

2. Симпліційні простори та топології

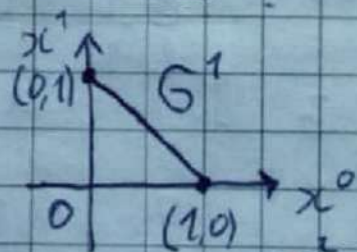
Ми вже вводили поняття симплексу, простору Δ розділі 31 курсу топології. Тут зробимо це простіше, обмисливши стандартні симплекси (втім, ці означення еквівалентні).

def. 2.1. Стандартний k -вимірний симплекс для $k \in \mathbb{Z}_+$ хвелься
$$\sigma^k := \left\{ (x^0, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x^i \geq 0 \ \forall i = \overline{0, k}, \sum_{i=0}^k x^i = 1 \right\}.$$

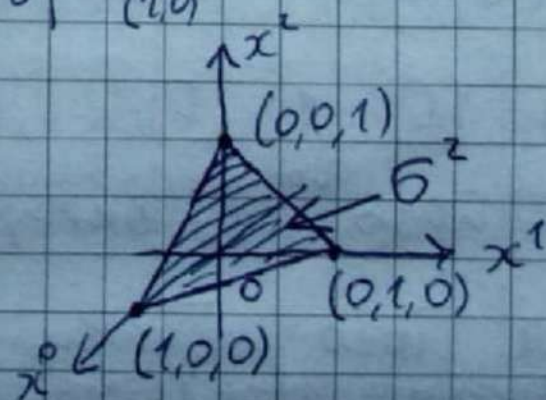
Ex. 2.1. $k=0$: $\sigma^0 \subset \mathbb{R}^1$ - точка.



$k=1$: $\sigma^1 \subset \mathbb{R}^2$ - відрізок.



$k=2$: $\sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ - трикутник.



$k=3$: $\sigma^3 \subset \mathbb{R}^4$ - тетраедр.

Рем. Далі звисає через σ^k позн. стану, k -вим. сили. Зауважимо, що $\sigma^k = \left\{ \sum_{i=0}^k x^i (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \mid x^i \geq 0 \forall i, \sum_{i=0}^k x^i = 1 \right\}$ - це опукла оболонка точок $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ (тако ж найменша за вмістом опукла підпросторова $\mathbb{R}^{k+1}$, що містить ці точки). $\forall \ell = \overline{0, k}$ і підмножини індексів $0 \leq i_0 < \dots < i_\ell \leq k$ опукла оболонка ^{точок} $(0, \dots, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1, \dots, 0)$ має вигляд $\left\{ \sum_{j=0}^{\ell} y^j (0, \dots, 1, \dots, 0) \mid y^j \geq 0 \forall j, \sum_{j=0}^{\ell} y^j = 1 \right\}$ лежить $\{ x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x^i = 0, i \neq i_0, \dots, i_\ell \}$ - $(\ell+1)$ -вимірному підпростору $\mathbb{R}^{k+1}$, що ототожнюється з $\mathbb{R}^{\ell+1}$, а це оп. оболонка - з σ^ℓ .

def. 2.2. Точки $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ звуться вершинами σ^k , а опуклі оболонки $(0, \dots, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1, \dots, 0)$ $\forall \ell = \overline{0, k}$ і $0 \leq i_0 < \dots < i_\ell \leq k$ - його ℓ -вимірні грані. Одновимірні грані σ^k звуться його ребрами, а k -вимірна грань (єдина) - сам σ^k ; у свою ℓ -вим. грань $\sigma_{k+1}^{\ell+1}$.

Рем. Зокрема, 0-вимірні грані - вершини. Далі судимо за needs. ототожнювати ℓ -вим. грані σ^k з σ^ℓ , як у поперед. Рем.

Впр. 2.1. Показати, що $\mathcal{B}^k \cong \mathcal{D}^k \quad \forall k$ (з індукованою з $\mathcal{R}^{k+1}$ топ.).

Лев. 2.3. k -вимірний топологічний симплекс для $k \in \mathbb{Z}_+$ у топологічному просторі X зветься $\varphi(\mathcal{B}^k)$, де $\varphi: \mathcal{B}^k \rightarrow X$ - вкладення (непер. відображення, що є гомеоморфізмом на образ, тобто $\varphi: \mathcal{B}^k \rightarrow \varphi(\mathcal{B}^k)$ з індух. топ. - гомео-зм). φ зветься характеристичним відображенням $\varphi(\mathcal{B}^k)$.

Лем. Зокрема, усі топ. симплекси $\cong \mathcal{D}^k$ за Лев. і непер. вправою.

