

Лемма 2/3 Вопр. 1.1. лжлив $\forall$ ад. гр. G та H нйгр. $H \subset G$
 якщо $\text{rank } G < \infty$, то $\text{rank } H < \infty$ (Звичайно, $\text{rank } H \leq \text{rank } G$), і
 $\text{rank } G/H = \text{rank } G - \text{rank } H$.

Нехай $\text{rank } G = n < \infty$. Оск. $\forall$ нйгр. H , що $\cong \mathbb{Z}^{m'}$, $H \subset G$, $m' \leq n$, а отже n найбільше з m' , $m := \text{rank } H \leq n < \infty$.

G/H абелева і нехай $k := \text{rank } G/H$.

$\forall k' \leq k$ у $G/H \in \text{нйгр.} \cong \mathbb{Z}^{k'}$ нехай $\bar{\cdot}$ є звичайні, тобто образи
 звичайних $\mathbb{Z}^{k'}$ при деякому мономорфізмі, - це $a_i + H$, $i = \overline{1, k'}$ дея
 деяких $a_i \in G$. Крім того, H містить нйгр. $\cong \mathbb{Z}^m$ нехай b_j ,
 $j = \overline{1, m}$ - її звичайні. Розглянемо $\mathbb{Z}^{k'+m} \rightarrow G: (z_1, \dots, z_{k'}, w_1, \dots, w_m) \mapsto$
 $\mapsto \sum_{i=1}^{k'} z_i a_i + \sum_{j=1}^m w_j b_j$. Це, оч., зм-зм. Покажемо, що він ін'ї:
 нехай така $\sum_{j=1}^m w_j b_j \in H$ (якщо $\sum_{j=1}^m w_j b_j \in H$) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k'} z_i (a_i + H) =$
 $= \sum_{i=1}^{k'} z_i a_i + H = H$. Оск. це звичайні вйгр. підгрупи, тоді $z_i = 0 \ \forall i$,
 тобто $\sum_{j=1}^m w_j b_j = 0$. Оск. це звичайні, $w_j = 0 \ \forall j$. Тому гіл'ю
 побудовано мономорфізми, і його образ - нйгр. G , що $\cong \mathbb{Z}^{k'+m}$, тому
 $n \geq k' + m$. Можі n найбільше з k' , $k \leq n - m < \infty$.

Якщо $n=m$, то звідси $k=0$, що завершує доведення.

Нехай $n > m$. За аналогією з лін. незалежністю у вект. просторях, даї називається системою $\{a_i\}_{i=1}^l \subset G$ незалежною, якщо з $\sum_{i=1}^l z_i a_i = 0$, де $\{z_i\}_{i=1}^l \subset \mathbb{Z}$, випливає $z_i = 0 \ \forall i$. Зокрема, це так для систем породжуючих підгруп, що $\simeq \mathbb{Z}^l$, як ми бачили. Нехай $\{a_i\}_{i=1}^n$ — така система у G , а $\{b_j\}_{j=1}^m$ — у $H \subset G$, $\forall \bar{j} = \overline{1, m}$ система $\{a_1, \dots, a_n, b_{\bar{j}}\}$ залежна, бо інакше в $G \exists$ підгр. $\simeq \mathbb{Z}^{n+1}$. Тк.ч., $\exists z_1, \dots, z_n, w \in \mathbb{Z}$: $\sum_{i=1}^n z_i a_i + w b_{\bar{j}} = 0$, і не усі $b_{\bar{j}} = 0$, бо інакше $\{a_i\}_{i=1}^n$ була б залежна: $C_{\bar{j}} := w b_{\bar{j}} = \sum_{i=1}^n -z_i a_i$ належить до підгр. G , що породжена $\{a_i\}$. У цій підгрупі $\{C_{\bar{j}}\}_{\bar{j}=1}^m$ — незал. система, бо інакше залежною була б $\{b_{\bar{j}}\}$ (у G , а отже у H). Якщо ототожнити цю підгр. з $\mathbb{Q}^n$ (довільними коэф. $\in \mathbb{Q}$), то $\{C_{\bar{j}}\}$ — лін. незалежна у цьому вект. пр-рі. Додов-нимо її до базиса $\{c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_{n-m}\}$, де $\forall i = \overline{1, n-m}$

