$, якщо будь-яка підмножина, що відкрита відносно топології $\mathcal{T}$, є відкритою й відносно топології $\mathcal{S}$. Це позначається $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ або $\mathcal{S} \succ \mathcal{T}$.

Зауваження. Звичайно, це просто включення двох систем підмножин: $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ означає $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Зокрема, воно встановлює *відношення (часткового) порядку* на множині топологій X , що задовольняє відповідним аксіомам:

- $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}$ для будь-якої $\mathcal{T}$ (*рефлексивність*);
- якщо $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ і $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$, то $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ (*антисиметричність*);

- якщо $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ і $\mathcal{S} \prec \mathcal{R}$, то $\mathcal{T} \prec \mathcal{R}$ (транзитивність).

Замість топологій можна порівнювати сукупності замкнених множин, як у прикладі 3.4 нижче (чому?).

Приклад 3.1. Тривіальна топологія на довільній множині слабша за будь-яку іншу, тобто є найслабшою.

Приклад 3.2. Дискретна топологія на довільній множині сильніша за будь-яку іншу, тобто є найсильнішою.

Приклад 3.3. На двоточковій множині $X = \{x, y\}$ топології зв'язної двокрапки $\mathcal{T}_3$ і $\mathcal{T}_4$ (див. позначення вище) знаходяться між тривіальною $\mathcal{T}_1$ і дискретною $\mathcal{T}_2$: $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_3 \prec \mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_4 \prec \mathcal{T}_2$. При цьому вони непорівнювані між собою, бо у кожній з них є відкрита множина, якої немає у іншій ($\{x\}$ та $\{y\}$ відповідно).

Приклад 3.4. На прямій $\mathbb{R}$ крім тривіальної (найслабшої) та дискретної (найсильнішої) маємо три приклади топологій: стандартну, напівнескінченних інтервалів і кофінітну. При цьому топологія напівнескінченних інтервалів та кофінітна топологія слабші за стандартну: у кожній з них відкриті множини є, очевидно, об'єднанням інтервалів, а отже відкриті у стандартній. Але між собою ці дві топології непорівнювані. Наприклад, множина $(-\infty, 0]$ є замкнутою у топології напівнескінченних інтервалів, але не у кофінітній (бо нескінченна і не збігається з усією прямою), а $\{0\}$ – навпаки.

4 База топології

Згадаємо, що у стандартній топології числової прямої відкриті множини є об'єднаннями інтервалів: це впливає з теореми 1.1 або просто з означення цієї топології. Це дає нам ідею "економного" описання топології за допомогою об'єднань множин з деякого "стандартного набору", що формалізована у наступному означенні:

Означення 4.1. Деяка сукупність $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ відкритих підмножин топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ зветься *базою* топології $\mathcal{T}$, якщо для будь-якої відкритої множини $U \in \mathcal{T}$ і будь-якої її точки $x \in U$ існує така $V \in \mathcal{B}$, що $x \in V \subset U$.

Перш за все, переформулюємо це означення і покажемо, що воно відповідає викладеній вище ідеї:

Твердження 4.1. Система відкритих множин $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ є базою топології $\mathcal{T}$ тоді й тільки тоді, коли будь-яка відкрита множина $U \in \mathcal{T}$ є об'єднанням деякої сукупності множин, що належать до $\mathcal{B}$: існує $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{B}$ така, що $U = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$.

Доведення. $\Rightarrow$ Дійсно, якщо $\mathcal{B}$ – база, то для кожної відкритої U і кожної $x \in U$ знайдеться $V_x \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V_x \subset U$. Тоді $U = \bigcup_{x \in U} V_x$

(аналогічно, наприклад, до доведення твердження 1.1).

$\Leftarrow$ І навпаки, якщо будь-яка відкрита множина має вигляд $U = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, де усі $V_\alpha \in \mathcal{B}$, то для кожної точки $x \in U$ цієї множини існує $\alpha \in A$ таке, що $x \in V_\alpha \subset U$.

■

Приклад 4.1. Тривіальним прикладом бази топології $\mathcal{T}$ для довільного топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ є сама топологія: означення, очевидно, виконується для $\mathcal{B} := \mathcal{T}$. Звичайно, про жодну економію опису відкритих множин у цьому випадку не йдеться.

Приклад 4.2. Повернемося до стандартної топології $\mathbb{R}$. Як було зазначено вище, інтервали складають деяку базу цієї топології

$$\mathcal{B} := \{(a, b)\}_{a, b \in \mathbb{R}, a < b},$$

бо за побудовою між кожною відкритою множиною $U \subset \mathbb{R}$ і кожною її точкою $x \in U$ можна вставити інтервал: $x \in (a, b) \subset U$ (наприклад, $(a, b) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$). Але тоді, у свою чергу, з властивостей раціональних чисел випливає існування $q, r \in \mathbb{Q}$ таких, що $a < q < x$ і $x < r < b$, тобто $x \in (q, r) \subset (a, b) \subset U$. Це означає, що (строго) менша система

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{(q, r)\}_{q, r \in \mathbb{Q}, q < r} \subset \mathcal{B}$$

інтервалів з раціональними кінцями також є базою цієї топології. До того ж, вона є зліченною на відміну від $\mathcal{B}$ (і $\mathcal{T}$). Отже, ми бачимо, що база топології не визначається однозначно: одна й та сама топологія може мати кілька баз різної потужності.

5 Аксіоми зліченності. Теорема Ліндельофа

Означення 5.1. Сукупність $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ відкритих підмножин топологічного простору $(X, \mathcal{T})$, що містять точку $x \in X$, зветься *базою в точці x* топології $\mathcal{T}$, якщо для будь-якої відкритої множини $U \in \mathcal{T}$, що містить x , існує така $V \in \mathcal{B}$, що $x \in V \subset U$.

База і база в точці пов'язані наступним очевидним чином:

Твердження 5.1. *Нехай $\mathcal{B}$ – база топології $\mathcal{T}$, і $x \in X$. Тоді сукупність*

$$\mathcal{B}_x := \{V \in \mathcal{B} \mid V \ni x\} \subset \mathcal{B}$$

усіх елементів $\mathcal{B}$, що містять x , є базою $\mathcal{T}$ в x .

Доведення. Це безпосередньо випливає з означень: для будь-якої відкритої $U \ni x$ існує $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset U$. Але тоді $V \in \mathcal{B}_x$. ■

Вправа 5.1. Як побудувати базу топології з баз у точках (тобто як виглядає конструкція, зворотня до твердження 5.1)?

Наступні властивості топологічного простору є нашими першими змістовними прикладами *топологічних інваріантів* (чому вони так називаються, буде зрозуміло з подальших лекцій, див. розділ 14).

Означення 5.2. Говорять, що топологічний простір $(X, \mathcal{T})$

- задовольняє *першій аксіомі зліченності*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує не більш ніж зліченна база топології $\mathcal{T}$ в x ;
- задовольняє *другій аксіомі зліченності*, якщо існує не більш ніж зліченна база топології $\mathcal{T}$.

Наслідок 5.1. *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він задовольняє і першій аксіомі зліченності.*

Доведення. Це наслідок твердження 5.1: якщо $\mathcal{B}$ не більш ніж зліченна, то й $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$ не більш ніж зліченна для кожної $x \in X$. ■

Зауваження. Топологічні простори, що задовольняють другій аксіомі зліченності, також звуть просторами з не більш ніж зліченною базою, причому "не більш ніж" часто пропускають. Аналогічна термінологія використовується й для бази в точці. Обернене до попереднього наслідку твердження, взагалі кажучи, невірне: це демонструється, зокрема, у прикладі 5.2 нижче.

Приклад 5.1. Як було встановлено у прикладі 4.2, інтервали з раціональними кінцями утворюють зліченну базу $\tilde{\mathcal{B}}$ стандартної топології прямої $\mathbb{R}$, тобто вона задовольняє другій аксіомі зліченності, а отже й першій. Зауважимо, що крім $\tilde{\mathcal{B}}_x$ у якості бази в довільній $x \in \mathbb{R}$ можна розглядати, наприклад, теж зліченну $\{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ (чому?).

Вправа 5.2. Чи задовольняють аксіомам зліченності інші топології на $\mathbb{R}$, що були розглянуті вище? Показати, зокрема, що кофінітна топологія не задовольняє першій аксіомі зліченності (а отже й другій), більш того, це так для кофінітної топології на будь-якій незліченній множині.

Приклад 5.2. Розглянемо довільну множину X з дискретною топологією. Для кожної $x \in X$ одноточкова підмножина $\{x\}$ відкрита, і для будь-якої $U \ni x$ маємо $x \in \{x\} \subset U$. Це означає, що система з однієї множини $\{x\}$ є базою в x , отже, X задовольняє першій аксіомі зліченності. З іншого боку, якщо $\mathcal{B}$ – якась база цієї топології, то з тієї ж відкритості $\{x\}$ випливає, що для кожної $x \in X$ повинна існувати $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset \{x\}$, тобто $V = \{x\}$. Отже, $\mathcal{B}$ повинна містити усі одноточкові підмножини $\{x\}$ (і навпаки, система усіх одноточкових підмножин, очевидно, буде базою). Тому X задовольняє другій аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли X не більш ніж зліченна.

Означення 5.3. Система підмножин $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множини X зветься *покриттям* її підмножини $V \subset X$, якщо об'єднання елементів $\mathcal{U}$ містить V : $V \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Якщо менша сукупність $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B} \subset \mathcal{U}$ (для деякої $B \subset A$) також є покриттям V , її називають *підпокриттям* $\mathcal{U}$. У топологічному просторі X покриття називається *відкритим*, якщо кожна з його множин U_α відкрита.

Якщо у попередньому означенні $V = X$, то його умова перетворюється на $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Виявляється, що відкриті покриття просторів з не більш ніж зліченною базою мають наступну корисну властивість (яка також дещо нагадує означення компактного простору, див. розділ 20 у подальших лекціях):

Теорема 5.1 (Ліндельоф). *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то у будь-якого його відкритого покриття існує не більш ніж зліченне підпокриття.*

Доведення. Отже, нехай X – простір, $\mathcal{B}$ – його не більш ніж зліченна база, а $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – деяке відкрите покриття. За означенням покриття, для будь-якої $x \in X$ існує таке $\alpha_x \in A$, що $x \in U_{\alpha_x}$. За означенням бази, тоді існує $V_x \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V_x \subset U_{\alpha_x}$. Залишимо лише елементи бази, що виникають у цій конструкції, тобто розглянемо сукупність

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{V \in \mathcal{B} \mid \exists \alpha \in A: V \subset U_\alpha\} \subset \mathcal{B}$$

елементів бази, що містяться принаймні у одному елементі покриття. Вона також не більш ніж зліченна, тобто її елементи можна перенумерувати: $\tilde{\mathcal{B}} = \{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, де замість ∞ може стояти натуральне n . Для кожного i тоді оберемо $\alpha_i \in A$ таке, що $V_i \subset U_{\alpha_i}$.