Лев. 2.4. Вершинами топ. симплекса $\varphi(\mathcal{B}^k) \subset X$ зветься точки $\mathcal{L}_0 := \varphi((1, 0, \dots, 0))$, ..., $\mathcal{L}_k := \varphi((0, \dots, 0, 1))$, тобто образи вершин $\mathcal{B}^k$. l -вим. гранями $\varphi(\mathcal{B}^k)$ для $l = \overline{0, k}$ зветься образи l -вим. граней $\mathcal{B}^k$ під дією φ (зокрема, ребрами - образи ребер).

Лем. Знову ж, 0 -вим. грані - вершини. З непер. Лем., усі l -вим. грані топ. симплекса можна вважати l -вимірними топ. симплексами (бо обмеження φ - теж гомео-зм на образ).

Будемо позначати $\varphi(\sigma^k)$ також через $[d_0, \dots, d_k]$ для кожної вершини $d_0, \dots, d_k$, а $\forall i \in \overline{0, k}$ і підписані індекси $0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq k$ через $[d_{i_0}, \dots, d_{i_r}]$ - відповідну грань, тобто образ функції оболонки $(0, \dots, \underset{i_0}{1}, \dots, 0), \dots, (0, \dots, \underset{i_r}{1}, \dots, 0)$

def. 2.5. Труднакцiєю топологiчного простору X зветься множина $\mathcal{A}$

топологiчних симплексiв у просторi така, що

(закриття)

1. $\mathcal{A}$ -фундаментальне покриття X , тобто таке, що $\forall \mathcal{U} \subset X$ замкнена $\Rightarrow$ перетин $\mathcal{U}$ з $\mathcal{A}$ симплексом $\mathcal{A}$ замкнений.

2. $\forall$ симплекса з $\mathcal{A}$ усі його грані також належать до $\mathcal{A}$.

3. $\forall$ два симплекси з $\mathcal{A}$ або не перетинаються, або мають спільну грань. Крім того, їх перетин складається з однієї спільної грані (вимірності $\leq$) та всіх її граней (вимірності $\leq$).

Пара $(X, \mathcal{A})$ з топ. пр-ру X і його труднакцiї $\mathcal{A}$ зветься

симпліційним простором (PL-простором, інколи - симпліційним

комплексом). Триангуляція A і простір (X, A) зводяться скінченним, якщо A скін. зі скінченної кількості симплексів, скінченновимірними (n -вимірними) - якщо $\exists n \in \mathbb{Z}_+$, що є найвищою вимірністю симплексів з A (тоді воно зветься вимірністю A і (X, A) : $n = \dim A = \dim (X, A)$). n -вимірність кістяка (X, A) для $n \in \mathbb{Z}_+$ зб. об'єднання симплексів A вимірності $\leq n$.

Рем. Приклади розташування 2-вим. симплексів, що задов. Σ :



і що не задов.:



Якщо тр.

A фіксована, говорили просто про скінч. простір X .

Будемо позначати $A = \{ \sigma_\alpha^k = \varphi_\alpha^k(\sigma^k) \}_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+ \\ \alpha \in A_k}}$, де φ_α^k - хар.

вигорождення топ. симплекса σ_α^k . Тоді A і (X, A) скінч. $\Leftrightarrow$

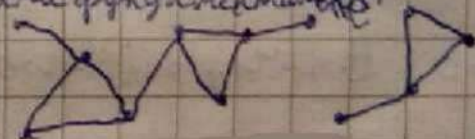
$|\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k| < \infty$, n -вим. кістяк X : $X_n = \bigcup_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \alpha \in A_k}} \sigma_\alpha^k$. Тоді

$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \dots \subset X$ і $\dim X = n \Leftrightarrow X = X_n$

і $X_n \setminus X_{n-1} \neq \emptyset$ (може $X = X_n = X_{n+1} = \dots$) Тодь-які скінченні триангуляція і скінч. простір є скінченновимірними.

Лем. 2.2. 0-вимірні скінч. простори - дискретні, а 1-вимірні - це лінійні сегменти.

Без кратних ребер і петель (P):



Лем. Структури скінч. просторів існують на $\forall$ поверхні M (ми це використовуємо у доведенні теореми клас. поверхонь і називаємо теоремою Pado) і на $\forall$ многовиді M довільної вимірності за додаткової умови шадності (теорема Гайтхеда), скінченні якщо M -компакт. Підпростати $\mathbb{R}^m$ зі стр. скінч. простору зв'язь політопів (поліедри, якщо скінченні еволюції).

Впр. 2.2. $\forall$ триангуляція n -вимірною многовида E

n -вимірною, тоді його вимірності як многовида і скінч. простору збігаються.