$d_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} a_j$, $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}$. Домноживши на ск. значення $\sqrt{w} \neq 0$,
отримавши $e_i := w d_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} a_j \in G$ (де $z_{ij} = \frac{z_{ij}}{\sqrt{w}} \forall i$).
За побудовою, многи $\{c_1, \dots, c_m, e_1, \dots, e_{n-m}\}$ - незалежна в G
і утворює підгр. $K \simeq \mathbb{Z}^n$ (що $\in$ підгр. базисної максі підгрупи).
Розглянемо тепер суміжні класи $\{e_i + H\}_{i=1}^{n-m}$. Якщо для
деяких $z_1, \dots, z_{n-m} \in \mathbb{Z}$ $\sum_{i=1}^{n-m} z_i (e_i + H) = \sum_{i=1}^{n-m} z_i e_i + H$, то
 $\sum_{i=1}^{n-m} z_i e_i \in H \cap K = \left\{ \sum_{j=1}^m w_j c_j \mid w_j \in \mathbb{Z} \right\}$ (остатня рівність - бо якщо
довільний $\sum_{j=1}^m w_j c_j + \sum_{i=1}^{n-m} z_i e_i \in H$ належить до H , то і
 $\sum_{i=1}^{n-m} z_i e_i \in H$, і в силу незал. сист. $\{c_1, \dots, c_m\}$, якщо б був
перульован, утворював би разом з $c_1, \dots, c_m$ незал. систему
з $m+1$ ел-та, отже $z_i = 0 \forall i$). Т.ч., $\sum_{i=1}^{n-m} z_i e_i = \sum_{j=1}^m w_j c_j$
для деяких $w_j \in \mathbb{Z}$. В силу незалежності, $z_1 = \dots = z_{n-m} = 0$.
Тому $\{e_i + H\}_{i=1}^{n-m}$ - незал. в G/H і є менш породж.
системою підгрупи $\simeq \mathbb{Z}^{n-m}$. Отже, $k \geq n-m$, що
завершує доведення: $k = n-m$.

Вопр. 1.4.: Другий випадок 3×3 лемми (коли 2 перших рядки точні і треба показати, що третій точний) зводиться ан-но до першого.

Вопр. 1.5. Доведемо лему про зміно. Отже, нехай G абелева група та φ — зміно

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{0} & 0 \\ 0 \xrightarrow{0} \downarrow f & A' & \xrightarrow{i'} \downarrow g & B' & \xrightarrow{j'} \downarrow h & C' & \end{array}$$

комутативна, а її рядки точні. Потрібно побудувати ком-зміно

$$\text{Кер } f \rightarrow \text{Кер } g \rightarrow \text{Кер } h \rightarrow \text{Сокер } f \rightarrow \text{Сокер } g \rightarrow \text{Сокер } h$$

так, щоб утворилася точна послідовність. Тут кожна

$$\text{Сокер } f = A' / \text{Im } f, \text{ Сокер } g = B' / \text{Im } g, \text{ Сокер } h = C' / \text{Im } h.$$

2 перші стрілки — це просто обмеження i та j вгору:

$$\forall a \in \text{Кер } f \quad g(i(a)) = i'(f(a)) = 0 \Rightarrow i(a) \in \text{Кер } g, \text{ ан-но } \forall b \in \text{Кер } g \quad j(b) \in \text{Кер } h. \text{ Це ком-зміно як обме-}$$

$$\text{зміно, і } \text{Im}(i|_{\text{Кер } f}) = [i(\text{Кер } f) \cap \text{Кер } g] = \text{Im } i \cap \text{Кер } g =$$

$= [\text{точність}] = \text{Ker } \bar{f} \cap \text{Ker } g = \text{Ker } (\bar{f}|_{\text{Ker } g})$, тощо маємо
точність у $\text{Ker } g$.

Дві останні спроби - це факторизації i' та j'
 $\text{sign: } i'_* : A'/\text{Im } f \rightarrow B'/\text{Im } g : a' + \text{Im } f \mapsto i'(a') + \text{Im } g$.
 При цьому $a' + \text{Im } f = a'' + \text{Im } f \Rightarrow a' - a'' \in \text{Im } f \Rightarrow \exists$
 $a \in A : a' - a'' = f(a) \Rightarrow i'(a') - i'(a'') = i'(a' - a'') = i'(f(a)) =$
 $= g(i(a)) \in \text{Im } g \Rightarrow i'(a') + \text{Im } g = i'(a'') + \text{Im } g$, звідси
 маємо коректність. Це зм-зм як факторизація роз'язка.