Тепер повернемося до початку: для будь-якої $x \in X$ ми знайшли $V_x \in \mathcal{B}$ таку, що $x \in V_x \subset U_{\alpha_x}$. Це означає, що $V_x \in \tilde{\mathcal{B}}$, тобто існує i таке, що $V_x = V_i$, а отже

$$x \in V_i \subset U_{\alpha_i} \subset \bigcup_i U_{\alpha_i}.$$

Це означає, що $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ (або до n) – потрібне нам не більш ніж зліченне підпокриття $\mathcal{U}$.

■

6 Критерій бази

Виявляється, що топологія визначається своєю базою однозначно і може бути за нею побудована. У наступній теоремі наведені властивості, що є необхідними та достатніми для того, щоб система підмножин була базою деякої топології.

Теорема 6.1 (Критерій бази). *Нехай X – множина, а $\mathcal{B}$ – якась сукупність її підмножин. Якщо $\mathcal{B}$ – база деякої топології на X , то вона має наступні властивості:*

B1. $\mathcal{B}$ – покриття X : $X = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V$.

B2. Для будь-яких $U, V \in \mathcal{B}$ та $x \in U \cap V$ існує $W \in \mathcal{B}$ така, що $x \in W \subset U \cap V$.

І навпаки, якщо $\mathcal{B}$ має властивості B1. і B2., то на X існує єдина топологія, базою якої є $\mathcal{B}$.

Зауваження. Аналогічно до переформулювання означення бази у твердженні 4.1, властивість B2. еквівалентна наступній: для будь-яких $U, V \in \mathcal{B}$ їхній перетин $U \cap V$ можна представити у вигляді об'єднання множин, що належать до $\mathcal{B}$.

Доведення. Властивість B1. випливає з твердження 4.1, оскільки X є відкритою множиною і тому повинна дорівнювати об'єднанню деяких (а отже й усіх) множин $\mathcal{B}$. B2. випливає безпосередньо з означення бази, бо $U \cap V$ – відкрита множина як перетин відкритих.

Тепер нехай $\mathcal{B}$ має зазначені властивості. Побудуємо систему $\mathcal{T}$ підмножин X , що складається з усіх можливих об'єднань множин з $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{T} := \left\{ U = \bigcup_{\beta \in B} V_{\beta} \right\}_{\{V_{\beta}\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{B}}.$$

Зауважимо, що $\emptyset$ також належить до $\mathcal{T}$ як об'єднання порожньої сукупності підмножин. Перевіримо, що $\mathcal{T}$ – топологія на X :

1. Нехай $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$. За побудовою, кожен елемент цієї сукупності має вигляд $U_{\alpha} = \bigcup_{\beta \in B_{\alpha}} V_{\alpha\beta}$ для деякої $\{V_{\alpha\beta}\}_{\beta \in B_{\alpha}} \subset \mathcal{B}$, що індексована множиною B_{α} , власною для кожного $\alpha \in A$. Тоді

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in A, \beta \in B_{\alpha}} V_{\alpha\beta} \in \mathcal{T}$$

за побудовою $\mathcal{T}$.

2. Нехай $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$. Перш за все, зауважимо, що належність перетину цих множин до $\mathcal{T}$ достатньо перевірити для $n = 2$ з індуктивних міркувань: якщо $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$, то й $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = (U_1 \cap U_2) \cap U_3 \in \mathcal{T}$, бо ми вже знаємо, що це вірно для двох множин, і так далі до $\bigcap_{i=1}^n U_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} U_i \right) \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Отже, маємо $U_1 = \bigcup_{\beta \in B_1} V_{1\beta}$ і $U_2 = \bigcup_{\beta \in B_2} V_{2\beta}$ для деяких сукупностей $\{V_{1\beta}\}_{\beta \in B_1}, \{V_{2\beta}\}_{\beta \in B_2} \subset \mathcal{B}$. Тоді з дистрибутивності перетинів і об'єднань випливає, що

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\beta_1 \in B_1, \beta_2 \in B_2} V_{1\beta_1} \cap V_{2\beta_2}.$$

Оскільки для будь-якого вибору індексів $\beta_1 \in B_1$ і $\beta_2 \in B_2$ множини $V_{1\beta_1}$ і $V_{2\beta_2}$ належать до $\mathcal{B}$, з її властивості B2. і зауваження вище випливає, що $V_{1\beta_1} \cap V_{2\beta_2} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_{\beta_1 \beta_2}} W_{\beta_1 \beta_2 \gamma}$, де $\{W_{\beta_1 \beta_2 \gamma}\}_{\gamma \in \Gamma_{\beta_1 \beta_2}} \subset \mathcal{B}$

(для якоїсь індексуєчої множини $\Gamma_{\beta_1 \beta_2}$, що залежить від β_1 і β_2). Тому

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\beta_1 \in B_1, \beta_2 \in B_2, \gamma \in \Gamma_{\beta_1 \beta_2}} W_{\beta_1 \beta_2 \gamma} \in \mathcal{T}$$

за побудовою.

3. Як ми зауважили вище, $\emptyset \in \mathcal{T}$. Множина X належить до $\mathcal{T}$ в силу властивості B1.

Відносно топології $\mathcal{T}$ усі множини з $\mathcal{B}$ відкриті (як об'єднання сукупності з одної множини). Те, що $\mathcal{B}$ – база цієї топології, тоді впливає з побудови $\mathcal{T}$ і твердження 4.1.

Залишилося перевірити, що така топологія єдина. Нехай $\mathcal{S}$ – якась інша топологія з базою $\mathcal{B}$. Тоді в силу твердження 4.1 будь-яка $U \in \mathcal{S}$ є об'єднанням елементів $\mathcal{B}$, а отже належить до $\mathcal{T}$: $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$. З іншого боку, усі елементи $\mathcal{B}$ повинні бути відкритими відносно $\mathcal{S}$, а отже і їхні об'єднання, тому $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$. Отже, $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Це й означає єдиність. ■

Приклад 6.1. Згадаємо, що одною з баз стандартної топології $\mathbb{R}$ є сукупність інтервалів (див. приклад 4.2). Розглянемо тепер аналогічну систему з напівінтервалів:

$$\mathcal{B} := \{[a, b)\}_{a, b \in \mathbb{R}, a < b},$$

Вона задовольняє умовам теореми 6.1. Дійсно, всю пряму можна представити у вигляді, наприклад, $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n)$, а непорожній перетин двох напівінтервалів також є напівінтервалом. Тому цій базі відповідає деяка топологія. Вона зветься *топологією Зоргенфрея*, а пряма $\mathbb{R}$ з нею – *прямою Зоргенфрея*.

Перш за все, зауважимо, що будь-який інтервал можна представити у вигляді об'єднання напівінтервалів: $(a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b)$ (для деякого достатньо великого натурального n_0), а тому й будь-яка відкрита в стандартній топології множина є об'єднанням напівінтервалів, отже відкритою в прямій Зоргенфрея. Таким чином, топологія Зоргенфрея сильніша за стандартну (причому строго, оскільки самі напівінтервали не є відкритими у стандартній топології). Також цікавим є те, що в цій топології напівінтервали є не лише відкритими (як елементи бази), але й замкненими: доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} [-n, a) \cup \bigcup_{n=n_1}^{\infty} [b, n)$ відкрите.

Для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ зліченна сукупність $\{[x, x + \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ є базою топології Зоргенфрея в x (перевірте це!), тому пряма Зоргенфрея задовольняє першій аксіомі зліченності. З іншого боку, будь-яка база її топології для кожної $x \in \mathbb{R}$ повинна містити V_x таку, що $x \in V_x \subset [x, x + 1)$. Зокрема, $\min V_x = x$, а тому різним точкам відповідають різні множини: $V_x \neq V_y$

для $x \neq y$. З цього випливає, що потужність будь-якої бази топології Зоргенфрея не менша за потужність $\mathbb{R}$, тому у цієї топології немає не більш ніж зліченних баз. Таким чином, ми отримали ще один приклад простору, що задовольняє першій, але не другій аксіомі зліченності.

Вправа 6.1. Перевірити, що сімейство підмножин круга на площині, що складається з усіх його діаметрів і центра, є базою деякої топології.

7 Метричні простори

Важливим класом топологічних просторів є метричні простори, що дуже часто зустрічаються в геометрії, аналізі та застосуваннях математики – всюди, де виникає можливість тим чи іншим чином задати відстань між елементами деякої множини.

Означення 7.1. Нехай X – довільна множина. *Метрикою* на X називається відображення $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$, що задовольняє наступним умовам:

1. $\rho(x, y) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$ (*невиродженість*).
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для будь-яких $x, y \in X$ (*симетричність*).
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для будь-яких $x, y, z \in X$ (*нерівність трикутника*).

Пара (X, ρ) з множини та метрики на ній зветься *метричним простором*.

Зауваження. Тут $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – традиційне позначення для множини невід’ємних дійсних чисел. Як і у випадку топологічного простору, якщо зрозуміло, про яку метрику на X йдеться, ми будемо говорити просто про метричний простір X . Елементи метричного простору також називають його *точками*, а $\rho(x, y)$ – *відстанню* між точками x та y .

Приклад 7.1. На довільній множині X введемо $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ наступним чином:

$$\rho(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Це відображення є метрикою. Дійсно, перші дві умови означення випливають з побудови, а нерівність трикутника можна перевірити, виписавши всі варіанти взаємного розташування трьох точок (зробіть це). Така метрика на X зветься *дискретною*.

