

Линдба Нелсена

M - k -м. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$.

def. Римановою метрикою на M зветься $(k-1)$ -мажна симетрична

2-форма g на M ($g \in S^2(M)$) така, що $\forall p \in M$ g_p додатно визначена. Пара (M, g) тоді зветься римановим многовидом.

лем. Побто $\forall p$ $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ - білінійна, $g_p(v, w) = g_p(w, v)$

$\forall v, w \in T_p M$ і $g_p(v, v) > 0$ для $\forall v \neq 0$. Отже, g_p - скалярний добуток на $T_p M$, а g - маже неск скалярний добуток на M .

Якщо прозвучило про яку g йдеться, товоримо просто про римановий мн. M .

лем. У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U :

$$g|_U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i=1}^n g_{ii} (dx^i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij} dx^i dx^j,$$

де $g_{i\bar{j}} \in C^{k-1}(U)$, $g_{i\bar{j}} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}\right) \quad \forall i, \bar{j} = 1, n$.

Ех.1. $\mathbb{R}^n$ зі стандартною евклідовою структурою: $\forall p \in \mathbb{R}^n$ ототоплено $Tr \mathbb{R}^n$ з $\mathbb{R}^n$ і покладено для $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $w = w^{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}$

(у локальних координатах $(x^1, \dots, x^n)$):

$$g_p(v, w) := \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v^i w^{\bar{i}} \quad (\text{тобто координати декартові})$$

Тобто $g_{i\bar{j}} = \delta_{i\bar{j}} \quad \forall i, \bar{j}$ локально, і це ω -мажорант. n -ка,
і подальшому цей рімановий многовид будемо позначати E^n .

2. Модель Пуанкаре (у півпросторі) n -вимірною гіперболічною просторою (Лобачевською): $M^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ з метрикою $g := \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$. Це ω -мажорант. ріманова n -ка.

def. Парою $M \subset \bar{M}$ - k -м. многовиди, $k \geq 1$. $\gamma \in C^k(M, \bar{M})$

зветься закріпкою, якщо $\forall p \in M$ rank $d_p \gamma = \dim M$.

Тоді пара (M, γ) зветься підмноговидом у $\bar{M}$ (k -мажорант).

лем. γ -закріплення $\Leftrightarrow \forall p \in M \quad d_p \gamma$ - лін. і $\text{rang} \Rightarrow \dim M \leq \dim \bar{M}$

Лем. Якщо $\dim M = \dim \bar{M} - 1$, то (M, χ) завжди гіперповерхнею.

Дем. Це узгоджене поняття гіперповерхні (M, χ) у $\mathbb{R}^{n+1}$.
регулярність χ еквівалентно означає, що $\text{rank } d_p \chi = n = \dim M$.

Таким чином узгоджену регулярну криву $\gamma: (a, b) \rightarrow M$:

$$\text{rank } d_t \gamma = 1 \Leftrightarrow d_t \gamma \neq 0 \Leftrightarrow \gamma'(t) \neq 0 \quad (\forall t \in (a, b)).$$

Пр. Якщо (M, χ) - гіперповерхня у $\bar{M}$, а $(\bar{M}, \bar{g})$ - рімановий, то

$g := \chi^* \bar{g}$ - ріманова м-ка на M .

Як і вище, вважаємо $M, \bar{M}, \chi$ k -шарками, $\bar{g}$ $(k-1)$ -шаркою.

За властивостями підпространня, тоді g - $(k-1)$ -м. симетрична 2-форма на M . Згадаємо, що за Лем. $\forall p \in M \quad \forall v, w \in T_p M$

$g_p(v, w) = \bar{g}_{\chi(p)}(d_p \chi(v), d_p \chi(w))$ (звідси легко побачити симетричність). $\forall p \in M \quad \forall 0 \neq v \in T_p M \quad d_p \chi(v) \neq 0$ (бо χ - занурення $\Rightarrow d_p \chi$ - ін'єкція) $\Rightarrow [\bar{g}_{\chi(p)} > 0$ визначена] $\Rightarrow g_p(v, v) = \bar{g}_{\chi(p)}$

$(d_p \chi(v), d_p \chi(v)) > 0$, тоді g_p додатно визначена. $\triangle$

def. $g = \chi^* \bar{g}$ наз. першою фундаментальною формою (M, χ) .
Ще говорять, що g індукована M -ною $\bar{g}$ за допомогою χ ,
 (M, g) з'являється підпросторовидом $(\bar{M}, \bar{g})$, а χ - ізометричний
занурення.

def. Занурення $\chi: M \rightarrow \bar{M}$ з'являється вкладаєм, якщо χ -тополо-
гічне вкладаєм, тобто $\chi: M \rightarrow \chi(M)$ - гомеоморфізм (вигл.
індукованій топології на $\chi(M)$). У цьому випадку (M, χ) наз. вкладаєм.
Th. (Літні про вкладаєм). У n -вимірному k -магного M
($k \geq 1$) існують k -магні вкладаєм в $\mathbb{R}^{2k}$ і занурення в $\mathbb{R}^{2k-1}$.

