

Розглянемо атлас $\mathcal{R} : \mathcal{I}_k := \{(\mathbb{R}, t \mapsto t^{\frac{\varphi_k}{2k-1}})\}_{k=1}^{\infty}$

Очевидно, це дійсно атлас з 1 картою, що задають на $\mathbb{R}$ ∞ -м. структуру. При цьому для $k \neq l$ відомо, переходу

$$\varphi_l \circ \varphi_k^{-1} : x \mapsto x^{\frac{2l-1}{2k-1}}$$

$$\varphi_k \circ \varphi_l^{-1} : x \mapsto x^{\frac{2k-1}{2l-1}}$$

Оскільки з цих показників $< 1 \Rightarrow$ відп. φ -ція не гладка, бо її похідна не визначена в 0.

Отже, $\mathcal{A}_k \neq \mathcal{A}_l \Rightarrow \{[\mathcal{A}_k]\}_{k=1}^{\infty}$ - повністю різні (станд. при $k=1$) $2k$ -м. стр. $\mathcal{A}_k$ -но можна збудувати на $\mathbb{R}^n \forall n$.

При цьому $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto t^{2k-1}$ у картах $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ і $(\mathbb{R}, \varphi_k)$ має вигляд $x \mapsto x$, і

обернене $F^{-1} : t \mapsto t^{\frac{1}{2k-1}}$ так само $x \mapsto x$, і

Т.ч. F - дифеоморфізм $(\mathbb{R}, [\mathcal{A}_1]) \rightarrow (\mathbb{R}, [\mathcal{A}_k])$, тобто ці $2k$ -м. стр. еквівалентні. За транзитивністю, може й усі $[\mathcal{A}_k]$ екв-ні. Більш того, $\forall 2k$ -м. стр. на $\mathbb{R}$ екв-ні, і це вірно для $\mathbb{R}^n$ при $\forall n \neq 1$.

Д/з. Побудувати зліченну кількість різних еквівалентних ∞ -м. структур на S^n .

χ и вложение $\chi: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ регулярны?

Для проверки треба обрати лок. коорд. в okolí $\forall$ точки S^n . Параметриз. для $p = N = (0, \dots, 0, 1)$

(U_{n+1}, φ_{n+1}) - n -ий лист (единица карты стандарт. атласа $\mathbb{R}^{n+1}$) лок. заданная $\chi = id_{\varphi_{n+1}} \circ \chi \circ \varphi_{n+1}^{-1} = \varphi_{n+1}^{-1}: (y^1, \dots, y^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n, \sqrt{1-|y|^2})$. M -ая точка:

$$\left(\frac{\partial \chi^a}{\partial y^i} \right)_{\substack{a=1, \dots, n+1 \\ i=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{y^1}{\sqrt{1-|y|^2}} & -\frac{y^2}{\sqrt{1-|y|^2}} & \dots & -\frac{y^n}{\sqrt{1-|y|^2}} \end{pmatrix}$$

Чтобы проверить регулярность, треба показать, что строки y^i n -й стр. независимы, можно их рассмотреть n .

Или так, то minor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Пока $\left\{ \chi_{y^1} = \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{y^1}{\sqrt{1-|y|^2}} \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \dots, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{y^n}{\sqrt{1-|y|^2}} \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}}_{\chi_{y^n}} \right\}$ - базис $T_p(S^n, \chi)$

Или эти векторы $\perp \chi(p) = (y^1, \dots, y^n, \sqrt{1-|y|^2})$, потому $T_p(S^n, \chi) = \chi(p)^\perp$. В базисе, $\forall$ лок. коорд. $\langle \chi, \chi \rangle = 1 \Rightarrow \forall i: 0 = \frac{\partial}{\partial y^i} \langle \chi, \chi \rangle = 2 \langle \chi_{y^i}, \chi \rangle$, потому все $\chi_{y^i} \in \chi^\perp$. Основание базисности $\dim \text{подпространство} = n$, все совпадает.

Для стереогр. коорд. (U_S, φ_S) в okolí $p = N$ лок. заданная χ - где $\varphi_S^{-1}: (y^1, \dots, y^n) \mapsto \left(\frac{2y^1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y^n}{|y|^2+1}, \frac{1-|y|^2}{|y|^2+1} \right)$. M -ая точка:

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{2(1-(y^1)^2+(y^2)^2+\dots+(y^n)^2)}{(|y|^2+1)^2} & -\frac{4y^1y^2}{(|y|^2+1)^2} & \dots & -\frac{4y^1y^n}{(|y|^2+1)^2} \\ \frac{4y^2y^1}{(|y|^2+1)^2} & \frac{2((y^1)^2-(y^2)^2+\dots-(y^n)^2)}{(|y|^2+1)^2} & \dots & -\frac{4y^2y^n}{(|y|^2+1)^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{4y^n y^1}{(|y|^2+1)^2} & \dots & -\frac{4y^n y^2}{(|y|^2+1)^2} & \dots & \frac{2((y^1)^2+(y^2)^2+\dots-(y^n)^2)}{(|y|^2+1)^2} \end{array} \right)$$

$$\left(\frac{-y^1}{(1+|y|^2)^2}, \frac{-y^2}{(1+|y|^2)^2}, \dots, \frac{-y^n}{(1+|y|^2)^2} \right)$$

Потім можна перевірити, що ранг $= n$ (але не потрібно, оскільки ми це зробили для першої картки).

Звернемо, $v = (\lambda^1, \dots, \lambda^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ належить до $T_N(S^n, v) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda^{n+1} = 0, \quad v = \lambda^1 u_{y^1} + \dots + \lambda^n u_{y^n}$$

Але по в сферах інших точках.
Діалі сферичних коорд. n -го дналі:

$$\begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \\ \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Верхній міnor $= -\sin \varphi \cos \psi$. Оскільки $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$\sin \varphi > 0$ лише при $\varphi > 0$. Тоді ця n -га:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin \psi \\ 0 & \cos \psi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\sin \psi$ і $\cos \psi$ не можуть $= 0$ одночасно, завжди $\exists$ 2×2 -міnor, що $\neq 0$. Тому ранг 2 , багаче регулярне.

Д/З Показати, що $\iota: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4: (x:y:z) \mapsto$

$$\mapsto \left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}, \frac{xz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{yz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+z^2} \right)$$

ін'єктивне, ω -маже і регулярне.

Возьмемо персід від сферичних коорд. до стереогр.

(u, v) на S^2 :

$$\varphi_N \cdot \Phi^{-1}(\varphi, \psi) = \varphi_N(\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi) = \left(\frac{\cos \varphi \cos \psi}{1 - \sin \varphi}, \frac{\cos \varphi \sin \psi}{1 - \sin \varphi} \right)$$

n -га дналі:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \varphi} & \frac{\partial u}{\partial \psi} \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} & \frac{\partial v}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin \varphi \cos \psi (1 - \sin \varphi) - \cos \varphi \cos \psi (-\cos \varphi)}{(1 - \sin \varphi)^2} & -\frac{\cos \varphi \sin \psi}{1 - \sin \varphi} \\ \frac{-\sin \varphi \sin \psi (1 - \sin \varphi) - \cos \varphi \sin \psi (-\cos \varphi)}{(1 - \sin \varphi)^2} & \frac{\cos \varphi \cos \psi}{1 - \sin \varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1 - \sin \varphi} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$\text{Поэтому } \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{1 - \sin \varphi} \left(\cos \psi \frac{\partial}{\partial u} + \sin \psi \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \left(-\sin \psi \frac{\partial}{\partial u} + \cos \psi \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

$$\text{Пусть } a = \lambda \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial}{\partial \psi} = \tilde{\lambda} \frac{\partial}{\partial u} + \tilde{\mu} \frac{\partial}{\partial v} \in T_p S^2, \text{ то}$$

$$\tilde{\lambda} = \lambda \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{1}{1 - \sin \varphi} (\lambda \cos \psi - \mu \cos \varphi \sin \psi)$$

$$\tilde{\mu} = \lambda \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{1}{1 - \sin \varphi} (\lambda \sin \psi + \mu \cos \varphi \cos \psi)$$

Например,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \varphi} & \frac{\partial u}{\partial \psi} \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} & \frac{\partial v}{\partial \psi} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

2/3 Занесем в матрицу (u, v) .

~~Матрица~~ ~~зависит от точки~~ ~~на поверхности~~ ~~и~~ ~~нужно~~ ~~найти~~ ~~ее~~ ~~в~~ ~~этой~~ ~~точке~~

Например, пусть $p = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $a = (1, 1, \sqrt{2}) \in T_p S^2$.