Приклад 7.2. Для $X = \mathbb{R}^n$ розглянемо сімейство відображень ρ_p , що параметризоване дійсним $p \in [1, +\infty)$ і визначене для $x = (x^1, \dots, x^n)$ та $y = (y^1, \dots, y^n)$ формулою

$$\rho_p(x, y) := \left(\sum_{i=1}^n |x^i - y^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Властивості невід’ємності та симетричності впливають безпосередньо з цього означення. Зокрема, якщо $\rho_p(x, y) = 0$, то з невід’ємності доданків маємо $x^i = y^i$ для усіх i , а отже $x = y$. Нерівність трикутника тут є наслідком нерівності Мінковського, що доводиться в курсі аналізу (див., наприклад, [2, с. 154]). Отже, це метрики на $\mathbb{R}^n$. Метрика ρ_1 зветься *манхеттенською* (вуличною, метрикою таксиста), а ρ_2 – *евклідовою*. Крім перелічених, також розглянемо ρ_∞ , що визначена наступним чином:

$$\rho_\infty(x, y) := \max\{|x^i - y^i|\}_{i=1}^n.$$

Знову невід’ємність і симетричність впливають безпосередньо з побудови. Перевіримо нерівність трикутника: для будь-яких $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ та i від 1 до n

$$|x^i - y^i| = |x^i - z^i + z^i - y^i| \leq |x^i - z^i| + |z^i - y^i| \leq \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y).$$

Тоді й найбільше з цих значень $\rho_\infty(x, y) \leq \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y)$.

Зауважимо, що при $n = 1$ (на прямій) всі ці метрики збігаються й дають $\rho_p(x, y) = |x - y|$, у т. ч. для $p = \infty$.

Приклад 7.3. Побудуємо метрику на множині $C[a, b]$ неперервних функцій на відрізку, використавши ідею, схожу до побудови ρ_∞ у попередньому прикладі:

$$\rho(f, g) := \max\{|f(x) - g(x)|\}_{x \in [a, b]}.$$

Цей максимум існує в силу теореми Веєрштраса (далі у цьому курсі ми будемо розглядати її узагальнення, див. розділ 22). Властивості метрики перевіряються аналогічно до попереднього прикладу (зробіть це).

Вправа 7.1. Для довільного дійсного $p \in [1, +\infty)$ розглянемо множини ℓ_p дійсних послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ таких, що ряд $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ збігається. Перевірити що на ℓ_p

$$\rho(x, y) := \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

коректно визначене і задає метрику.

Перевірити також що на множині ℓ_∞ обмежених дійсних послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ (тобто тих, для яких існує C таке, що $|x_n| \leq C$ для усіх n)

$$\rho(x, y) := \sup\{|x_n - y_n|\}_{n=1}^\infty$$

коректно визначене і задає метрику. Пор. ці метрики з прикладом 7.2.

Означення 7.2. Нехай (X, ρ) і (Y, σ) – метричні простори. Відображення $f: X \rightarrow Y$ зветься

- *ізометрією*, якщо f – бієкція, і для будь-яких $x, y \in X$

$$\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y);$$

- *ліпшицевим з константою Ліпшиця $C > 0$* (а також *нерозтягуючим* при $C = 1$), якщо для будь-яких $x, y \in X$

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y);$$

- *біліпшицевою еквівалентністю*, якщо f – бієкція, а f і f^{-1} – ліпшицеві.

Зауваження. Про відображення f метричних просторів, яке задовольняє умові $\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$, говорять також, що воно *зберігає відстані між точками*. Зокрема, такі відображення ін’єктивні: з $f(x) = f(y)$ випливає $\rho(x, y) = \sigma(f(x), f(y)) = 0$, отже $x = y$ в силу невід’єдності. Тому в означенні ізометрії достатньо вимагати лише сюр’єктивності відображення f . Якщо f – ізометрія, то й f^{-1} – ізометрія. Будь-яка ізометрія є біліпшицевою еквівалентністю, але, взагалі кажучи, не навпаки (приклад можна зайти нижче).

Приклад 7.4. Ізометрії $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ евклідового простору $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ на себе (рухи), як може бути відомо з курсів лінійної алгебри та геометрії (принаймні для $n \leq 3$), є в точності ізометричними афінними перетвореннями, тобто мають вигляд $f(x) = Ax + b$, де $A \in O(n)$ – ортогональна матриця і $b \in \mathbb{R}^n$.

Означення 7.3. Метричні простори (X, ρ) і (Y, σ) зветься

- *ізометричними*, якщо існує ізометрія $f: X \rightarrow Y$;
- *біліпшицевою еквівалентними*, якщо існує біліпшицева еквівалентність $f: X \rightarrow Y$.

Дві метрики ρ і σ на множині X зветься *біліпшицево еквівалентними*, якщо *тотожне* відображення $id_X: X \rightarrow X$, що кожній точці X ставить у відповідність її ж, є біліпшицевою еквівалентністю метричних просторів (X, ρ) і (X, σ) .

Твердження 7.1. *Метрики ρ та σ на X біліпшицево еквівалентні тоді й тільки тоді, коли існують $c, C > 0$ такі, що для будь-яких $x, y \in X$*

$$c\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq C\rho(x, y).$$

Доведення. Друга з цих нерівностей є просто умовою ліпшицевості для тотожного відображення $(X, \rho) \rightarrow (X, \sigma)$. Записуючи цю умову для оберненого відображення (теж, звичайно, тотожного), отримаємо першу нерівність.

■

Вправа 7.2. Показати, що усі еквівалентності з означення 7.3 дійсно є відношеннями еквівалентності (метричних просторів та метрик на множині відповідно).

Вправа 7.3. Метричний простір (X, ρ) зветься *повним*, якщо у ньому будь-яка *фундаментальна* послідовність $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ (тобто така, що $\rho(x_n, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$) *збігається* (тобто існує $x \in X$ така, що $\rho(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, див. далі означення 13.1 і зауваження після нього). Перевірити, що якщо метричні простори біліпшицево еквівалентні (зокрема, ізометричні) і один з них повний, то й інший повний.

Приклад 7.5. Метрики ρ_p на $\mathbb{R}^n$ з прикладу 7.2 біліпшицево еквівалентні для усіх $p \in [1, +\infty)$, а також $p = \infty$. Дійсно, для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^n$ та i від 1 до n за побудовою $|x^i - y^i| \leq \rho_\infty(x, y)$, тому для усіх $p \in [1, +\infty)$

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x^i - y^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (n\rho_\infty(x, y)^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \rho_\infty(x, y).$$

З іншого боку, оскільки $\rho_\infty(x, y)$ – це найбільше з $|x^i - y^i|$,

$$\rho_\infty(x, y) = (\rho_\infty(x, y)^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x^i - y^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \rho_p(x, y).$$

Це дає потрібні нам згідно з твердженням 7.1 нерівності. Отже, кожна ρ_p з $p \in [1, +\infty)$ еквівалентна ρ_∞ , тому вони еквівалентні й одна одній в силу транзитивності.

8 Метрична топологія

Тепер покажемо, що метричні простори дійсно є окремим випадком топологічних. Для цього спочатку розглянемо деякі корисні класи підмножин, що очевидним чином узагальнюють відповідні поняття евклідової геометрії:

Означення 8.1. Нехай (X, ρ) – метричний простір, $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Підмножина X

- $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$ зветься *відкритою кулею* з центром у точці x радіуса ε ;
- $D_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$ зветься *замкненою кулею* з центром у точці x радіуса ε ;
- $S_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid \rho(x, y) = \varepsilon\}$ зветься *сферою* з центром у точці x радіуса ε .

Зауваження. Очевидно, замкнена куля – це диз’юнктне об’єднання відкритої кулі та сфери з тими ж центром і радіусом. Зауважимо також, що $B_\varepsilon(x) \subset B_\delta(x)$ для $\varepsilon \leq \delta$ – це безпосередньо впливає з означення. Так само для замкнених куль (але не для сфер).

Наступне означення узагальнює стандартну топологію прямої:

Означення 8.2. *Метричною топологією* метричного простору (X, ρ) (або метрики ρ) зветься сукупність його підмножин

$$\mathcal{T} := \{U \subset X \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subset U\}.$$

Якщо для топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ існує така метрика ρ на X , що $\mathcal{T}$ – метрична топологія ρ , то цей простір зветься *метризовним*.

Доведемо коректність цього означення.

Твердження 8.1. *Метрична топологія є топологією на X . Сукупність усіх відкритих куль (X, ρ) є її базою.*

Доведення. Перевіримо виконання аксіом топології.

1. Для деякої сукупності підмножин $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ і довільної точки $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, оскільки $x \in U_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Тому $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Для скінченної сукупності підмножин $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$ і довільної $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ маємо $x \in U_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$. Тому для кожного i існує таке $\varepsilon_i > 0$, що $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Покладемо $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Тоді для усіх $i = \overline{1, n}$ виконується $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$, тому $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$, отже $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

3. Для порожньої множини умова виконується тривіально; для будь-якої $x \in X$ достатньо взяти $B_1(x) \subset X$, тому $X \in \mathcal{T}$.

Згідно з вправою 8.1 нижче, відкриті кулі належать до $\mathcal{T}$. Їх сукупність тоді задовольняє означенню бази $\mathcal{T}$ за побудовою цієї топології.

■

Зауваження. Отже, множина відкрита відносно метричної топології тоді й тільки тоді, коли кожна її точка входить до неї з деякою відкритою кулею з центром у цій точці. У подальшому вважатимемо усі метричні простори наділеними цією топологією.

Зауважимо також, що доведення вище повністю повторює доведення для стандартної топології прямої. Можна було провести його іншим способом, застосувавши критерій бази до сукупності відкритих куль (зробіть це).

Вправа 8.1. Відносно метричної топології відкриті кулі є відкритими множинами, а замкнені кулі та сфери – замкненими.

Твердження 8.2. *Метричні топології біліпшицево еквівалентних метрик співпадають.*

Доведення. Отже, нехай ρ та σ – біліпшицево еквівалентні метрики на множині X . В силу твердження 7.1, тоді існують $c, C > 0$ такі, що для будь-яких $x, y \in X$

$$c\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq C\rho(x, y).$$

Будемо позначати відкриті кулі цих метрик через $B_\varepsilon^\rho(x)$ і $B_\varepsilon^\sigma(x)$ відповідно. Тоді з першої нерівності вище маємо, що $B_{c\varepsilon}^\sigma(x) \subset B_\varepsilon^\rho(x)$ для будь-яких $x \in X$ і $\varepsilon > 0$, бо з $y \in B_{c\varepsilon}^\sigma(x)$ випливає

$$\rho(x, y) \leq \frac{\sigma(x, y)}{c} < \varepsilon,$$

тобто $y \in B_\varepsilon^\rho(x)$. Аналогічно, друга нерівність означає, що $B_\varepsilon^\rho(x) \subset B_{C\varepsilon}^\sigma(x)$ для усіх x і ε .