► Дов. курс "Геометрія підпросторовидів". ▲

Соч. У k -м. многовида M ($k \geq 1$) $\exists$ ріманова м-ка на M .

► Візьмемо занурення $M \rightarrow \mathbb{R}^m$ та індуковано g євкл. M -ною E^m . ▲

Впр. Довести твердження Соч., використовуючи існування
розбиттів однієї замість існування занурень (дуб. поперед-
ню тверд.)

Ел. 3. $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Стандартна n -ка (у подальшому
за замовчуванням розглядаємо S^n з нею) - це перша функц.
форма (S^n, i) де $i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ - вкочення $\begin{matrix} P_A \\ S^n \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} P_A \\ \mathbb{R}^{n+1} \end{matrix}$.

Впр. Перевірити, що i - вкладення.

Лем. Взагалі, якщо $\bar{M}$ - k -м. многовид і $M \subset \bar{M}$ - підмно-
жина така, що M має структуру k -м. многовида і
 $i: M \rightarrow \bar{M}$ (вкочення) є зануренням, то (M, i) - підмноговид
у $\bar{M}$ (вкладений, якщо топологія многовида M - індукована).

Ретомлюємо див. курс "Тензори підмноговидів".

Лем. У лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ на $U \subset M$ і $(x^1, \dots, x^{n+2})$ на $V \subset \bar{M}$
($U \cap \psi^{-1}(V) \neq \emptyset$), якщо $f|_U = f_{ij} du^i du^j$, $\bar{f}|_V = \bar{f}_{ab} dx^a dx^b$, то

з загальної ф-ли для подиференціала маємо $\forall i, j = \overline{1, n}$:

$$f_{ij}|_{U \cap \psi^{-1}(V)} = \bar{f}_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial x^b}{\partial u^j},$$

где $\frac{\partial x^a}{\partial u^i}$, $a = \overline{1, n+q}$, $i = \overline{1, n}$ — частк. координ. q -гип.
лос. заданная χ . Для $\overline{M} = E^{n+q}$:

$$g_{i\bar{j}}|_u = \delta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial x^b}{\partial u^{\bar{j}}} = \sum_{a=1}^{n+q} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial x^a}{\partial u^{\bar{j}}} = \langle \chi_i, \chi_{\bar{j}} \rangle,$$

где $\chi_i = \chi_{u^i} = \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^a} = \chi_x \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)$ (остаток обозначения означает, что $\chi_i: p \in U \mapsto d_p \chi \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)$ — введенные лос. поля, что удовлетворяет условию $T_p(M, \chi) = d_p \chi(T_p M) \forall p \in U$).

def. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — промежут. Будем называть ^(непрерывной) кривой $\chi: I \rightarrow M$ k -гладкой ($\chi \in C^k(I, M)$), если

— $\chi|_{J \cap I} \in C^k(J \cap I, M)$

— если либо χ — кривая а промежутка I

лос. χ на I , то $\forall$ лос. координ. $(x^1, \dots, x^n)$ на $\chi(a)$ для лос. заданной $(x^1, \dots, x^n)$ кривой χ и χ — координ.
 $\forall i = \overline{1, n} \quad \forall l = \overline{0, k}$ вычислена относительно χ по формуле
 $(\chi^i)^{(l)}(a+0) = \lim_{t \rightarrow a+0} (\chi^i)^{(l)}(t).$

— аналогічно до правої менсової точки.

Впр. Перевірити, що це дов. не залежить від вибору лок. коорд.

Рет. Зокрема, будемо вважати, що γ' має визначення на I ,

беручи $\gamma'(a) = \gamma'(a+0) = -(\gamma^-)'(a+0) \frac{\partial}{\partial x^i}$ для лівої менси і

ан-по для правої. Це окремий випадок узагальнення поняття

нахилу на многовиди з менсено.