Лем. 2.6. Нехай (X, A) -скінч. простір, а G -абелева група.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$ k -випірний симпліційний ланцюг (X, A) з коефіцієнтами у G зветься будь-яка скінченна формальна лінійна комбінація $\sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k$ ($g_\alpha \in G \forall \alpha \in A_k, |\{\alpha \in A_k \mid g_\alpha \neq 0\}| < \infty$) k -випірних симплексів σ . Додавання ланцюгів визначене покомпонентно: $\sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k + \sum_{\alpha \in A_k} h_\alpha \sigma_\alpha^k := \sum_{\alpha \in A_k} (g_\alpha + h_\alpha) \sigma_\alpha^k$. Множина усіх таких ланцюгів з такою операцією зветься k -гого груповим симпліційним ланцюгом (X, A) з коефіцієнтами у G і позначається

$$C_k(X, G) := \left\{ \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k \mid g_\alpha \in G \forall \alpha \in A_k, |\{\alpha \in A_k \mid g_\alpha \neq 0\}| < \infty \right\}.$$

Лем. 2.1. $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ $C_k(X, G)$ є абелевою групою.

► Сума коректно визначена, бо в обох комб. лише скінч. кількість $\neq 0$ членів, і те ж саме для суми, тому вона $\in C_k(X, G)$. Асоціативність і комутативність - з асоц. і ком. G .

Нейтральним елементом є $0 := \sum_{\alpha \in A_k} 0 \cdot \sigma_\alpha^k$, а протилежний:
 $-\left(\sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k\right) = \sum_{\alpha \in A_k} (-g_\alpha) \sigma_\alpha^k$. $\triangle$

лев. 2.7. Нехай (X, A) - скінч. пр. і G - аб. гр. k -тих граничних
 гомоморфізм (або просто гранично), що $\text{sign.}(X, A)$ (з коэф. з G)
 для $k \in \mathbb{N}$.

Зв. $\partial_k : C_k(X, G) \rightarrow C_{k-1}(X, G) : \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k \mapsto \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \partial_k \sigma_\alpha^k$,

де $\forall \sigma_\alpha^k = \varphi_\alpha^k(\sigma^k) = [\alpha_0, \dots, \alpha_k]$

$\partial_k [\alpha_0, \dots, \alpha_k] := \sum_{i=0}^k (-1)^i [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k]$

Позн. $\hat{\alpha}_i$ позначає пропуск вершини α_i , "-" - це значення g_α на g_α .

Рем. Як пояснювалося раніше, усі $(k-1)$ -вані грани

$[\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k]$ мон. симплекса $[\alpha_0, \dots, \alpha_k] \in (k-1)$ -ван.

мон симплексами з X . Згідно з лев. 2.5, вони належать

до A , тому $\partial_k [\alpha_0, \dots, \alpha_k] \in C_{k-1}(X, G)$, а отже й

будь-яка скінченна комбінація $\sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \partial_k \sigma_\alpha^k$ таких гранично.

У подальшому будемо використовувати позначення $[x_0, \dots, x_k]$ і у випадку, коли індекси не впорядковані за зростанням, вважати, що $[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(k)}] = \text{sign } \sigma \cdot [x_0, \dots, x_k]$.

Воп. 2.3 $[x_0, \dots, x_k] \forall \sigma \in S_{k+1}$ як елементи $C_k(X, G)$ σ -лінійно і ∂_k заданається формулою і у тих же позначеннях.
Л. 2.2. $\partial_k: C_k(X, G) \rightarrow C_{k-1}(X, G)$ є гомоморфізмом і

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0 \quad \forall k \geq 2.$$

За побудовою, ∂_k зберігає лін. комбінації, а отже й суми:

$$\begin{aligned} \partial_k \left(\sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k + \sum_{\beta \in A_k} h_\beta \sigma_\beta^k \right) &= \partial_k \sum_{\alpha \in A_k} (g_\alpha + h_\alpha) \sigma_\alpha^k = \sum_{\alpha \in A_k} (g_\alpha + h_\alpha) \partial_k \sigma_\alpha^k = \\ &= \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \partial_k \sigma_\alpha^k + \sum_{\alpha \in A_k} h_\alpha \partial_k \sigma_\alpha^k = \partial_k \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k + \partial_k \sum_{\alpha \in A_k} h_\alpha \sigma_\alpha^k. \end{aligned}$$

Отже, це гом-зв. Тому щоб $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ достатньо

перевірити $\forall$ симплекса $\sigma_\alpha^k = [x_0, \dots, x_k]$:

$$\begin{aligned} \partial_{k-1} (\partial_k [x_0, \dots, x_k]) &= \partial_{k-1} \sum_{i=0}^k (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k] = \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_{k-1} [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j [x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k] \right) = \end{aligned}$$

$$\dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k] + \sum_{j=i+1}^k (-1)^{j-1} [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_k] = \left[\begin{array}{l} \text{групуємо} \\ \text{за парами } i, j \end{array} \right] =$$

$$= \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \left([\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_k] - [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_k] \right) = 0$$