Нехай тепер $\mathcal{T}$ і $\mathcal{S}$ – метричні топології ρ і σ відповідно. Для кожної $U \in \mathcal{T}$ і будь-якої $x \in U$ згідно з означенням існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon^\rho(x) \subset U$. Згідно з показаним вище, тоді й $B_{c\varepsilon}^\sigma(x) \subset B_\varepsilon^\rho(x) \subset U$. Це доводить, що $U \in \mathcal{S}$. Отже, $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$. Аналогічно доводиться, що $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$, тому $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

■

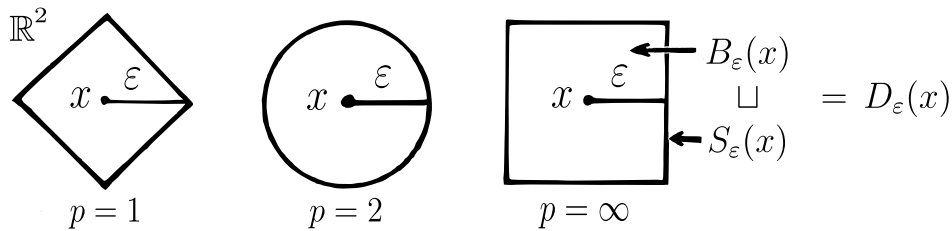
Приклад 8.1. Для дискретної метрики на множині X згідно з означеннями маємо

$$B_\varepsilon(x) = \begin{cases} \{x\}, & 0 < \varepsilon \leq 1; \\ X, & \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Тому для кожної $x \in X$ одноточкова множина $\{x\} = B_1(x) \subset \{x\}$, тобто усі $\{x\}$ є відкритими, а тоді й усі підмножини X відкриті як об'єднання одноточкових. Отже, відповідна метрична топологія є дискретною. До речі, як виглядають замкнені кулі та сфери цієї метрики?

Приклад 8.2. Повернемося до $X = \mathbb{R}^n$. При $n = 1$ метрика $\rho_p(x, y) = |x - y|$ (одна й та сама для усіх p) дає $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $D_\varepsilon(x) = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, $S_\varepsilon(x) = \{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}$. Згідно з означенням, відповідна метрична топологія – це стандартна топологія $\mathbb{R}$.

Уявлення про різні ρ_p при більших n дає наступна ілюстрація куль площини $\mathbb{R}^2$ для $p = 1$, $p = 2$ і $p = \infty$:



У прикладі 7.5 ми показали, що усі ці метрики біліпшицево еквівалентні, а тому згідно з твердженням 8.2 породжують одну й ту саму метричну топологію. Вона зветься *стандартною* (*природною*, *натуральною*, *евклідовою*) топологією $\mathbb{R}^n$. При цьому з твердження 8.1 випливає, що відкриті кулі різних метрик ρ_p утворюють різні бази цієї топології. Можна розглядати й інші бази, наприклад, у $\mathbb{R}^2$ не відкриті круги або квадрати, а відкриті прямокутники (чому?).

Твердження 8.3. Для будь-якого метричного простору (X, ρ) і будь-якої його точки $x \in X$ відкриті кулі $\left\{B_{\frac{1}{n}}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ складають зліченну базу метричної топології в x . Тому цей простір задовольняє першій аксіомі зліченності.

Доведення. Якщо $U \ni x$ – відкрита, то згідно з означенням існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_{\varepsilon}(x) \subset U$. Оберемо натуральне n таке, що $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тоді $x \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_{\varepsilon}(x) \subset U$.

■

Зауваження. Зокрема, щоб топологічний простір був метризовним, він повинен задовольняти першій аксіомі зліченності. Тому, наприклад, незліченна множина з кофінітною топологією не є метризовною в силу вправи 5.2. Приклади евклідової метрики на прямій та дискретної метрики на незліченній множині демонструють, що метричні простори можуть як задовольняти, так і не задовольняти другій аксіомі зліченності.

Вправа 8.2. Показати, що відкриті кулі будь-якої з метрик ρ_p з центрами в точках з раціональними координатами та радіусами вигляду $\frac{1}{m}$

$$\mathcal{B} := \left\{B_{\frac{1}{m}}(x)\right\}_{x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}}$$

утворюють зліченну базу стандартної топології $\mathbb{R}^n$, отже цей простір задовольняє другій аксіомі зліченності й для довільного n .

9 Прообраз топології. Індукована топологія

Тут ми продовжимо знайомитися зі способами побудови топологій.

Означення 9.1. Нехай X – деяка множина, $(Y, \mathcal{T})$ – топологічний простір, а $f: X \rightarrow Y$ – відображення. *Прообразом* топології $\mathcal{T}$ під дією f назвемо сукупність підмножин X , що складається з прообразів елементів $\mathcal{T}$ під дією f :

$$f^{-1}(\mathcal{T}) := \{f^{-1}(V) \subset X\}_{V \in \mathcal{T}}.$$

Твердження 9.1. Система $f^{-1}(\mathcal{T})$ є топологією на X .

Доведення. Перевіримо виконання означення топології.

1. Нехай $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \subset f^{-1}(\mathcal{T})$. Тоді $U_{\alpha} = f^{-1}(V_{\alpha})$, де $V_{\alpha} \in \mathcal{T}$, для кожного $\alpha \in A$. Із загальної властивості прообразів маємо

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_{\alpha}) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} V_{\alpha}\right) \in f^{-1}(\mathcal{T}),$$

бо $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Аналогічно, для скінченної $\{U_i\}_{i=1}^n \subset f^{-1}(\mathcal{T})$ маємо $U_i = f^{-1}(V_i)$, де $V_i \in \mathcal{T}$, для кожного $i = \overline{1, n}$, і з властивості прообразів

$$\bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n V_i\right) \in f^{-1}(\mathcal{T}),$$

оскільки $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{T}$.

3. Очевидно, $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ і $X = f^{-1}(Y)$ належать до $f^{-1}(\mathcal{T})$.

■

Зауваження. Розглянемо частковий випадок, коли X – підмножина Y (де $(Y, \mathcal{T})$, як і раніше, є топологічним простором), а $f = i: X \rightarrow Y$ – формальне *включення*, тобто відображення, що кожній точці X ставить у відповідність її ж, але вже як точку Y . Прообразами підмножин $V \subset Y$ тоді будуть їхні перетини з X : $i^{-1}(V) = X \cap V$. Дійсно, належність точки підмножини X до обох частин цієї рівності означає просто, що вона належить також і до V .

Наслідок 9.1. *Сукупність підмножин, що є перетинами з X відкритих підмножин Y ,*

$$i^{-1}(\mathcal{T}) = \{U \subset X \mid \exists V \in \mathcal{T}: U = X \cap V\}$$

є топологією на $X \subset Y$.

Означення 9.2. Говорять, що топологія $i^{-1}(\mathcal{T})$ *індукована* на X топологією $\mathcal{T}$. При цьому топологічний простір $(X, i^{-1}(\mathcal{T}))$ називається (топологічним) *підпростором* простору $(Y, \mathcal{T})$.

Зауваження. У подальшому, якщо не обумовлене інше, ми будемо вважати, що на довільній підмножині топологічного простору розглядається саме індукована топологія, і будемо говорити про властивості цієї топології (властивості топологічного підпростору) як про властивості підмножини.

Твердження 9.2. *Якщо $\mathcal{B}$ – база топології $\mathcal{T}$ на Y (відповідно, база $\mathcal{T}$ у точці $x \in X \subset Y$), то*

$$i^{-1}(\mathcal{B}) = \{X \cap V\}_{V \in \mathcal{B}}$$

є базою топології, що індукована $\mathcal{T}$ на $X \subset Y$ (відповідно, базою індукованої топології у x).

Доведення. Це безпосередньо випливає з означень індукованої топології та бази. Будь-яка підмножина X , що відкрита відносно індукованої топології, має вигляд $X \cap U$, де $U \in \mathcal{T}$. Оскільки довільна точка $x \in X \cap U$ належить до U , існує $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset U$. Але тоді виконується й $x \in X \cap V \subset X \cap U$, оскільки $x \in X$. Аналогічно для бази у точці. ■

Наслідок 9.2. *Якщо топологічний простір задовольняє першій (відповідно, другій) аксіомі зліченності, то й будь-який його підпростір задовольняє першій (відповідно, другій) аксіомі зліченності.*

Доведення. Дійсно, якщо $\mathcal{B}$ у минулому твердженні не більш ніж зліченна, то такою є й $i^{-1}(\mathcal{B})$. ■

Зауваження. Інколи про властивості, що зберігаються при переході до підпростору (як у попередньому наслідку), говорять, що вони *наслідуються*. Корисно у якості вправи перевіряти, чи це так, для кожної з властивостей (інваріантів) топологічних просторів, що будуть з'являтися у подальшому.

Приклад 9.1. Нехай $Y = \mathbb{R}$ зі стандартною топологією. З опису відкритих підмножин цього простору у теоремі 1.1 випливає, що, наприклад, у напівінтервалі $X = [a, b)$ з індукованою топологією відкритими будуть диз'юнктні об'єднання не більш ніж зліченної кількості проміжків вигляду $[a, c)$ (не більше одного), (d, e) і (f, b) (не більше одного). Зауважимо, що проміжки першого з цих типів не є відкритими в топології прямої.

Для підпростору $X = \mathbb{Z}$ прямої індукована топологія є дискретною, оскільки для кожної $x \in \mathbb{Z}$ одноточкова підмножина $\{x\} = \mathbb{Z} \cap (x-1, x+1)$ є відкритою. У вихідній топології прямої такі підмножини замкнені, але не відкриті.