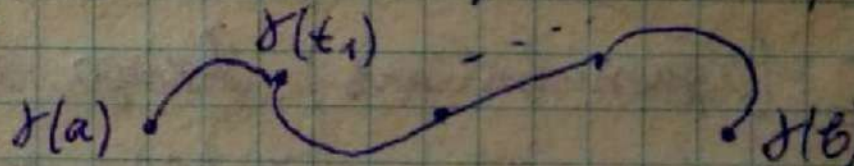
def. k -шаркі криві $\gamma \in C^k(I, M)$ і $\mu \in C^k(J, M)$ звуться еквівалентними ($\gamma \sim \mu$), якщо $\exists$ k -дифеоморфізм $\varphi: I \rightarrow J$ (тобто φ -біє, $\varphi \in C^k(I, J)$ і $\varphi^{-1} \in C^k(J, I)$ у сенсі, аналогічному до попереднього def.) такий, що $\gamma = \mu \circ \varphi$.

Вопр. Це дійсно відношення еквівалентності на множині заданих на проміжках k -шарких кривих у M .

Рет. Якщо $\gamma \sim \mu$, це означає, що одна з цих кривих отримано з іншої заміною параметра (перепараметризацією, репараметризацією). Зокрема, далі ми будемо говорити про "Єдиність кривої з точністю до заміни параметра" саме у цьому сенсі: всі криві, що задовольняють певній умові, еквівалентні.

Вопр. Якщо γ регулярна і $\gamma \sim \mu$, то μ регулярна.

def. Кусково гладким шляхом у M названо $\gamma \in C([a, b], M)$,
 якщо $\exists$ розбиття $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ таке, що $\forall i = \overline{1, n}$
 $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^k([t_{i-1}, t_i], M)$



def. Довсипного кусково гладкого шляху $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ у
 рімановому мн. (M, g) зветься

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt.$$

Рем. g -ція під інтегралом тут кусково $(k-1)$ -гладка
 (її проміжки гладкості збігаються з тими ж для γ ,

див. локальний вигляд кривої), тобто граничний кусково
 неперервна, тому інтеграл існує (і дорівнює сумі інте-
 ралів по проміжках гладкості). Якщо треба уточнити,
 (чи знову $\gamma'(t)$ не завжди коректно визначене, бо може бути $\gamma'(t_i-0) \neq \gamma'(t_i+0)$),
 то для неперервності пишуться, писати не $\ell_\gamma(\gamma)$.

Ес. $\gamma \in E^n$ це $\int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ - евклідова довжина шляху.
Рм. (властивості довжини шляхів). $\uparrow$ 1.1 - евкл. норма на $\mathbb{R}^n$

1. $\ell(\gamma) \geq 0$ і $\ell(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma$ - постійний (тобто $\gamma(t) = p$
 $\forall t \in [a, b]$ для якоїсь $p \in M$).

2. (адитивність). Якщо $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ і $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow M$ - кус.

гладкі шляхи, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, то $\gamma_1 * \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c] \end{cases}$

визначає кус. гладкий шлях $\gamma_1 * \gamma_2 : [a, c] \rightarrow M$ і

$$\ell(\gamma_1 * \gamma_2) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2).$$

3. (інваріантність) Кусай шляхи $\gamma \in C^k([a, b], M)$ і $\mu \in C^k$
 $([c, d], M)$ еквівалентні.

Поги $\ell(x) = \ell(\mu)$.

4. Если g — перма группа. группа (M, μ) и $(\bar{M}, \bar{g})$, то

$\forall$ куск. м. м. γ и M $\gamma \circ \mu$ — куск. м. м. $\bar{M}$ и $\ell_g(x) = \ell_{\bar{g}}(\gamma \circ x)$.

$\Rightarrow$ 1. $\ell(x)$ - це інтеграл від невід'ємної кусково непервної
 ф-ції $t \mapsto \sqrt{g_{x(t)}(x'(t), x'(t))}$. Тому від ≥ 0 і $= 0 \Leftrightarrow$ ця ф-ція
 нульова (на кожному проміжку непервності, отже на $[a, b]$).
 З заданої визначеності g , $g_{x(t)}(x'(t), x'(t)) = 0 \Rightarrow x'(t) = 0$
 $\forall t$. Зі зв'язності, маємо на кожному проміжку

Якщо $\forall$ лок. коэф. $\forall \delta = \overline{1, n} \quad (x^\delta)' = 0 \Rightarrow x^\delta \equiv \text{const}$

Щадності γ постійний : $\forall i = \overline{1, m} \quad \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} = P_i$

Оскільки γ неперервний, $P_1 = P_2 = \dots = P_m = P$. Обернене твердження також вірне.