де першою сумою змінні позначення i та j міняються. $\triangle$

Сол. 2.1. $\forall$ скінч. простору X і абелевої групи G групи $C_k(X, G)$ k -тих скінч. ланцюгів для $k \in \mathbb{Z}_+$ і гомоморфізми $\partial_k: C_k(X, G) \rightarrow C_{k-1}(X, G)$ для $k \in \mathbb{N}$ утворюють невід'ємний ланцюговий комплекс, якщо покласти $C_k(X, G) = 0$ при $k < 0$ і $\partial_k = 0$ при $k \leq 0$. Якщо X скінченновимірний, то цей комплекс скінченний ($C_k(X, G) = 0$ при $k > n$ для $n = \dim X$):

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X, G) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X, G) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X, G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, G) \xrightarrow{\partial_0} 0 \rightarrow \dots$$

def. 2.8. Комплекс $C_*(X, G) := \{C_k(X, G), \partial_k\}$ зветься (алгебраїчним) симпліційним комплексом з коефіцієнтами у G , що відповідає скінч. пр-му X . $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

$Z_k(X, G) := Z_k(C_*(X, G))$ зб. k -тою групною симпл. циклів,
 $= \text{Ker } \partial_k$

$B_k(X, G) := B_k(C_*(X, G)) = \text{Im } \partial_{k+1}$ зб. k -тою групною симпл. границю,

$H_k(X, G) := H_k(C_*(X, G)) = Z_k(X, G) / B_k(X, G)$ зб. k -тою групною
симпліційною гомологією X з коефіцієнтами з G .

Рем. Якщо $G = \mathbb{Z}$, то групи не пишуть: $C_k(X) := C_k(X, \mathbb{Z})$,
 $Z_k(X) := Z_k(X, \mathbb{Z})$, $B_k(X) := B_k(X, \mathbb{Z})$ і $H_k(X) := H_k(X, \mathbb{Z}) \forall k \in \mathbb{Z}_+$,
і $C_*(X) := C_*(X, \mathbb{Z})$.

Рем. Згідно з Лем. 1.4, $\forall$ абелевої групи G визначений го-
моморфізм комплекс $\text{Hom}(C_*(X), G)$. Зокрема, його
границі коциклів $\in \text{Hom}(C_k(X), G) = \text{Hom}(C_k(X, \mathbb{Z}), G)$.

Це 0 при $k < 0$, тому $\text{Hom}(C_*(X), G)$ менш невід'ємний.

Лем. 2.3. Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $C^k(X, G) := \text{Hom}(C_k(X), G)$ зветься k -тою групною
симпліційною коциклическою симпл. групою X з коефіцієнтами

в абелевій групі G , а $H^k(X, G) := H^k(\text{Hom}(C_*(X), G))$ -
 k -та група симпліційних когомологій X з коеф. у G .

Реш. Як-но можна говорити про симпліциальні, коцикли, кограниці і т.п. Якщо $G = \mathbb{Z}$, вона теж не лишається: $H^k(X) := H^k(X, \mathbb{Z})$ etc.

дев. 2.10. Сильн. пр-р (Y, B) звется симплициальн. підпространем сильн. пр-ру (X, A) , якщо $Y \subset X$ - топ. підпростір (тобто топ. Y - індукована з X) і $B \subset A$ (тобто $\forall$ топ. симплекс $B \in$ сильн. A).

Ек. 2.3. Для пр-ру $(X, A = \{G_\alpha^k\}_{k \in \mathbb{Z}_+, \alpha \in A_k})$ і $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ n -вим. кістяк $X_n = \bigcup_{\substack{k \leq n \\ \alpha \in A_k}} G_\alpha^k \in$ сильн. пр-рам з індуц. топологією і пр-ам. $\{G_\alpha^k\}_{\substack{k \leq n \\ \alpha \in A_k}}$ (чому?), а отже сильн. підпространем Y X і Y X_m $\forall m \geq n$.

Лем. Керан Y - сильн. підпр. Y X (у цьому випадку ще говорять, що (X, Y) - симплициальна пара). Тоді $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, оск. усі k -вим. симплекси (спікс. триангуляції) $Y \in k$ -вим. сильн. X , $C_k(Y, G)$ - підгрупа Y $C_k(X, G)$ $\forall$ ад. гр. G . За побудовою, унар. гом-зв'яз $C_*(Y, G)$ - об'ємсерія унар. гом-зв'яз $C_*(X, G)$ на $C_k(Y, G)$.

В силу дев. 1.9. і Рл. 1.5.:

Сол. 2.2. Керан Y - сильн. підпр. X . Тоді $\forall$ ад. гр. G $C_*(Y, G)$ -

відображення $C_*(X, G)$, тому визначення факторкомплексу $C_*(X, Y, G) := C_*(X, G) / C_*(Y, G)$ і його групи гомологій $H_k(X, Y, G) := H_k(C_*(X, Y, G))$ для $k \in \mathbb{Z}_+$.

def. 2.11. $H_k(X, Y, G)$ зветься k -тою групою (відносним) сингл. гомологій (сингл.) пари (X, Y) з коэф. у G .