Приклад 9.2. Визначимо для кожного цілого невід'ємного n *стандартну n -вимірну сферу* як сферу метричного простору $(\mathbb{R}^{n+1}, \rho_2)$ радіуса 1 з центром у початку координат:

$$S^n := S_1(0) = \left\{ x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \left| \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \right. \right\}.$$

Пояснення того, чому ця сфера саме n -вимірна, буде дане у розділі 29. У якості топології на S^n оберемо індуковану стандартною топологією $\mathbb{R}^{n+1}$. З тверджень 8.1 і 9.2 тоді випливає, що базу цієї топології утворюють перетини зі сферою відкритих куль будь-якої з метрик ρ_p . Зокрема,

для кола (одновимірної сфери) S^1 це відкриті дуги, що є перетинами відкритих евклідових кругів $\mathbb{R}^2$ з колом. Для двовимірної сфери S^2 довільний елемент бази можна описати як "відкритий криволінійний круг" у сфері, тобто одну з двох частин, на яку S^2 ділить пласке коло, що у ній лежить (без точок самого кола), і яка є перетином з S^2 відритої евклідової кулі $\mathbb{R}^3$. Аналогічний опис має місце й для довільної вимірності n .

Вправа 9.1. Показати, що підмножина S^1 є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона є диз'юнктним об'єднанням не більш ніж зліченної кількості відкритих дуг (аналогічно до теореми 1.1).

Зауваження. З означення метрики випливає, що для будь-якого метричного простору (Y, ρ) і будь-якої його підмножини $X \subset Y$ обмеження ρ на $X \times X$ буде метрикою на X , тому пару $(X, \rho|_{X \times X})$ можемо назвати *метричним підпростором* (Y, ρ) . Але на ньому існують дві апріорі різні топології!

Вправа 9.2. Показати, що метрична топологія $(X, \rho|_{X \times X})$ збігається з топологією, що індукована на X метричною топологією (Y, ρ) .

10 Розташування точок відносно множини

Наведемо кілька означень, що знадобляться нам для більш детального дослідження підмножин топологічних просторів:

Означення 10.1. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір і $A \subset X$ – його підмножина. Точка $x \in X$ зветься

- *внутрішньою точкою* A , якщо існує відкритий окіл $U \ni x$, що міститься в A : $x \in U \subset A$; множина усіх внутрішніх точок A називається *внутрішністю* A і позначається $\text{Int } A$ або $\overset{\circ}{A}$;
- *точкою дотику* A , якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ перетинається з A : $U \cap A \neq \emptyset$; множина усіх точок дотику A називається *замиканням* A і позначається $\overline{A}$ або $\text{Cl } A$;
- *граничною точкою* A , якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ містить хоча б одну точку A , відмінну від x : $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$; множина усіх граничних точок A називається *похідною множиною* A і позначається A' ;

- *межовою точкою* A , якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ містить точки як A , так і його доповнення: $U \cap A \neq \emptyset$ і $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$; множина усіх межових точок A називається *межею* A і позначається ∂A ;
- *ізолюваною точкою* A , якщо існує відкритий окіл $U \ni x$, перетин якого з A складається з самої цієї точки: $U \cap A = \{x\}$.

Зауваження. Зокрема, усі внутрішні та ізолювані точки належать до A , а ось точки інших типів можуть як належати до A , так і ні, як побачимо у наведених нижче прикладах. Також з означень випливає, що x – внутрішня точка A тоді й тільки тоді, коли A – окіл x . Як зауважувалося вище, в усіх цих означеннях відкриті околи $U \ni x$ можна поміняти на довільні (перевірте це).

Вправа 10.1. Усі перелічені означення залишаються вірними (тобто позначатимуть ті самі об'єкти), якщо замість відкритих околів $U \ni x$ розглядати елементи будь-якої бази топології $\mathcal{T}$, що містять x .

Наступні приклади дозволять нам краще опанувати ці поняття.

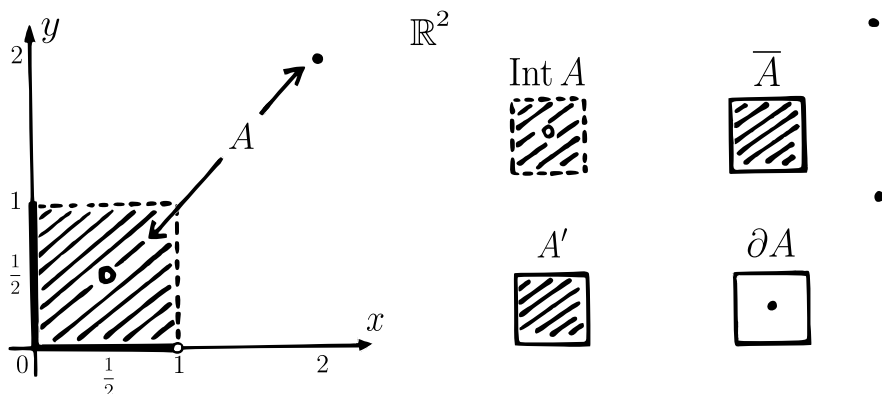
Приклад 10.1. Розглянемо у $\mathbb{R}^2$ (зі стандартною топологією) множину

$$A := ((0, 1) \times (0, 1)) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup \{(2, 2)\} \setminus \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\},$$

що зображена на ілюстрації знизу зліва. Знайдемо для A множини точок типів, що перелічені у означенні 10.1:

- $\text{Int } A = ((0, 1) \times (0, 1)) \setminus \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$ (відкритий квадрат без точки);
- $\overline{A} = ([0, 1] \times [0, 1]) \cup \{(2, 2)\}$ (замкнений квадрат і точка);
- $A' = [0, 1] \times [0, 1]$ (замкнений квадрат);
- $\partial A = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\}) \cup \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), (2, 2) \right\}$ (сторони квадрата та дві точки);
- єдиною ізолюваною точкою $A \in (2, 2)$.

Ці множини можна побачити на наступному рисунку справа:



Приклад 10.2. У просторі X з дискретною топологією одноточкова множина $\{x\}$ є відкритим оком будь-якої точки $x \in X$, звідки нескладно вивести, що для довільної підмножини $A \subset X$

$$\text{Int } A = \overline{A} = A, A' = \partial A = \emptyset,$$

усі точки A ізольовані. Вигляд внутрішності та замикання A також впливає з твердження 10.1 нижче та того, що ця множина є одночасно відкритою та замкнутою.

Приклад 10.3. Якщо $A \subset \mathbb{R}$ – проміжок прямої зі стандартною топологією з кінцями у дійсних точках $a < b$, тобто $A = (a, b)$, $[a, b]$, $[a, b)$ або $(a, b]$, то

$$\text{Int } A = (a, b), \overline{A} = A' = [a, b], \partial A = \{a, b\},$$

ізольованих точок у A немає. Це впливає з того, що у точок (a, b) завжди є відкритий окіл (наприклад, вигляду $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$), що міститься в A , у точок $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ – окіл, що міститься в $\mathbb{R} \setminus A$, а ось у a і b будь-який окіл перетинає обидві ці множини, навіть якщо викинути з нього саму точку. Аналогічні твердження вірні й для напівнескінчених проміжків.

Усі точки підмножини цілих чисел $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ цього ж простору є ізольованими (і тому не є внутрішніми), бо $\{x\} = \mathbb{Z} \cap (x - 1, x + 1)$ для кожної $x \in \mathbb{Z}$. При цьому у будь-якої $x \notin \mathbb{Z}$ є окіл, що не перетинається з $\mathbb{Z}$, тому точками дотику і межовими є в точності точки $\mathbb{Z}$, і жодна точка не є граничною. Отже,

$$\text{Int } \mathbb{Z} = \mathbb{Z}' = \emptyset, \overline{\mathbb{Z}} = \partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

Нарешті, з властивостей множини раціональних чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, а саме з того, що у будь-якому околі будь-якої точки $\mathbb{R}$ є як раціональні, так й

іраціональні точки, випливає, що

$$\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset, \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}' = \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R},$$

а ізолюваних точок немає. Ті ж властивості має множина іраціональних чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Приклад 10.4. З іншого боку, у прямій Зоргенфрея напівінтервали $[a, b)$ є відкритими та замкненими, зокрема, $[x, x + \varepsilon)$ є відкритим околom x для будь-якого $\varepsilon > 0$. Звідси випливає, що

$$\text{Int } [a, b) = \overline{[a, b)} = [a, b)' = [a, b), \partial[a, b) = \emptyset,$$

ізолюваних точок немає.

Вправа 10.2. Описати внутрішність, замикання, похідну множину, межу та ізолювані точки довільної підмножини $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінчених інтервалів.

Твердження 10.1 (Властивості внутрішності, замикання і межі). *Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір, $A, B \subset X$.*

1. Внутрішність A є об'єднанням усіх відкритих підмножин X , що містяться в A :

$$\text{Int } A = \bigcup_{U \subset A, U \in \mathcal{T}} U.$$

2. Внутрішність A є найбільшою за включенням відкритою підмножиною X , що міститься в A .

3. A відкрита тоді й тільки тоді, коли $A = \text{Int } A$.

4. Якщо $A \subset B$, то $\text{Int } A \subset \text{Int } B$ (монотонність внутрішності).

5. Замикання A є перетином усіх замкнених підмножин X , що містять A :

$$\overline{A} = \bigcap_{V \supset A, V \in \mathcal{T}} V.$$

6. Замикання A є найменшою за включенням замкненою підмножиною X , що містить A .

7. A замкнена тоді й тільки тоді, коли $A = \overline{A}$.

8. Якщо $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$ (монотонність замикання).

$$\underline{9.} \quad \overline{A} = A \cup A' = A \cup \partial A = \text{Int } A \sqcup \partial A.$$

$$\underline{10.} \quad \partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

$$\underline{11.} \quad X = \text{Int } A \sqcup \overline{X \setminus A} = \overline{A} \sqcup \text{Int } (X \setminus A).$$

Доведення.