Ан-но далі $j'_* : B'/\text{Im } g \rightarrow C'/\text{Im } h : b' + \text{Im } g \mapsto j'(b') + \text{Im } h$.
 Точність у $\text{Coker } g$:

$$j'_*(i'_*(a' + \text{Im } f)) = j'(i'(a')) + \text{Im } h = 0 + \text{Im } h = \text{Im } h$$

$$\forall a' + \text{Im } f, \text{ бо } j' \circ i' = 0, \text{ м.ч.}, \text{Im } i'_* \subset \text{Ker } j'_*;$$

$$b' + \text{Im } g \in \text{Ker } j'_* \Rightarrow j'(b') \in \text{Im } h, \text{ тощо } \exists c \in C :$$

$$j'(b') = h(c) \Rightarrow [\text{точність}] \Rightarrow \exists b \in B : c = j(b)$$

$$j'(b') = h(j(b)) = j'(g(b)) \Rightarrow b' - g(b) \in \text{Ker } j' \Rightarrow [\text{точність}]$$

$$\Rightarrow \exists a' \in A' : b' - g(b) = i'(a') \Rightarrow b' - i'(a') = g(b) \in \text{Im } g$$

$$\Rightarrow b' + \text{Im } g = i'(a') + \text{Im } g = i'_*(a' + \text{Im } f) \in \text{Im } i'_*$$

Коректні, подругею середню стрілку $k: \text{Ker } h \rightarrow \text{Coker } f$
 Таким буде мати виконання diagram chasing баче при
 побудові: $\forall c \in \text{Ker } h$ за монічністю $\exists b \in B : j(b) = c$.

Тоді $j'(g(b)) = h(j(b)) = h(c) = 0 \Rightarrow [\text{монічність}] \Rightarrow \exists a' \in A' :$
 $i'(a') = g(b)$. Покладемо $k(c) := a' + \text{Im } f$.

Коректність: нехай $j(\tilde{b}) = c$ і $i'(\tilde{a}') = g(\tilde{b})$ для деяких
 $\tilde{b} \in B, \tilde{a}' \in A'$. Тоді $j(b - \tilde{b}) = j(b) - j(\tilde{b}) = 0 \Rightarrow [\text{монічність}] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists a \in A : i(a) = b - \tilde{b}, i'(a' - \tilde{a}') = g(b - \tilde{b}) = g(i(a)) =$
 $= i'(f(a)) \Rightarrow [\text{монічність}] \Rightarrow a' - \tilde{a}' = f(a) \in \text{Im } f \Rightarrow$
 $\Rightarrow a' + \text{Im } f = \tilde{a}' + \text{Im } f$.

Ізоморфізм: нехай $c, \tilde{c} \in C, b, \tilde{b} \in B : j(b) = c,$
 $j(\tilde{b}) = \tilde{c},$ і $a', \tilde{a}' \in A' : i'(a') = g(b), i'(\tilde{a}') = g(\tilde{b})$. Тоді
 за ком-стністю j і i' $j(b + \tilde{b}) = c + \tilde{c}$ і $i'(a' + \tilde{a}') = g(b + \tilde{b})$,

можливо за побудовою $K(c + \tilde{c}) = (a' + \tilde{a}') + \text{Im } f = (a' + \text{Im } f) + (\tilde{a}' + \text{Im } f) = K(c) + k(\tilde{c})$.

Почнімо з $\text{Ker } h$:

Нехай $c \in \text{Ker } h$ належить до $\text{Im } (j|_{\text{Ker } g})$: $\exists b \in \text{Ker } g$: $c = j(b)$. В силу коректності ми можемо взяти саме цей b у побудові k : нехай $a' \in A'$: $i'(a') = g(b) = 0$. За точністю, $a' = 0 \Rightarrow k(c) = a' + \text{Im } f = \text{Im } f \Rightarrow c \in \text{Ker } k$.