Для p $\varphi = 0$, $\psi = \frac{7\pi}{4}$.

$$a = \lambda \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial z}$$

Поэтому, $d\varphi(\frac{\partial}{\partial \varphi})$ $d\psi(\frac{\partial}{\partial \psi})$

$$a = \lambda \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial z} \right) =$$

$$= \lambda \left(-\sin \varphi \cos \psi \frac{\partial}{\partial x} - \sin \varphi \sin \psi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \right) + \mu \left(-\cos \varphi \sin \psi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \cos \psi \frac{\partial}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mu \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\text{Поэтому } \lambda = \mu = \sqrt{2}: a = \sqrt{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \psi} \right)$$

$$\text{Таким образом } a = \tilde{\lambda} \frac{\partial}{\partial u} + \tilde{\mu} \frac{\partial}{\partial v}, \text{ то } \tilde{\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda + \frac{\sqrt{2}}{2} \mu = 2, \tilde{\mu} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda + \frac{\sqrt{2}}{2} \mu = 0$$

$$\text{то есть } a = 2 \frac{\partial}{\partial u} \quad (\text{поэтому, } 2\varphi_u)$$

$$\text{Видно, что } p \quad (u, v) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{ тогда за}$$

$$\text{ф-лами буле (милон для } \varphi_u \text{ зависит } \varphi_s) \quad \varphi_u = \left(\frac{2(1-u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{4uv}{(1+u^2+v^2)^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{4u}{(1+u^2+v^2)^2} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} a.$$

Знаменю у $\mathbb{R}P^2$ гомоморфизм $\gamma'(\frac{\pi}{4})$ го $\gamma(t) = (\cos t : \sin t : t)$.

$\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\pi}{4}) \in U_3$, ноль вкупнама (U_3, Φ_3) :

лех. загана γ :

$$\Phi_3 \circ \gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{t}, \frac{\sin t}{t} \right)$$

$$\text{Омне, } \gamma'(t) = (\gamma^1)'(t) \frac{\partial}{\partial u} + (\gamma^2)'(t) \frac{\partial}{\partial v} = \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\text{Омне, } \gamma'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{16}{\pi^2} \left(-(\frac{\pi}{4} + 1) \frac{\partial}{\partial u} + (\frac{\pi}{4} - 1) \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

У дуге фибрација, ко нонену лех. сучеру коопу.
В оми $P \in M$ сачуно у бигн. оупуноу n -го $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
мензор $(2,0)$, $(1,1)$ адо $(0,2)$?

$$\text{Томо гл } (2,0): T = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$$

$$\text{Тм нерсог го } (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n): \tilde{T}_{ij} = \delta_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}$$

Уе нбурно гоуруоу δ_{ij} .

$$\text{Уе не мах, до гл } (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) = (2x^1, \dots, x^n) \quad \tilde{T}_{11} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^1} \right)^2 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} \right)^2 = \frac{1}{4} \neq 1$$

Дна $(0,2)$ анаорно: n .

$$\text{Дна } (1,1): T = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad \tilde{T}_{ij} = \delta_{kl} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial \tilde{x}^j} = \delta_{ij}.$$

Томо мах (уе меморену оупуноу).

Ксан $P \in C^k(M)$, $k \geq 2$. Ксан $(x^1, \dots, x^n) \mapsto \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial x^i \partial x^j} \right\}_{i,j=1}^n$

зага $(2,0)$ -мензор у P ?

$$\text{Томо } T = \frac{\partial^2 P}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \otimes dx^j$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \left(\frac{\partial P}{\partial \tilde{x}^j} \right) = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial P}{\partial x^l} \right) = \left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^k \partial \tilde{x}^j} \right) \frac{\partial P}{\partial x^l} + \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial^2 P}{\partial x^k \partial x^l}.$$

Use так при $\frac{\partial F}{\partial x^l} = 0 \quad \forall l$. У нас есть: нехотим $\exists l_0: \frac{\partial F}{\partial x^{l_0}} \neq 0$.
 Переименуем до $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) = (x^1, \dots, \sqrt{x^{l_0}}, \dots, x^n)$ в окрестности точки,
 где $x^{l_0} > 0$, тогда $x^{l_0} = (\tilde{x}^{l_0})^2$. Тогда при $i = j = l_0$:

$$\left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^k \partial x^j} \right) \frac{\partial F}{\partial x^l} = \left[\begin{array}{l} \text{годинок} \neq 0 \text{ там же} \\ \text{при } i=j=k=l=l_0 \end{array} \right] = \frac{\cancel{\frac{\partial^2 x^{l_0}}{\partial x^{l_0} \partial x^{l_0}}}}{\left(\frac{\partial \tilde{x}^{l_0}}{\partial x^{l_0}} \right)^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x^{l_0}} \neq 0,$$

то есть метрический закон не выполняется.

Т.е. use $(2,0)$ -метрика $\Leftrightarrow \forall l \frac{\partial F}{\partial x^l}(p) = 0$ (p -крит. точка F).

Р/з. Показать, что для рим. n -ки $g = g_{i\bar{j}} dx^i dx^{\bar{j}}$
 метрика $g^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}$, где $(g^{i\bar{j}}) = (g_{i\bar{j}})^{-1}$ - обратная
 n -я, $\in (0,2)$ -метрика.