1. Дійсно, належність точки $x \in X$ до такого об'єднання еквівалентна існуванню відкритої U такої, що $x \in U \subset A$. Але це й означає, що $x \in \text{Int } A$.
2. випливає з 1.: $\text{Int } A$ відкрита як об'єднання відкритих підмножин, міститься в A як об'єднання підмножин A , і будь-яка відкрита $U \subset A$ включається до об'єднання з 1., а тому $U \subset \text{Int } A$. Це й значить, що $\text{Int } A$ – найбільша за включенням серед таких множин.
3. $\Leftarrow$ Достатність випливає з того, що $\text{Int } A$ відкрита згідно з 2.
 $\Rightarrow$ Перевіримо необхідність: якщо A відкрита, то, оскільки $A \subset A$, $A \subset \text{Int } A$ в силу 2. З іншого боку, $\text{Int } A \subset A$ завжди за означенням. Тому $A = \text{Int } A$.
4. Для будь-якої $x \in \text{Int } A$ існує відкрита U така, що $x \in U \subset A \subset B$, тому $x \in \text{Int } B$.
5. Доведемо еквівалентну рівність доповнень до цих множин.
Дійсно, якщо точка $x \in X$ не належить до вказаного перетину, то існує замкнена V така, що $A \subset V$ і $x \notin V$. Тоді $U := X \setminus V$ – відкрита, $x \in U$ і $U \cap A = \emptyset$. Це означає, що x не є точкою дотику A : $x \notin \overline{A}$.
І навпаки: з $x \notin \overline{A}$ випливає існування відкритої $U \ni x$ такої, що $U \cap A = \emptyset$, тоді $V := X \setminus U$ – замкнена і має властивості $x \notin V$ і $A \subset V$, отже x не належить до перетину.
6. випливає з 5. так само, як 2. з 1. (перевірте це).
7. доводиться за допомогою 6. так само, як 3. доводиться за допомогою 2. (перевірте це).
8. Доведемо еквівалентне включення доповнень $X \setminus \overline{B} \subset X \setminus \overline{A}$. Дійсно, якщо $x \notin \overline{B}$, то існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \cap B = \emptyset$. Але тоді й $U \cap A \subset U \cap B = \emptyset$. Тому $x \notin \overline{A}$.

9. Перш за все, усі множини A , A' , ∂A і $\text{Int } A \subset A$ включаються до $\overline{A}$, бо з належності $x \in X$ кожній з них випливає, що будь-який відкритий окіл цієї точки має непорожній перетин з A (у випадку $x \in A$ це принаймні сама x). Тому різноманітні об'єднання цих множин теж є підмножинами $\overline{A}$. З іншого боку:

- Якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ повинна міститися якась точка A крім x , тому $x \in A'$. Отже, $\overline{A} \subset A \cup A'$.
- Знову ж, якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ міститься якась точка A і точка $x \in X \setminus A$, тому $x \in \partial A$. Отже, $\overline{A} \subset A \cup \partial A$.
- Якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin \text{Int } A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ міститься якась точка A , і $U \not\subset A$, тому U містить якусь точку $X \setminus A$, отже $x \in \partial A$. Таким чином, $\overline{A} \subset \text{Int } A \cup \partial A$.

Нарешті, якщо $x \in \text{Int } A$, то деякий її відкритий окіл міститься в A , тому не містить точок $X \setminus A$, отже $x \notin \partial A$. Тому $\text{Int } A \cap \partial A = \emptyset$, і останнє об'єднання у формулюванні цього пункту є диз'юнктивним.

10. Це просто переформулювання означення: $x \in \partial A$ означає, що для будь-якої відкритої $U \ni x$ перетини $U \cap A \neq \emptyset$ (тобто $x \in \overline{A}$) і $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ (тобто $x \in \overline{X \setminus A}$).

11. Якщо $x \notin \text{Int } A$, то $U \not\subset A$ для кожної відкритої $U \ni x$, тобто $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, отже $x \in \overline{X \setminus A}$. Таким чином, $X = \text{Int } A \cup \overline{X \setminus A}$. Крім того, якщо $x \in \text{Int } A$, то існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \subset A$, тому $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$, отже $x \notin \overline{X \setminus A}$. Звідси $\text{Int } A \cap \overline{X \setminus A} = \emptyset$, тому об'єднання тут є диз'юнктивним. Другу рівність отримуємо з першої, замінивши A на $X \setminus A$ (і навпаки).

■

З цих основних властивостей можна виводити й інші, наприклад:

Вправа 10.3. Показати, що множина A є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона не перетинається зі своєю межею: $A \cap \partial A = \emptyset$; і замкнутою тоді й тільки тоді, коли вона містить свою межу: $A \supset \partial A$.

11 Властивості щільності та сепарабельності

Означення 11.1. Підмножина A топологічного простору X зветься *всюди щільною* в X , якщо $\overline{A} = X$, і *ніде не щільною* в X , якщо $\text{Int } \overline{A} = \emptyset$.

Зауваження. З означення замикання випливає, що A є всюди щільною тоді й тільки тоді, коли має непорожній перетин з будь-яким відкритим околom будь-якої точки X , тобто з будь-якою непорожньою відкритою підмножиною X . Втім, тут достатньо обмежитися множинами з будь-якої бази (перевірте це). Зв'язок між введеними поняттями сформульовано у наступній вправі:

Вправа 11.1. Показати, що множина A ніде не щільна тоді й тільки тоді, коли $\text{Int}(X \setminus A)$ всюди щільна (підказка: використати пункт 11. у твердженні 10.1). Вивести з цього, що відкрита множина всюди щільна тоді й тільки тоді, коли її доповнення ніде не щільне.

Означення 11.2. Топологічний простір X називається *сепарабельним*, якщо в X існує не більш ніж зліченна всюди щільна підмножина.

Приклад 11.1. З прикладу 10.2 випливає, що єдиною всюди щільною підмножиною простору X з дискретною топологією є X , а єдиною ніде не щільною – $\emptyset$. Зокрема, такий простір сепарабельний тоді й тільки тоді, коли множина X не більш ніж зліченна.

Приклад 11.2. Як було встановлено у прикладі 10.3, у $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, тому раціональні та ірраціональні числа утворюють всюди щільні підмножини, що доповнюють одна одну. Оскільки перша з них є зліченною, цей простір сепарабельний. З іншого боку, $\text{Int } \mathbb{Z} = \text{Int } \mathbb{Z} = \emptyset$, тобто цілі числа утворюють ніде не щільну підмножину.

Приклад 11.3. У $\mathbb{R}^n$ зі стандартною топологією множина $\mathbb{Q}^n$ точок з раціональними координатами зліченна і всюди щільна. Дійсно, будь-який відкритий окіл U будь-якої точки $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ містить деякий елемент бази метричної топології метрики ρ_∞ – куб

$$B_\varepsilon(x) = (x^1 - \varepsilon, x^1 + \varepsilon) \times \dots \times (x^n - \varepsilon, x^n + \varepsilon),$$

де $\varepsilon > 0$. Оскільки для будь-якого i від 1 до n інтервал $(x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon)$ містить раціональне $q^i \in \mathbb{Q}$, точка $q := (q^1, \dots, q^n) \in \mathbb{Q}^n$ міститься у $B_\varepsilon(x) \subset U$. Отже, $\mathbb{R}^n$ сепарабельний. З цього і твердження 11.2 нижче випливатиме, що він задовольняє другій аксіомі зліченності.

Прикладами ніде не щільних підмножин $\mathbb{R}^n$ є скінченні, $\mathbb{Z}^n$ (аналогічно до випадку $n = 1$ у попередньому прикладі) і нетривіальні афінні підпростори, скажімо, прямі у площині, прямі та площини у тривимірному просторі (чому?).

Сепарабельність тісно пов'язана з аксіомами зліченності, тому зазвичай її теж відносять до цієї групи аксіом.

Твердження 11.1. *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він є сепарабельним.*

Доведення. Отже, нехай $\mathcal{B}$ – не більш ніж зліченна база простору X . Занумеруємо її елементи: $\mathcal{B} = \{V_i\}_{i=1}^\infty$, де замість ∞ може стояти натуральне n . Для кожного i тоді оберемо якусь точку $x_i \in V_i$. Тоді не більш ніж зліченна множина таких точок $A := \{x_i\}$ є всюди щільною. Дійсно, для будь-якої $x \in X$ та відкритої $U \ni x$ існує i таке, що $x \in V_i \subset U$, а отже $x_i \in V_i \subset U$, тобто $U \cap A \neq \emptyset$.

■

Вправа 11.2. Показати, що обернене твердження, взагалі кажучи, невірне (навести контрприклад).

Твердження 11.2. *Метричний простір задовольняє другій аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли він є сепарабельним.*

Доведення. В силу попереднього твердження, тут залишилося довести лише достатність. Отже, нехай A – не більш ніж зліченна всюди щільна підмножина метричного простору (X, ρ) . Покажемо, що тоді зліченна система відкритих куль

$$\mathcal{B} := \left\{ B_{\frac{1}{n}}(y) \right\}_{y \in A, n \in \mathbb{N}}$$

є його базою. Дійсно, у будь-яку відкриту U будь-яка точка $x \in U$ входить разом з відкритою кулею $B_\varepsilon(x)$ для деякого $\varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset U$. Оберемо натуральне n таке, що $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Куля $B_{\frac{1}{n}}(x)$ повинна містити точку $y \in A$, бо є непорожньою відкритою множиною. Тоді

$$x \in B_{\frac{1}{n}}(y) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \subset B_{\varepsilon-\rho(x,y)}(y) \subset B_\varepsilon(x) \subset U,$$

де друге включення куль випливає з $\rho(x, y) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, а третє – з нерівності трикутника (перевірте це).

■

Вправа 11.3. Показати, що у метричному просторі $C[a, b]$ з прикладу 7.3 підмножина $\mathbb{Q}[x]$ поліномів з раціональними коефіцієнтами є зліченною і всюди щільною, тому цей простір сепарабельний.

Вправа 11.4. Показати, що метричні простори ℓ_p з вправи 7.1 сепарабельні для усіх $p \in [1, +\infty)$, а ℓ_∞ не є сепарабельним.

12 Неперервні відображення

Наступне означення визначає, які відображення топологічних просторів ми вважаємо "природними" для них.

Означення 12.1. Нехай $(X, \mathcal{T})$ та $(Y, \mathcal{S})$ – топологічні простори. Відображення $f: X \rightarrow Y$ зветься *неперервним*, якщо прообрази відкритих множин відкриті: $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ для будь-якої $V \in \mathcal{S}$.

Перш за все, встановимо зв'язок між цим поняттям і більш звичним завдяки курсу аналізу поняттям неперервності у точці.

Означення 12.2. Відображення топологічних просторів $f: X \rightarrow Y$ називається *неперервним у точці* $x \in X$, якщо для будь-якого відкритого околу її образу $V \ni f(x)$ існує її відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $U \subset f^{-1}(V)$.

Твердження 12.1. Відображення $f: X \rightarrow Y$ неперервне тоді й тільки тоді, коли воно неперервне у кожній точці $x \in X$.