$c \in \text{Ker } k (\neq \text{Ker } h) \Rightarrow a' + \text{Im } f = \text{Im } f \Rightarrow a' \in \text{Im } f$
для b і a' з побудови k : $\exists a \in A$: $a' = f(a) \Rightarrow$
 $\Rightarrow g(b) = i'(a') = i'(f(a)) = g(i(a)) \Rightarrow [\text{точність}] \Rightarrow$
 $\Rightarrow c = c - j(i(a)) = j(b - i(a))$, де $g(b - i(a)) = 0$, можливо
 $b - i(a) \in \text{Ker } g$: $c \in \text{Im } (j|_{\text{Ker } g})$.

Точність у $\text{Coker } f$:

У повн. як завжди $\forall c \in \text{Ker } h$ $i'_*(k(c)) = i'_*(a' + \text{Im } f) =$
 $= i'(a') + \text{Im } g = g(b) + \text{Im } g = \text{Im } g$, м.ч., $\text{Im } k \subset \text{Ker } i'_*$.

Нехай $a' + \gamma_m f \in \ker i'_*$: $i'(a') + \gamma_m g = \gamma_m g$, тобто
 $\exists b \in B$: $i'(a') = g(b)$. Тоді для $c := j(b)$ $h(c) = h(j(b)) =$
 $= j'(g(b)) = j'(i'(a')) = 0$ за точністю $\Rightarrow c \in \ker h$, і
за побудовою $k(c) = a' + \gamma_m f$, тобто $a' + \gamma_m f \in \gamma_m k$.
— Як ввести зв'язи Тн.1.1.?

Нехай $L_* \subset C_*$ — підкомплекс. $\forall k$ за Воп.1.3 виконає
коротка точна посл. $0 \xrightarrow{0} L_k \xrightarrow{i_k} C_k \xrightarrow{j_k} C_k/L_k \xrightarrow{0} 0$. Оск. за
Соч.1.1. і Л.1.5. $i_* i^* j_* j^*$ — морфізми, відпр. з точними рядами

$$0 \xrightarrow{0} L_k \xrightarrow{i_k} C_k \xrightarrow{j_k} C_k/L_k \xrightarrow{0} 0$$

$$\downarrow \partial_k \quad \downarrow \partial_k \quad \downarrow \partial_k \text{ (факторизації)}$$

$$0 \xrightarrow{0} Z_{k-1}(L_*) \xrightarrow{i_{k-1}} Z_{k-1}(C_*) \xrightarrow{j_{k-1}} Z_{k-1}(C_*/L_*) \xrightarrow{0} 0$$

коммутативна $\forall k$ (нижній рядок можемо так записати
в силу "лапизовості"). Лема про зв'яз дає точну посл. :

$$Z_k(L_*) \xrightarrow{i_k} Z_k(C_*) \xrightarrow{j_k} Z_k(C_*/L_*) \xrightarrow{d} H_{k-1}(L_*) \xrightarrow{i_{k-1}^*} H_{k-1}(C_*) \xrightarrow{j_{k-1}^*} H_{k-1}(C_*/L_*).$$

 $\downarrow \text{(кер } \partial_k) \quad \downarrow \text{(кер } \partial_k) \quad \downarrow \text{(кер } \partial_k) \quad \downarrow \text{(сокер } \partial_k) \quad \downarrow \text{(сокер } \partial_k) \quad \downarrow \text{(сокер } \partial_k)$
Пут d ми вже позначили k . За його побудовою $d + L_k \in$

$\in Z_k(C^*/L^*) \subset C_k/L_k$ переходить сначала в a (до $i_k(a) = a + L_k$), а потом в $\partial_k a + B_{k-1}(L^*)$ (до $a + L_k \in Z_k(C^*/L^*) \Rightarrow \partial_k a \in L_{k-1}$, и $i_{k-1}(\partial_k a) = \partial_k a$). При этом $a + L_k \in B_k(C^*/L^*)$ означает, что $a + L_k = \partial_{k+1}(b + L_{k+1}) = \partial_{k+1} b + L_k$ для некоторого $b \in C_{k+1}$, отсюда $a = \partial_{k+1} b + c$, где $c \in L_k$, и $d(a + L_k) = \partial_k(\partial_{k+1} b) + \partial_k c + B_{k-1}(L^*) = B_{k-1}(L^*)$. Таким образом —

есть $\delta_k : H_k(C^*/L^*) \rightarrow H_{k-1}(L^*)$ — такое π , как в Th. 1.1. При этом $\text{Im } \delta_k = \text{Im } d = \ker i_{k-1}$, что дает точность в $H_{k-1}(L^*)$. Не оспаривая точность в Th. 1.1 (в $H_{k-1}(C^*)$) тем не менее можно видеть, и очень легко проверить (в $H_k(C^*/L^*)$).