2. Випливає з означень і адитивності інтеграла Римана.

3. Отже, $\exists \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ - k -дифео-зм: $\gamma = \mu \circ \varphi$.

Випр. k -дифеоморфізми проміжків - це в точності k -мапи строго монотонні φ -її різне типу.

Покто тут $\varphi \in C^k([a, b], [c, d])$ і $\varphi' \neq 0$ ($\varphi' > 0$ або $\varphi' < 0$ на $[a, b]$). Поді за ланцюгові правила

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{g_{\mu(\varphi(t))}(\varphi'(t) \cdot \mu'(\varphi(t)), \varphi'(t) \cdot \mu'(\varphi(t)))} dt$$

$$dt = \int_a^b \sqrt{g_{\mu(\varphi(t))}(\mu'(\varphi(t)), \mu'(\varphi(t)))} |\varphi'(t)| dt \quad (\equiv)$$

Замінимо $\tau = \varphi(t)$, тоді $d\tau = \varphi'(t) dt = \begin{cases} |\varphi'(t)| dt, & \varphi' > 0 \\ -|\varphi'(t)| dt, & \varphi' < 0 \end{cases}$

і межі інтегрування зміняться на c, d при $\varphi' > 0$ і

на d, c при $\varphi' < 0$, мають в дуго-якуну разі (згідно
таким загальною формулою записи коорд. з метою про інтегрування):

$$\textcircled{=}\int_c^d \sqrt{g_{\mu(T)}(\mu'(T), \mu'(T))} dT = L(\mu).$$

Ч. $\gamma \circ \gamma \in C([a, b], \bar{M})$ замикатиметься кусково k -м. з тими
ж не протіскаючи властивості, що γ і γ на кожному з нас за дов. $\frac{d\mu}{dt}$:

$$(\gamma \circ \gamma)'(t) = d_{\gamma(t)} \gamma(\gamma'(t)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = \overline{1, m} \quad (\gamma \text{ м.ч. на нас}). \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} L_{\bar{g}}(\gamma \circ \gamma) &= \int_a^b \sqrt{\bar{g}_{\gamma(t)}(d_{\gamma(t)} \gamma(\gamma'(t)), d_{\gamma(t)} \gamma(\gamma'(t)))} dt = [g = \gamma^* \bar{g}] = \\ &= \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = L_g(\gamma). \quad \triangle \end{aligned}$$

Впр. Чи можна узагальнити поняття еквівалентності
на кусково гладкі шляхи так, що з. замикатиметься вірши?

Реш. У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U : якщо $g|_U = g_{ij} dx^i dx^j$,

і $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ має лок. задання $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, то

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) (\gamma^i)'(t) (\gamma^j)'(t)} dt \quad \left(= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dots} dt \right).$$

def. Гладка крива $\gamma \in C^k(I, M)$ у римановому мн. (M, g) зветься натурально параметризованою, якщо $\forall s \in I$
 $g_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = 1$.

Рем. Сам параметр при цьому називають натуральним (s -ого традиційне позначення). Зокрема, нат. параметризовані криві регулярні. Для нат. парам. кривої $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ маємо $\ell(\gamma) = b - a$.

Рем. У подальшому, якщо зрозуміло, про яку рим. м-ну йдеться, будемо позначати відповідні їй (як поле скалярних добутків) норми в точках i поле норм через $|\cdot|$. Подімо

$|\sigma| := \sqrt{g_p(\sigma, \sigma)}$ для $\sigma \in T_p M$, $|X| := \sqrt{g(X, X)}$ для $X \in T^{k-1}(M)$

і $|X(t)| := \sqrt{g_{\gamma(t)}(X(t), X(t))}$ для поля X уздовж γ (кривої).

Тоді умова натуральності параметра набуде вигляду

$|\gamma'(s)| = 1 \quad \forall s$ або просто $|\gamma'| = 1$.

Рп. $\forall$ регулярної кривої в рімановому просторі $\exists$ еквівалентна їй натурально параметризована (її т.зв. натуральна (ре)параметризація).