Доведення. $\Rightarrow$ Для доведення неперервності у x неперервного f покладемо у означенні $U := f^{-1}(V)$. Це буде потрібний відкритий окіл x .

$\Leftarrow$ Нехай $V \subset Y$ – довільна відкрита підмножина. Для будь-якої $x \in f^{-1}(V)$ відображення f неперервне в x , отже існує відкрита U_x така, що $x \in U_x \subset f^{-1}(V)$. Це означає, що $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$ – відкрита. ■

Зауваження. У означенні 12.1 можна замість відкритих множин використати замкнені (чому?). У означенні 12.2 умову $U \subset f^{-1}(V)$ можна замінити на еквівалентну $f(U) \subset V$. Як і в означеннях минулих розділів, відкриті околи у ньому можна замінити на довільні. Крім того, їх можна замінити на елементи довільних баз відповідних топологій у точках. Більш строго це означає наступне:

Твердження 12.2. Нехай $(X, \mathcal{T})$ і $(Y, \mathcal{S})$ – топологічні простори, $x \in X$, $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ – бази $\mathcal{T}$ у x і $\mathcal{S}$ у $f(x)$ відповідно. Відображення $f: X \rightarrow Y$ неперервне у точці x тоді й тільки тоді, коли для будь-якої $V \in \mathcal{C}$ існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f(U) \subset V$.

Доведення. $\Rightarrow$ Будь-яка $V \in \mathcal{C}$ буде відкритим околом $f(x)$, тому згідно з означенням неперервності в x існує відкрита $W \ni x$ така, що $f(W) \subset V$. З означення бази в точці, існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $U \subset W$. Тоді $f(U) \subset f(W) \subset V$.

$\Leftarrow$ Аналогічно, для будь-якої відкритої $V \ni f(x)$ існує $W \in \mathcal{C}$ така, що $W \subset V$. За умовою тоді існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f(U) \subset W \subset V$. При цьому U буде відкритим околом x . ■

Наслідок 12.1. Нехай (X, ρ) і (Y, σ) – метричні простори. Відображення $f: X \rightarrow Y$ неперервне у точці $x \in X$ тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$.

Доведення. Випливає з попереднього твердження і того, що відкриті кулі з центром у x утворюють базу метричної топології в x . ■

Зауваження. Включення кулі у цьому формулюванні означає, що з $\rho(x, y) < \delta$ випливає $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Це вже звичне ”епсilon-дельта” означення. Далі через $C(X, Y)$ позначатимемо множину неперервних відображень $X \rightarrow Y$.

Вправа 12.1. Показати, що відображення $f: X \rightarrow Y$ топологічних просторів неперервне тоді й тільки тоді, коли $f^{-1}(V)$ відкрита для будь-якої $V \in \mathcal{C}$, де $\mathcal{C}$ – якась база топології Y .

Приклад 12.1. Для будь-яких просторів X та Y постійне відображення $f = y_0: X \rightarrow Y$, що кожній $x \in X$ ставить у відповідність одну й ту саму $f(x) = y_0$, неперервне, оскільки прообраз будь-якої множини $f^{-1}(V)$ – це або $\emptyset$ (якщо $y_0 \notin V$), або X (якщо $y_0 \in V$).

Приклад 12.2. Тотожне відображення будь-якого простору X на себе $f = id_X: X \rightarrow X$, що кожній $x \in X$ ставить у відповідність її ж ($id_X(x) = x$), є неперервним, бо $id_X^{-1}(V) = V$ для будь-якої V .

Приклад 12.3. Якщо X має дискретну топологію, то $f \in C(X, Y)$ для будь-яких Y і $f: X \rightarrow Y$, бо всі прообрази відкриті.

Приклад 12.4. Якщо Y має антидискретну (тривіальну) топологію, то $f \in C(X, Y)$ для будь-яких X і $f: X \rightarrow Y$, бо прообрази відкритих множин $f^{-1}(Y) = X$ і $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ відкриті.

Вправа 12.2. Як зміниться множина $C(X, Y)$, якщо послабити або посилити топологію X або Y ?

Приклад 12.5. Ліпшицеві відображення метричних просторів (зокрема ізометрії) неперервні у відповідних метричних топологіях. Дійсно, нехай у позначеннях наслідку 12.1 відображення $f: X \rightarrow Y$ має константу Ліпшиця $C > 0$: $\sigma(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y)$ для будь-яких $x, y \in X$. Це означає, що $f(B_{\frac{\varepsilon}{C}}(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, тобто достатньо взяти $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$.

Приклад 12.6. Наслідок 12.1 означає, зокрема, що наше поняття неперервності в точці узагальнює означення неперервності функції багатьох змінних $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (зокрема $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) з курсу аналізу, якщо наділити $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}$ стандартними топологіями. Більш того, зберігаються звичні властивості функцій, навіть якщо розглянути більш загальну область визначення:

Вправа 12.3. Нехай $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ – неперервні функції на довільному просторі X , тобто його відображення у $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією. Показати, що тоді $f + g, fg, \frac{f}{g}$ (остання – на області визначення з індукованою топологією, пор. з твердженням 12.4 нижче) також є неперервними.

Вправа 12.4. Нехай $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ – відображення довільного простору у $\mathbb{R}^n$ зі стандартною топологією, $f = (f^1, \dots, f^n)$, де $f^i: X \rightarrow \mathbb{R}$ – координатні функції f . Показати, що $f \in C(X, \mathbb{R}^n)$ тоді й тільки тоді, коли $f^i \in C(X, \mathbb{R})$ для усіх i .

Зауваження. З цих двох вправ випливає, що для будь-яких $f, g \in C(X, \mathbb{R}^n)$ і $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ лінійна комбінація $\lambda f + \mu g \in C(X, \mathbb{R}^n)$, тобто $C(X, \mathbb{R}^n)$ утворює векторний підпростір у векторному просторі $(\mathbb{R}^n)^X$ усіх відображень $X \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Твердження 12.3. Композиція неперервних відображень є неперервним відображенням: якщо $f \in C(Y, Z)$ і $g \in C(X, Y)$, то $f \circ g \in C(X, Z)$.

Доведення. Дійсно, для будь-якої відкритої $V \subset Z$ маємо за означенням, що $f^{-1}(V) \subset Y$ відкрита, а отже й $(f \circ g)^{-1}(V) = g^{-1}(f^{-1}(V)) \subset X$ відкрита.

■

Твердження 12.4. Нехай X, Y – топологічні простори, $A \subset X$ і $B \subset Y$ – їхні топологічні підпростори (тобто підмножини з індукованою топологією), $f: X \rightarrow Y$ таке, що $f(A) \subset B$. Якщо $f \in C(X, Y)$, то його обмеження $f|_A \in C(A, B)$.

Доведення. За означенням індукованої топології, будь-яка відкрита підмножина B має вигляд $B \cap V$, де V – відкрита в Y . При цьому $(f|_A)^{-1}(B \cap V) = A \cap f^{-1}(V)$ відкрита в A , бо $f^{-1}(V)$ відкрита в X . Тому $f|_A$ неперервне.

■

Зауваження. Іншими словами, неперервні відображення топологічних просторів індукують неперервні відображення їхніх підпросторів.

Також неперервність можна використати для характеристики прообразу топології (зокрема індукованої топології), як показано у наступному твердженні. Зауважимо, що у частково впорядкованій множині існує не більше одного найменшого чи найбільшого елемента, тому подібні твердження дійсно визначають відповідну топологію однозначно і можуть слугувати у якості альтернативних означень.

Твердження 12.5. *Нехай $f: X \rightarrow Y$ – відображення деякої множини X у топологічний простір $(Y, \mathcal{T})$. Прообраз $f^{-1}(\mathcal{T})$ тоді є найслабшою топологією на X з тих, у яких f неперервне.*

Доведення. Ми вже знаємо, що $f^{-1}(\mathcal{T})$ – топологія. За її побудовою, $f^{-1}(V) \in f^{-1}(\mathcal{T})$ для будь-якої $V \in \mathcal{T}$, тобто f дійсно є неперервним. Але якщо f неперервне відносно будь-якої іншої топології $\mathcal{S}$ на X , то й для неї з означення неперервності матимемо $f^{-1}(V) \in \mathcal{S}$ для усіх $V \in \mathcal{T}$, тобто $f^{-1}(\mathcal{T}) \prec \mathcal{S}$.

■

13 Границі та секвенційні означення

Наступне означення узагальнює ще одне класичне поняття аналізу.

Означення 13.1. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ – послідовність у топологічному просторі X . Говорять, що вона *збігається* до точки $x \in X$ (або що x – її *границя*), якщо для будь-якого відкритого околу $U \ni x$ існує натуральне N таке, що $x_n \in U$ для будь-якого $n \geq N$.

Зауваження. Аналогічно до означень попереднього розділу, можна у якості U брати довільні околи або множини з довільної бази в x (перевірте це). Наприклад, використавши кулі $B_\varepsilon(x)$ для метричних просторів як у наслідку 12.1, отримаємо звичне "епсilon-означення" границі: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне N таке, що $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ для будь-якого $n \geq N$. Тому збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ до точки x у метричному просторі еквівалентна збіжності відстаней $\rho(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. За потреби будемо використовувати класичне позначення збіжності $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ або просто $x_n \rightarrow x$. Але зауважимо, що тепер границя може не бути єдиною!

Приклад 13.1. Розглянемо послідовність $\{x_n = x_0 + \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

- У стандартній топології x_0 – єдина границя $\{x_n\}$, як відомо з курсу аналізу (і неважко перевірити самостійно). Це так і в прямій Зоргенфрея (перевірте).
- У топології напівнескінчених інтервалів $x \in \mathbb{R}$ є границею $\{x_n\}$ тоді й тільки тоді, коли $x \leq x_0$. Дійсно, будь-який відкритий окіл такої точки має вигляд $(a, +\infty)$ з $a < x \leq x_0$, а отже містить усі елементи $\{x_n\}$. З іншого боку, у будь-якої точки $x > x_0$ існує окіл $(a, +\infty)$ з $a \in (x_0, x)$, що містить лише скінченну кількість елементів послідовності $\{x_n\}$ або зовсім їх не містить.
- Визначимо топологію базою з напівінтервалів вигляду $(a, b]$ аналогічно до топології Зоргенфрея. У цій топології границь у $\{x_n\}$ не існує. Дійсно, для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ можна знайти $\varepsilon > 0$ таке, що відкритий окіл $(x - \varepsilon, x]$ точки x буде містити лише скінченну кількість елементів послідовності $\{x_n\}$ або не міститиме їх зовсім.