1. Всп. 2.3. лемма. Треба проверить, что двв. ∂_k задается для любых перестановки σ в S_{k+1} симпликсов, то есть $\partial_k [\beta_0, \dots, \beta_k] = \sum_{j=0}^k (-1)^j [\beta_0, \dots, \hat{\beta}_j, \dots, \beta_k]$, где $(\beta_0, \dots, \beta_k) = \sigma(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = (\alpha_{\sigma(0)}, \dots, \alpha_{\sigma(k)})$ для некоторой $\sigma \in S_{k+1}$, и $[\beta_0, \dots, \beta_k] = \text{sign } \sigma \cdot [\alpha_0, \dots, \alpha_k]$. Таким образом вварсати,

що $0 \leq i_0 < \dots < i_k \in \mathbb{N}$ впорядковані за зростанням, і що α_{i_j} беруться із заданої множини вершин $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$ симп. комплексу (триангуляції). За def 2.7,

$$\partial_k [\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_k}] = \sum_{j=0}^k (-1)^j [\alpha_{i_0}, \dots, \hat{\alpha}_{i_j}, \dots, \alpha_{i_k}], \text{ тому за лем. } \partial_k$$

$$\partial_k [\beta_0, \dots, \beta_k] = \sum_{j=0}^k (-1)^j \text{sign } \sigma [\alpha_{i_0}, \dots, \hat{\alpha}_{i_j}, \dots, \alpha_{i_k}] = [\beta_e = \alpha_{i_{\sigma(e)}} \forall e] =$$

$$= \sum_{j=0}^k (-1)^j \text{sign } \sigma [\beta_{\sigma^{-1}(0)}, \dots, \hat{\beta}_{\sigma^{-1}(j)}, \dots, \beta_{\sigma^{-1}(k)}] \quad \textcircled{=}$$

Нехай $\sigma \in S_{k+1}$. $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \dots & j & \dots & k \\ \sigma(0) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(k) \end{pmatrix}$, σ_j - її "нижнє перестановка" $\in S_k$,

що утворена видаленням j -того ел-та: $\sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \hat{j} & \dots & k \\ \sigma(0) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(k) \end{pmatrix}$, щоб

отримати σ , треба застосувати до $(0, \dots, k)$ ті ж транспозиції,

що у σ_j , отримавши $(\sigma(0), \dots, \sigma(j-1), j, \sigma(j+1), \dots, \sigma(k))$, і поміняв перемісти

j на $\sigma(j)$ -те місце, зробивши $j - \sigma(j)$ транспозицій. Тому

$$\text{sign } \sigma = \text{sign } \sigma_j \cdot (-1)^{j - \sigma(j)} \quad \text{Застосуємо це до } \sigma^{-1}:$$

$$\textcircled{=} \sum_{j=0}^k (-1)^j \text{sign } \sigma \text{sign } \sigma_j^{-1} [\beta_0, \dots, \hat{\beta}_{\sigma^{-1}(j)}, \dots, \beta_k] = \sum_{j=0}^k (-1)^j \text{sign } \sigma \text{sign } \sigma_j^{-1}.$$

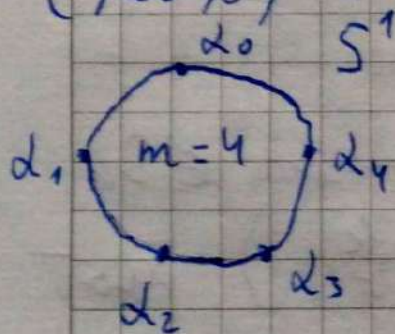
$$(-1)^{j - \sigma^{-1}(j)} [\beta_0, \dots, \hat{\beta}_{\sigma^{-1}(j)}, \dots, \beta_k] = \sum_{j=0}^k (-1)^{\sigma^{-1}(j)} [\beta_0, \dots, \hat{\beta}_{\sigma^{-1}(j)}, \dots, \beta_k] \quad \textcircled{=}$$

Пусть $\ell := G^{-1}(\bar{g})$ меня пробегает вся big 0 до k , тогда

$$\textcircled{=}\sum_{\ell=0}^k (-1)^{\ell} [\beta_0, \dots, \hat{\beta}_{\ell}, \dots, \beta_k], \text{ что и требовалось.}$$

(сумма.)