З Th. 1.1. (там же дов., як визначаються стрілки):

Сол. 2.3. (довга точна послідовність сингл. гомологій пари). Якщо (X, Y) - сингл. пара, то визначена точна послідовність ($\forall$ ад. гр. G)

$$\dots \rightarrow H_k(Y, G) \rightarrow H_k(X, G) \rightarrow H_k(X, Y, G) \rightarrow H_{k-1}(Y, G) \rightarrow \dots$$

Ex. 2.4. Якщо сингл. пр-р X має n симплексів вимірності $k \geq 1$. Тоді ($\forall$ ад. гр. G) $C_k(X, G) = C_k(X_k, G) \cong G^n$ (де ізоморфізм просто переводить $\sum_{i=1}^n g_i \sigma_i^k$ у $(g_1, \dots, g_n)$), а $C_k(X_{k-1}, G) = 0$. Оск. крім того $C_e(X, G) = C_e(X_k, G) =$

$$= C_\ell(X_{k-1}, G) \quad \forall \ell \leq k-1 \quad ; \quad C_\ell(X_k, G) = C_\ell(X_{k-1}, G) = 0$$

$\forall \ell \geq k+1$, фактор-комплекс $C_*(X_k, X_{k-1}, G)$ має вигляд

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow G_k^n \rightarrow 0 \rightarrow \dots, \quad \text{а отже} \quad H_\ell(X_k, X_{k-1}, G) \simeq \begin{cases} G_k^n, & \ell = k \\ 0, & \ell \neq k \end{cases}$$

(ан-но Есс. 2.5. 2-ий)

(Погляді з точної посл. $H_\ell(X_k, G) \simeq H_\ell(X_{k-1}, G)$ для $\ell \leq k-2$, але це й так оч.).

лев. 2.12. Симуліційним відображенням симпл. пр.-ів $(X, A) \rightarrow$

$\rightarrow (Y, B)$ зветься неперервне $f: X \rightarrow Y$ таке, що образ

кожного k -вим. топ. симплекса $A \in G_k^X \in$ k -вим. топ. симплекса

B (коротко: $f(A) \subset B$) при цьому $f|_{G_k^X}: G_k^X \rightarrow f[G_k^X]$ - гомеоморфізм.

Рем. Подібна для хар. відобр. $f_k^X: G_k^X \rightarrow G_k^Y$ тобто f_k^X можна вважати хар. відобр. $f(G_k^X)$.

Рем. Оск. ця властивість зберігається при композиціях,

симпл. пр.-и та відображення утв. категорію (підкате-

горію в Top). Крім того, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ визначене ($\forall$ ад. пр. G)

$$f_k: C_k(X, G) \rightarrow C_k(Y, G): \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k \mapsto \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha f(\sigma_\alpha^k),$$

що за побудовою є гомеоморфізмом. Якщо $\sigma_\alpha^k = [\alpha_0, \dots,$

$\mathbb{Z}_k]$ ^{$k \geq 1$} , то образи того $(k-1)$ -вершинного графа $[\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k]$,
 $i=0, k$, за сум. симп. відобр. — це $(k-1)$ -вер. мон. симплекс
 з вершинами $f(\alpha_0), \dots, f(\hat{\alpha}_i), \dots, f(\alpha_k)$, тобто $(k-1)$ -вер. граф
 $f(\sigma_\alpha^k)$, тому за рек-стро f_{k-1}

$$f_{k-1}(\partial_k^X \sigma_\alpha^k) = f_{k-1}\left(\sum_{i=0}^k (-1)^i [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k]\right) = \sum_{i=0}^k (-1)^i f_{k-1}([\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k]) =$$

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i [f(\alpha_0), \dots, f(\hat{\alpha}_i), \dots, f(\alpha_k)] = \partial_k^Y [f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_k)] =$$

$$= \partial_k^Y (f_k(\sigma_\alpha^k)),$$
 тому $\forall$ ланцюгів $f_{k-1} \circ \partial_k^X = \partial_k^Y \circ f_k \quad \forall k \geq 1$

Це означає, що $f_* = \{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+} : C_*(X, G) \rightarrow C_*(Y, G)$ — морфізм. Нарешті, $\forall$ симп. $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ за побудовою $(g \circ f)_k = g_k \circ f_k \quad \forall k$, тобто $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$,
 А $\text{id}_X \in$ симп. $\bar{u}$ дає, очевидно, $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{C_*(X, G)}$.

Сол. 2.1. Симпліційні простори та їхні симп. відображення утворюють категорію, а відображістість $X \mapsto C_*(X, G)$

$i: f \mapsto f_*$ ($\forall$ аб. гр. G) - коваріантний функтор з неї у категорію ланцюгових комплексів.