Вправа 13.1. Описати границі $\{x_n\}$ у дискретній, антидискретній та кофінітній топологіях. Чи можна щось сказати про границі довільної послідовності у довільній множині з цими топологіями?

Твердження 13.1. *Якщо відображення $f: X \rightarrow Y$ топологічних просторів неперервне у точці $x \in X$, то для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ у X , що збігається до x , її образ $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ збігається до $f(x)$. Якщо в x існує не більш ніж зліченна база (зокрема, якщо X задовольняє першій аксіомі зліченності), то вірно й обернене твердження.*

Доведення. $\Rightarrow$ Отже, нехай f неперервне в x і $x_n \rightarrow x$. Тоді для будь-якої відкритої $V \ni f(x)$ існує відкрита U така, що $x \in U \subset f^{-1}(V)$, і, у свою чергу, існує натуральне N таке, що для усіх $n \geq N$ маємо $x_n \in U$, а отже $f(x_n) \in V$. Таким чином, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

$\Leftarrow$ Нехай тепер $\mathcal{B}$ – не більш ніж зліченна база в x . Перенумеруємо її елементи: $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n=1}^\infty$. При цьому, якщо $\mathcal{B}$ скінченна, просто візьмемо усі множини починаючи з деякого індекса рівними. Покладемо $W_n := U_1 \cap \dots \cap U_n$ для усіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ – теж база в x (оскільки $x \in W_n \subset U_n$ для будь-якого n) і є незростаючою послідовністю відкритих околів x : $W_1 \supset W_2 \supset \dots \supset W_n \supset W_{n+1} \supset \dots \ni x$.

Припустимо, що умова на послідовності виконується, але f не є неперервним у x : існує відкрита $V \ni f(x)$ така, що для будь-якої відкритої $U \ni x$ її образ $f(U) \not\subset V$. Зокрема, тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in W_n$ такий, що $f(x_n) \notin V$.

Покажемо, що $x_n \rightarrow x$ (це буде вірно для будь-якої послідовності з властивістю $x_n \in W_n$). Дійсно, для будь-якої відкритої $U \ni x$, оскільки

$\mathcal{B}$ – база в x , існує таке натуральне N , що $x \in W_N \subset U_N \subset U$. Тоді для кожного $n \geq N$ відповідний елемент послідовності $x_n \in W_n \subset W_N \subset U$, що й доводить збіжність до x . З іншого боку, $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$, бо усі елементи послідовності $\{f(x_n)\}$ лежать за межами відкритого околу $V \ni f(x)$. Отримуємо протиріччя. ■

Зауваження. Умову попереднього твердження також називають умовою *секвенційної неперервності* або *секвенційним* (тобто даним у термінах послідовностей) означенням неперервності. Виявляється, що у цих термінах можна описувати не лише неперервність: *секвенційним замиканням* множини інколи називають сукупність границь усіх послідовностей, що лежать у цій множині. Сама множина міститься у своєму секвенційному замиканні за побудовою, бо кожна її точка є границею постійної послідовності. Множину тоді називають *секвенційно замкненою*, якщо вона дорівнює такому замиканню.

Твердження 13.2. Нехай $\hat{A}$ – секвенційне замикання підмножини $A \subset X$ топологічного простору, тобто

$$\hat{A} := \{x \in X \mid \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A: x_n \rightarrow x\}.$$

Тоді $\hat{A} \subset \bar{A}$. Якщо X задовольняє першій аксіомі зліченності, то вірне й обернене включення.

Доведення. $\subseteq$ Якщо $x \in \hat{A}$, то будь-яка відкрита $U \ni x$ містить усі елементи відповідної послідовності, починаючи з деякого індекса N : $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset U \cap A$. Отже, $U \cap A \neq \emptyset$. Тому $x \in \bar{A}$.

$\supseteq$ Для будь-якого $x \in \bar{A}$ побудуємо послідовність околів $\{W_n\}$ як у попередньому доведенні. З означення замикання, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in W_n \cap A$. Як і раніше, тоді $x_n \rightarrow x$ і тому $x \in \hat{A}$. ■

Вправа 13.2. Навести приклади, що демонструють невірність оберненої імплікації у твердженні 13.1 і оберненого включення у твердженні 13.2 для загального простору X , тобто те, що секвенційні означення не можна вільно використовувати без аксіом зліченності.

14 Гомеоморфність і топологічні інваріанти

Поняття неперервного відображення дозволяє нам визначити основне відношення еквівалентності топологічних просторів – їхню гомеоморфність. Вона формалізує інтуїтивне уявлення про ”перетворення множин без розривів і склеювань”.

Означення 14.1. Відображення $f: X \rightarrow Y$ топологічних просторів X та Y зветься їх *гомеоморфізмом*, якщо f – бієкція і при цьому f та f^{-1} неперервні. Якщо існує гомеоморфізм $f: X \rightarrow Y$, то говорять, що X *гомеоморфний* Y (або що X та Y гомеоморфні) і позначають це $X \cong Y$.

Зауваження. Тобто гомеоморфізм – це взаємно однозначне і взаємно неперервне відображення.

Твердження 14.1. *Гомеоморфізм є відношенням еквівалентності топологічних просторів.*

Доведення. Перевіримо умови з означення еквівалентності.

- *Рефлексивність*: для будь-якого простору X тотожне відображення $id_X: X \rightarrow X$ – гомеоморфізм (див. приклад 12.2), тому $X \cong X$.
- *Симетричність*: якщо $X \cong Y$ і $f: X \rightarrow Y$ – відповідний гомеоморфізм, то $f^{-1}: Y \rightarrow X$ – теж гомеоморфізм за означенням (бо $(f^{-1})^{-1} = f$), тому $Y \cong X$.
- *Транзитивність*: нехай $X \cong Y$, $Y \cong Z$, і $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ – відповідні гомеоморфізми. Тоді $g \circ f: X \rightarrow Z$ – бієкція, $g \circ f \in C(X, Z)$ і $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \in C(Z, X)$ згідно з твердженням 12.3. Отже, $g \circ f$ – гомеоморфізм, тому $X \cong Z$.

■

Приклад 14.1. Якщо X та Y одночасно наділені дискретною або антидискретною топологією, то будь-яка бієкція між ними буде гомеоморфізмом (див. приклади 12.3 і 12.4). Тому $X \cong Y$ тоді й тільки тоді, коли ці множини рівнопотужні.

Приклад 14.2. В силу прикладу 12.5, біліпшицеві еквівалентності метричних просторів (зокрема ізометрії) є гомеоморфізмами.

Приклад 14.3. Афінні перетворення $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (тобто відображення вигляду $f(x) = Ax + b$, де $A \in GL(n, \mathbb{R})$ – невироджена матриця і $b \in \mathbb{R}^n$) є гомеоморфізмами відносно стандартної топології (перевірте це).

Приклад 14.4. Усі інтервали в $\mathbb{R}$ (включно з самою $\mathbb{R}$) з топологіями, що індуковані стандартною топологією прямої, гомеоморфні. Дійсно, розглянемо відображення:

$$\begin{array}{ll} (0, 1) \rightarrow (a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b: & t \mapsto (1-t)a + tb; \\ (0, 1) \rightarrow (0, +\infty): & t \mapsto \frac{t}{1-t}; \\ (0, +\infty) \rightarrow (a, +\infty), a \in \mathbb{R}: & t \mapsto t + a; \\ (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, a), a \in \mathbb{R}: & t \mapsto -t + a; \\ (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: & t \mapsto \ln t. \end{array}$$

Замість другої з цих функцій також можна взяти $t \mapsto \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}t$. Неважко перевірити, що це все бієкції, і, як відомо з аналізу (див. приклад 12.6), усі ці функції та обернені до них – неперервні, а отже індукують неперервні відображення інтервалів в силу твердження 12.4. З транзитивності гомеоморфності у твердженні 14.1 тоді випливає, що усі перелічені типи інтервалів гомеоморфні.

Аналогічно, усі відрізки $[a, b]$ гомеоморфні між собою. Те ж вірне й для усіх напівінтервалів вигляду $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$ або $(-\infty, a]$ (тут всюди $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). При цьому жодні два проміжки з різних груп не гомеоморфні, як буде продемонстровано у наступних розділах (це також випливає з наступної вправи, що, втім, неявно використовує зв'язність, яка з'явиться у цьому курсі пізніше). Зауважимо, що всі використані у цьому прикладі функції строго монотонні, і це не випадково:

Вправа 14.1. Показати, що функція $f: A \rightarrow B$ є гомеоморфізмом проміжків $A \subset \mathbb{R}$ і $B \subset \mathbb{R}$ тоді й тільки тоді, коли вона неперервна, строго монотонна і сюр'єктивна (підказка: використати теорему Больцано – Коші про проміжне значення функції, див. її узагальнення у розділі 25).

Вправа 14.2. Тут і далі позначатимемо через $B^n := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ евклідову відкриту кулю радіуса 1 з центром у початку координат. Показати, що $B^n \cong \mathbb{R}^n$. Чи вірно це для довільної непорожньої відкритої опуклої підмножини $\mathbb{R}^n$? (Відповідь див., наприклад, у [6].)

Література

- [1] О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995.
- [2] А.Я. Дороговцев. Математичний аналіз. Частина 1. Київ: Либідь, 1993.
- [3] Є.В. Петров. Топологія. Базовий курс. Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2025.
- [4] М.А. Armstrong. Basic Topology. Springer, 1983.
- [5] N. Bourbaki. General Topology. Chapters 1–4. Springer, 1995.
- [6] S. Geschke. Convex Open Subsets of $\mathbb{R}^n$ Are Homeomorphic to n -dimensional Open Balls. Preprint, Hausdorff Center for Mathematics, July 4 2012.
- [7] C. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge University Press, 1980.
- [8] S.A. Morris. Topology Without Tears. Ebook, 2012 (at www.topologywithouttears.net).
- [9] J.R. Munkres. Topology. Second Edition. Prentice Hall, 2000.
- [10] L.A. Steen, J.A. Seebach, Jr. Counterexamples in Topology. Dover Publications, 1995.