$\Rightarrow$ Отже, $\gamma \in C^k(I, M)$ і $\gamma' \neq 0$. Оберемо $t_0 \in I$ і покладемо

$$s(t) := \begin{cases} l(\gamma|_{[t_0, t]}), & t \geq t_0 \\ -l(\gamma|_{[t, t_0]}), & t \leq t_0 \end{cases} = \int_{t_0}^t |\gamma'(\tau)| d\tau, \quad t \in I.$$

Тоді $s'(t) = |\gamma'(t)| > 0 \quad \forall t$, тому $\psi(t) := s(t)$ задає k -дифеоморфізм $\psi: I \rightarrow \psi(I)$, $\mu := \gamma \circ \psi^{-1}$ - k -магна (тобто $\mu \in C^k(\psi(I), M)$), $\mu \sim \gamma$ за дов., і $\forall s \in \psi(I)$

$$\mu'(s) = \gamma'(t) \cdot t'(s) = \frac{\gamma'(\psi^{-1}(s))}{\psi'(\psi^{-1}(s))} = \frac{\gamma'(\psi^{-1}(s))}{|\gamma'(\psi^{-1}(s))|}, \quad \text{тому}$$

$$|\mu'(s)| = 1. \quad \triangle$$

Рем. $\exists$ навпаки, якщо параметр натуральний, то довжина $l(\gamma|_{[s_0, s]}) = s - s_0$, тобто s - довжина дуги кривої від

додатково фіксованої точки з точністю до константи (і зі знаком).

Впр. У двох лат. параметрів $\beta \in \mathbb{S}$ на γ $\mathbb{S} = \mathbb{C} \pm \beta$, $\mathbb{C} \in \mathbb{R}$.

Лем. У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$, якщо позначити $(\dot{\gamma}^i)^i = \frac{dx^i}{dt}$, то з попередня бачив $\frac{d\beta}{dt} = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}$. Це позначення класичне позначення рим. м-ки (першої форми) $d\beta^2 = g_{ij} dx^i dx^j$.

Лем. Якщо дві криві $\gamma \in C^k(I, M)$ і $\mu \in C^k(J, M)$ у римановій мн. (M, g) перетинаються у т. $p \in M$ (можливо деяке $t_0 \in I$, $\beta_0 \in J$ $\gamma(t_0) = \mu(\beta_0) = p$) і регулярні у цій точці (можливо $\gamma'(t_0) \neq 0$, $\mu'(\beta_0) \neq 0$), то кут між ними у p наз. кут між $\gamma'(t_0)$ і $\mu'(\beta_0)$ у евклідовій просторі $(T_p M, g_p)$.

Лем. Можливо цей кут $\angle_p(\gamma, \mu) \in [0, \pi]$, і

$$\cos \angle_p(\gamma, \mu) = \frac{g_p(\gamma'(t_0), \mu'(\beta_0))}{\sqrt{g_p(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))} \sqrt{g_p(\mu'(\beta_0), \mu'(\beta_0))}}$$

При пересіці двох еквівалентних кривих регулярністю

зберігається, модуль дотичного вектора може змінюватися;
напрямок - зберігається або змінюється на протилежний, тому
кут зберігається або змінюється на сумісний (до-
повнюючий до π).

def. (Рімановою) формою об'єму ерієктованого ріманового
мн. (M, g) зветься зовнішня n -форма dV , що $\forall$ карти
 U атласа, що задає ерієктацію (тобто належить обраній
ерієктації M) на U з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ має вигляд

$$dV|_U = \sqrt{\det G} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

де $G := (g_{ij})_{i,j=1}^n$ - локальна n -ця Грانا $g|_U = g_{ij} dx^i dx^j$.

Rem. Позначатимемо dV_g , якщо треба буде уточнити,
про яку метрику g йдеться.

Рл. dV - коректно визначена $(k-1)$ -м. зовнішня n -форма.

$\Rightarrow$ При переході до певних лок. координат $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ (що

Вигнобигаромь карми з амласа мѣтѣ не ориентаций) на $\tilde{u}$,
 ге $g|_{\tilde{u}} = \tilde{g}_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j$, за метричний закон перетворення
 матемо $\tilde{g}_{ij}|_{u\tilde{u}} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j}$, тобто для n -ї $\tilde{G} := (\tilde{g}_{ij})_{i,j=1}^n$
 і для n -ї G маємо $A := \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \right)_{i,j=1}^n$ відобр. перетвор. $\tilde{G} = A^T G A$.

Тоді $\sqrt{\det \tilde{G}} = \sqrt{\det A^T \det G \det A} = |\det A| \sqrt{\det G} = \det A \sqrt{\det G}$,
 бо завжди карми - з амласів одної орієнтації, тому $\det A > 0$.