Рез. Тепер побудову гомологій та когомології симпл. пр-ру можемо розглядати як застосування композицій функторів:

(Симпл. пр-ри) $\xrightarrow[\text{ков. функтор}]{\text{з Сеч. 2.4.}} (Ланц. комплекси) \xrightarrow[\text{ков. функтор}]{\text{з Ек. 1.12}} (Топол. аб. гр. пр-ру) \xrightarrow[\text{ков. функтор}]{\text{з Ек. 1.15}} (Топол. аб. гр. пр-ру)$

↑ когомології

Потому перехід від X до $\{H_k(X, G)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ задається коваріантним функтором, зображенням, косячи симпл. $f: X \rightarrow Y$ відповідає набір індуктованих гом-змін $\{f_{k*}: H_k(X, G) \rightarrow H_k(Y, G)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$; а від X до $\{H^k(X, G)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ - контраваріантним: f відповідають гом-зми $\{f^{k*}: H^k(Y, G) \rightarrow H^k(X, G)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$.

Потому можемо розглядати категорію симпл. пар (X, Y) (ан-но до топологічних пар з Ек. 1.5):

Вопр. 2.4. Побудувати цю категорію та функтор з неї у
кат. пар. ланцюгових комплексів (див Соч. 2.2.). Поді посл.
з Соч. 2.3. буде результатом застосування до (X, Y) функт.
цього функтора і ф-ра з Ек. 1.10.

Рм. 1.8. дає:

Соч. 2.5. Якщо $f: X \rightarrow Y$ - сильний ізоморфізм, то
таке сильн. відобр., що f - від і f^{-1} - теж сильн., то
 $\forall$ аб. гр. G $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ індуковані відобр. $f_{k*}: H_k(X, G) \rightarrow H_k(Y, G)$
і $f^{k*}: H^k(Y, G) \rightarrow H^k(X, G)$ є ізоморфізмами. Т.ч., сильн.
ізоморфні простори мають ізоморфні групи гомологій
і кохомологій для всіх валірностей і груп коефіцієнтів.

Рет. Звичайно, сильн. ізоморфізми є гомеоморфізмами, але,
(2.12) Фік. А і В)
взагалі кажучи, не навпаки. Насправді справедливе наба-
гато сильніше твердження:

Тм. 2.1. (гомотопічна інваріантність симпліційних го-
логій і когомологій). Якщо $(X, \mathcal{A}) \simeq (Y, \mathcal{B})$ - симпліційні
простори і X гомотопічно еквівалентний Y , то $\forall k \in \mathbb{Z}$
і G абелевої групи G

$$H_k(X, G) \cong H_k(Y, G), \quad H^k(X, G) \cong H^k(Y, G).$$

Сол. 2.6 $H_k(X, G)$ і $H^k(X, G)$ не залежать від вибору
сист. $\mathcal{A}$. Рем. Це повне уникнення $\mathcal{A}$ з позначень,
якщо $C_k(X, G)$, $Z_k(X, G)$, $B_k(X, G)$ від неї залежать!
(і ана-но для ко комплексів).

⇒ Зазвичай цю теорему виводять з ізоморфності H_k і H^k якнайсь іншим чином (ко)гомологій та їхньої інваріантності (кансімо, сигнатурний, див. нижче). 

Рем. З цієї інваріантності випливає коректність наведеного означення:

def. 2.13. Для $k \in \mathbb{Z}_+$ k -мн симпліційним числом Бетті симпл. простору X зветься k -те число Бетті симпл. комплексу $S_X(X)$, тобто $b_k = \text{rank } H_k(X)$. Якщо усі $b_k < \infty$ і лише скінченне їх число ненульове, то ейлерова характеристика $S_X(X)$ зветься симпліційною ейлеровою характеристикою X :

$$\chi(X) := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k b_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k \operatorname{rank} H_k(X).$$

Лем. Якщо $C_k(X) = 0$, то й $H_k(X) = 0$, тому ця сума скінченна для скінченновимірного X : $\sum_{k=0}^n$ для $n = \dim X$.

Зокрема, якщо X скінченний, то всі $b_k < \infty$, тому $\chi(X)$ визначена. Дійсно, $C_k(X) = \left\{ \sum_{\lambda \in A_k} m_\lambda \sigma_\lambda^k \mid m_\lambda \in \mathbb{Z} \forall \lambda, \{\lambda \mid m_\lambda \neq 0\} < \infty \right\}$

це вільна абелева група з $|A_k|$ творів $\{\sigma_\lambda^k\}_{\lambda \in A_k}$ (можливо вільна група зі співвідношеннями комутування творів), тому $\operatorname{rank} C_k(X) = |A_k|$ (ї вона $\cong \mathbb{Z}^{|A_k|}$ при $|A_k| < \infty$).