2. Впр. 2.5. лекции. Показано изоморфизм $H_k(S', G)$ big
матрицы, описывающей их для разбиения S' на $m+1$ гх
(ребер) $d_0, \dots, d_m$ (вершин):



Пусть $\mathcal{H} = \{[d_0], \dots, [d_m], [d_0, d_1], [d_1, d_2], \dots, [d_{m-1}, d_m], [d_m, d_0]\}$ набор из S' сумм. пространства X .

Пусть $G = V(\text{ad.})$ группа коэффициентов:

$$C_k(X, G) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=0}^m g_i [d_i] \mid g_i \in G \right\} \cong G^{m+1}, & k=0; \\ \left\{ \sum_{i=0}^m h_i [d_i, d_{i+1}] \mid h_i \in G \right\} \cong G^{m+1}, & k=1, \text{ где } d_{m+1} := d_0; \\ 0, & k \neq 0, 1. \end{cases}$$

$\partial_k = 0$ при $k \neq 1$, $\bar{i}$ за доб. i номер. заданно,

$$\begin{aligned} \partial_1 \left(\sum_i h_i [d_i, d_{i+1}] \right) &= \sum_i h_i \partial_1 [d_i, d_{i+1}] = \sum_i h_i ([\hat{d}_i, d_{i+1}] - [d_i, \hat{d}_{i+1}]) \\ &= \sum_i h_i ([d_{i+1}] - [d_i]) = \sum_{i=0}^{m-1} h_i [d_{i+1}] + h_m [d_0] - \sum_i h_i [d_i] = [\text{сумма}] \\ & \text{индекс у первой суммы поменяю } h_{-1} := h_m = \sum_{i=0}^m (h_{i-1} - h_i) [d_i]. \end{aligned}$$

Поэтому $Z_k(X, G) = \begin{cases} 0, & k \neq 0, 1; \\ C_0(X, G) \simeq G^{m+1}, & k=0; \\ \{ \sum_i h_i [\alpha_i, \alpha_{i+1}] \mid \underbrace{\forall i \ h_{i-1} - h_i = 0}_{h_0 = \dots = h_m} \} \simeq G, & k=1, \end{cases}$

$B_k(X, G) = \begin{cases} 0, & k \neq 0; \\ \{ \sum_i (h_{i-1} - h_i) [\alpha_i] \mid h_i \in G \}, & k=0. \end{cases}$

Эти же свойства $H_k(S^1, G) = H_k(X, G) = 0$ при $k \neq 0, 1$ и $\simeq Z_1(X, G) \simeq G$ при $k=1$. Напомним, при $k=0$ это было так

как у Ex. 2.6 лекции для $m=2$: подыскано изоморфизм $H_0(S^1, G) = Z_0(X, G) / B_0(X, G) \rightarrow G : \sum_{i=0}^m g_i [\alpha_i] + B_0(X, G) \mapsto \sum_{i=0}^m g_i$.

Корректность: $\sum_i g_i [\alpha_i] = \underbrace{\sum_i g_i' [\alpha_i]}_{+ B_0(X, G)} \Leftrightarrow \sum_i (g_i - g_i') [\alpha_i] \in \underbrace{\sum_i g_i [\alpha_i] - \sum_i g_i' [\alpha_i]}_{\in B_0(X, G)}$

$\in B_0(X, G) \Leftrightarrow \exists \{h_i\}_{i=0}^m \subset G : \sum_i (g_i - g_i') [\alpha_i] = \partial_1 \left(\sum_i h_i [\alpha_i, \alpha_{i+1}] \right) = \sum_i (h_{i-1} - h_i) [\alpha_i],$ поэтому $g_i - g_i' = h_{i-1} - h_i \ \forall i = \overline{0, m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_i g_i - \sum_i g_i = \sum_i g_i - g_i = \sum_i k_{i-1} - k_i = [k_{-1} = k_m] = 0.$$

Гомоморфизм - гомоморфизм α и β не являются.