Це являється відобр. перетвор., тому $\sqrt{\det G}$ (коэф. біля $dx^1 \dots dx^n$)
 змінюється саме так, як потрібно для коректного задання n -
 форми (завнішньої). Він $(k-1)$ -нахилі, бо p -ї $g_{ij} \in C^{k-1}(u)$. $\triangle$
Ес. В E^n маємо $G = E$ (одиниця n -га), тому $dV = dx^1 \dots dx^n$.
деф. Ріманова об'ємна кривкова $\mathcal{D}$ у орієнтованому ріманово-
 му мн. (M, g) зветься $\text{Vol}(\mathcal{D}) := \int_{\mathcal{D}} dV$, де dV - форма
 об'єму g (тобто (M, g)).

Рем. Зокрема, $\text{Vol}(\mathcal{D}) \geq 0$ (бо $\sqrt{\det G} > 0$, за надуговою інтеграцією).

Для кубов $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_m : \mathcal{Q}_i \cap \mathcal{Q}_j = \emptyset$ при $i \neq j$ $\text{Vol}(\bigcup_{i=1}^m \mathcal{Q}_i) = \sum_{i=1}^m \text{Vol}(\mathcal{Q}_i)$ за властивостями інтеграла.

Зем. $\int_{\mathcal{Q}} f dV$ для $f \in C^{k-1}(M)$ - аналог поверхневого інтеграла I роду з курсу аналізу (і збігається з ним, коли M - підмноговид γ E^{n+1} з I груп. формою).

Зем. $f \mapsto \int_M f dV$ задає невід'ємний (тісно кажучи, що переводить невід'ємні ф-ції у невід'ємні числа) лінійний функціонал на просторі скінченних неперервних ф-цій на хаусдорфовому лок. компактному $(\forall p \in M \exists \text{ відкр. } U \ni p : \bar{U} \text{ компакт})$ M .
В силу $\bar{I}_M$ про представлення Риса - Маркова, ^{це так $\forall$ многовида} тоді на M $\exists!$ регулярна борелівська міра μ така, що $\int_{\mathcal{Q}} f dV = \int_{\mathcal{Q}} f d\mu$ $\forall f, \mathcal{Q}$ (і зокрема $\text{Vol}(\mathcal{Q}) = \mu(\mathcal{Q})$).

Зем. Для E^n це міра Лебєга.

Зем. Якщо U - відкр. підмноговид риманового мн. (M, g) ,

то $(U, g|_U)$ - очевидно, метр. римановый мн. (так как из I ф.ф. вытекает $g|_U = h$)

Всп. Если $M \subset N$ - k -м. многообразия, то $\forall (p, q) \in M \times N$

$$T_{(p,q)} M \times N \cong T_p M \oplus T_q N.$$

лев. Если $(M, g) \subset (N, h)$ - римановы мн. Суммой g и h звется рим. м-ка $g+h$ на $M \times N$: $(g+h)_{(p,q)} = g_p + h_q \quad \forall (p, q) \in M \times N$.

Подобно $\forall v_1 + w_1, v_2 + w_2 \in T_{(p,q)} M \times N$ (для мн. отстоящих от $T_p M \oplus T_q N$ в силу попр. Всп.; $v_i \in T_p M, w_i \in T_q N, i = \overline{1, 2}$)

$$(g+h)_{(p,q)}(v_1 + w_1, v_2 + w_2) = g_p(v_1, v_2) + h_q(w_1, w_2).$$

Всп. Все гласско рим. м-ка на $M \times N$.

Пр. $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n = \{e^{ix^1}, \dots, e^{ix^n}\}$ Если на компоненте S^1

заданы $g_i := (dx^i)^2$, то одна сумма $(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$ - локально вымывает, на м-ка E^n !

Всп. Если (M, g) - рим. мн., g лок. коорг. $(x^1, \dots, x^n)$ на U $g|_U = g_{ij} dx^i dx^j$. где i риме, поначало $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$.

Оскільки $\forall p \in U$ g_p год. визначена, n -ці G теж год. визначені, зокрема не вироджені. Позначимо $(g^{i\bar{j}})_{i,\bar{j}=1}^n := G^{-1}$ - інверс. оберненої n -ці, $g^{i\bar{j}} \in C^{k-1}(U)$. Показати, що тоді $g^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}$ коректно задає (симетрична) $(k-1)$ -м.

$(0,2)$ -тензорне поле на M . Цього інше зветься метрикою, що відповідає g . Як знайти значення цього поля від 1-форм α, β на M ?