Отже, $|A_k| < \infty \Rightarrow b_k = \operatorname{rank} H_k(X) \leq \operatorname{rank} Z_k(X) \leq \operatorname{rank} C_k(X) = |A_k| < \infty$

Із, зокрема, так для скінченного X . Крім того, у цьому випадку $\chi(X) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k \operatorname{rank} C_k(X) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k |A_k|$ за

л. 1.3, (можливо, $\sum_{k=0}^n$, де $n = \dim X = \max \{k \mid |A_k| \neq 0\}$). На-

приклад для поверхонь M у класичних позначеннях

(див. розділ 32 курсу топології) $|A_0| = V$, $|A_1| = E$,
 $|A_2| = F$ - числа вершин, ребер і (2-вимірних) граней
 відповідно, тому $\chi(M) = V - E + F$. Тоді інваріантність
 випливає з наступного наслідку Лем. 2.1. (і лем. 2.13):
Сол. 2.7. Якщо X гомеом. едв. Y ($X \sim Y$) і $\chi(X)$ визначена,
 то $\chi(Y)$ визначена і $\chi(X) = \chi(Y)$.

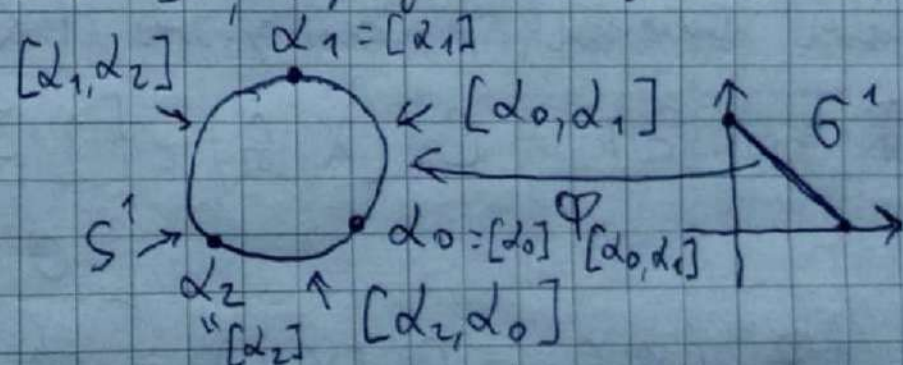
Еск. 2.5. Будь-який скінченний дискретний простір $X =$
 $= \{x_1, \dots, x_n\}$ має 0-вимірну триангуляцію $\{[x_1], \dots, [x_n]\}$
 (для постійних кан. відобр.), тому є скінченним 0-ви-
 мірним симпл. простором $(X, \{[x_1], \dots, [x_n]\})$. Для ког.
 ($\forall$ аб. гр. G) $C_k(X, G) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^n g_i [x_i] \mid g_i \in G \right\} \cong G^n, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$
 (↑ $\mapsto (g_1, \dots, g_n)$),

тому $Z_0(X, G) = C_0(X, G) \cong G^n$ (бо $\partial_0 = 0$ - це так $\forall$ симпл.
 гр-му X), $B_0(X, G) = 0$ (бо $\partial_1 = 0$) і $Z_k(X, G) = B_k(X, G) \stackrel{=0}{=} 0$ при $k \neq 0$.

Отже, $H_k(X, G) \simeq \begin{cases} G^n, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$

Путь і далі позначено $G^n := \underbrace{G \times \dots \times G}_n$ - n -кратний добуток n копій G . Оскільки він скін., це те ж саме, що пряма сума $\underbrace{G \oplus \dots \oplus G}_n$, яку позначають $G^{\oplus n}$ (у випадку з топологією зазвичай позначають саме через суми). Зокрема, $H_k(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^n, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \chi(X) = \text{rang } \mathbb{Z}^n = n$. Звичайно, це випливає і з вигляду $C_*(X)$.

Ек. 2.6. Прикладом кола S^1 , представивши його як об'єднання трьох дуг:



Подобно маємо скін. простір $(S^1, \{[\alpha_0], [\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_0, \alpha_1], [\alpha_1, \alpha_2], [\alpha_2, \alpha_0]\})$. Очевидно, це дійсно триангуляція, скінченна і

определяется, $\forall \alpha \in G$, $\gamma \in G$

$$C_k(X, G) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=0}^2 g_i [\alpha_i] \mid g_i \in G \right\} \simeq G^3, & k=0 \\ \left\{ k_2 [\alpha_0, \alpha_1] + k_0 [\alpha_1, \alpha_2] + k_1 [\alpha_2, \alpha_0] \mid k_i \in G \right\} \simeq G^3, & k=1 \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases}$$