здесь: $\forall g \in G \quad g [x_0] + B_0(X, G) \mapsto g$.

$$([x_0, x_1] + [x_1, x_2] + \dots + [x_{i-1}, x_i]),$$

инь: $\sum_i g_i [x_i] + B_0(X, G) \mapsto 0 \Leftrightarrow \sum_i g_i = 0$, тогда $g_0 =$

$$= -\sum_{i=1}^m g_i. \text{ Тогда } \sum_{i=0}^m g_i [x_i] = \sum_{i=1}^m g_i ([x_i] - [x_0]) = \sum_{i=1}^m g_i \partial_1 =$$

$$= \partial_1 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i g_i [x_{j-1}, x_j] \right) \in B_0(X, G), \text{ тогда } \sum_i g_i [x_i] + B_0(X, G) = B_0(X, G).$$

это нулевой, тогда α гомоморфизм (конформизм). Отсюда, гомоморфизм

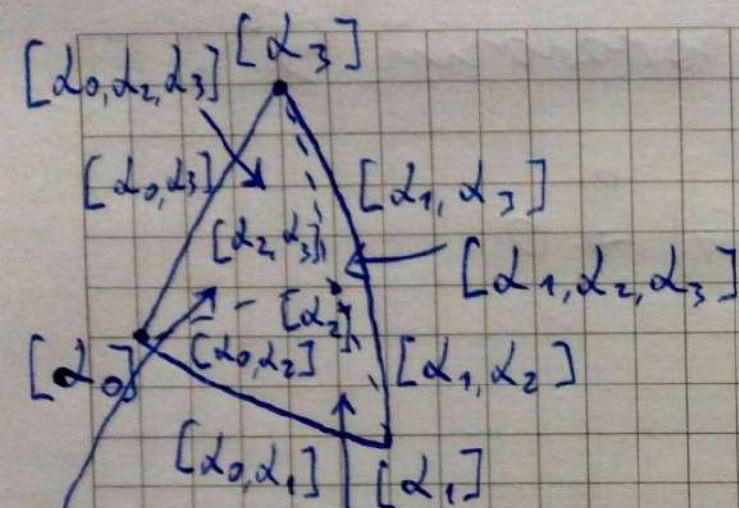
$$H_k(S^1, G) = H_k(X, G) \cong \begin{cases} G, & k=0, 1; \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases} \text{ как раньше. Заметим, при}$$

$G = \mathbb{Z}$ описано число Бетти $b_k = \begin{cases} 1, & k=0, 1 \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases}$ и χ хар.

$$\chi(S^1) = 1 - 1 + 0 - 0 + \dots = 0, \text{ что можно заметить и с ф-лы}$$

$$\sum_i (-1)^i \text{ rank } C_k(X) = (m+1) - (m+1) + 0 - 0 + \dots = 0.$$

3. Впр. 2.7. лекция. Обчислено (сумма) гомоморфизм S^2 , представляющих i и j в n -мерном пространстве.



Триангуляція

$$\mathcal{A} = \{ [d_0], [d_1], [d_2], [d_3],$$

$$[d_0, d_1], [d_0, d_2], [d_0, d_3], [d_1, d_2], [d_1, d_3], [d_2, d_3],$$

$$[d_0, d_1, d_2], [d_0, d_1, d_3], [d_0, d_2, d_3], [d_1, d_2, d_3] \},$$

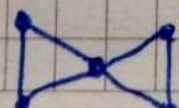
ymb. cymu. np - n X. $\forall$ ad. yn. G!

$$C_k(X, G) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=0}^3 v_i [d_i] \mid v_i \in G \right\} \simeq G^4, & k=0; \\ \left\{ \sum_{0 \leq i < j \leq 3} e_{ij} [d_i, d_j] \mid e_{ij} \in G \right\} \simeq G^6, & k=1; \\ \left\{ \sum_{0 \leq i < j < k \leq 3} f_{ijk} [d_i, d_j, d_k] \mid f_{ijk} \in G \right\} \simeq G^4, & k=2; \\ 0, & k \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

Тільки обчислення розв'язку D^3 ан-мем чиним

$D/3$ - Доводимо 3. (не на осинку). Зокрема, знаємо $X(S^2)$.

- Обчислюємо $\{H_k(S^1 \vee S^1, G)\}$ - сам. розв'язку функція 2 кін.

триангулюванням цієї простір як нарис трикутника зі
спільною вершиною:  Знаємо $X(S^1 \vee S^1)$ (на осинку).