Из условия, $\partial_0 = 0 \Rightarrow Z_0(S^1, G) = C_0(S^1, G)$

$\partial_2 = 0 \Rightarrow B_1(S^1, G) = 0$

Определим ∂_1 . $\forall k_0, k_1, k_2 \in G$ износ лем. 2.4 и лем. 2.3.

$$\begin{aligned} \partial_1 (k_2 [\alpha_0, \alpha_1] + k_0 [\alpha_1, \alpha_2] + k_1 [\alpha_2, \alpha_0]) &= k_2 \partial_1 [\alpha_0, \alpha_1] + k_0 \partial_1 [\alpha_1, \alpha_2] + \\ &+ k_1 \partial_1 [\alpha_2, \alpha_0] = k_2 ([\hat{\alpha}_0, \alpha_1] - [\alpha_0, \hat{\alpha}_1]) + k_0 ([\alpha_2] - [\alpha_1]) + \\ &+ k_1 ([\alpha_0] - [\alpha_2]) = (k_1 - k_2) [\alpha_0] + (k_2 - k_0) [\alpha_1] + (k_0 - k_1) [\alpha_2]. \end{aligned}$$

Отсюда, $Z_1(S^1, G) = \text{Ker } \partial_1 = \{k_2 [\alpha_0, \alpha_1] + k_0 [\alpha_1, \alpha_2] + k_1 [\alpha_2, \alpha_0] \mid k_i \in G, k_1 - k_2 = k_2 - k_0 = k_0 - k_1 = 0\} \simeq G$.

$$\underbrace{k_1 - k_2 = k_2 - k_0 = k_0 - k_1 = 0}_{\iff k_0 = k_1 = k_2} = \{k ([\alpha_0, \alpha_1] + [\alpha_1, \alpha_2] + [\alpha_2, \alpha_0]) \mid k \in G\} \simeq G.$$

$$\iff k_0 = k_1 = k_2$$

$$B_0(S^1, G) = \text{Im } \partial_1 = \{ (h_1 - h_2)[\alpha_0] + (h_2 - h_0)[\alpha_1] + (h_0 - h_1)[\alpha_2] \mid h_i \in G \}$$

$$\hookrightarrow Z_k(S^1, G) = B_k(S^1, G) = 0 \text{ при } k \neq 0, 1, \text{ иначе } 0$$

$$H_k(S^1, G) = 0 \text{ при } k \neq 0, 1.$$

$$H_1(S^1, G) = Z_1(S^1, G) / B_1(S^1, G) = Z_1(S^1, G) \cong G.$$

Покажем, что $H_0(S^1, G) \cong G$. Для этого построим изоморфизм:

$$\varphi: H_0(S^1, G) = Z_0(S^1, G) / B_0(S^1, G) = C_0(S^1, G) / B_0(S^1, G) \xrightarrow{\cong} G. \quad \sum_{i=0}^2 g_i [\alpha_i] + B_0(S^1, G) \mapsto \sum_{i=0}^2 g_i$$

Покажем, что φ — корректно определенный изоморфизм:

$$\sum g_i [\alpha_i] + B_0(S^1, G) = \sum g'_i [\alpha_i] + B_0(S^1, G) \Leftrightarrow \sum (g_i - g'_i) [\alpha_i] \in B_0(S^1, G)$$

(для $g_i, g'_i \in G$)

$\in B_0(S^1, G)$, тогда $= (h_1 - h_2)[\alpha_0] + (h_2 - h_0)[\alpha_1] + (h_0 - h_1)[\alpha_2]$

для каких-то $h_0, h_1, h_2 \in G$: $g_0 - g'_0 = h_1 - h_2$, $g_1 - g'_1 = h_2 - h_0$, $g_2 - g'_2 = h_0 - h_1$. Аре тогда $\sum g_i - \sum g'_i = \sum (g_i - g'_i) =$

$$= h_1 - h_2 + h_2 - h_0 + h_0 - h_1 = 0 \Rightarrow \sum g_i = \sum g'_i, \text{ что гарантирует}$$

корректность отображения φ .

$$\begin{aligned} & \varphi((\sum g_i [\alpha_i] + B_0(S^1, G)) + (\sum g'_i [\alpha_i] + B_0(S^1, G))) = \left[\frac{\text{def. grademorph}}{i} C_0(S^1, G) \right] = \\ & = \varphi(\sum (g_i + g'_i) \frac{[\alpha_i]}{i} + B_0(S^1, G)) = \sum (g_i + g'_i) = \sum g_i + \sum g'_i = \\ & = \varphi(\sum g_i [\alpha_i] + B_0(S^1, G)) + \varphi(\sum g'_i [\alpha_i] + B_0(S^1, G)), \text{ many } \varphi\text{-} \\ & \text{izm-zm. } \varphi\text{-izm: } \forall g \in G \quad g = \varphi(g [\alpha_0] + B_0(S^1, G)). \end{aligned}$$

Нарешим φ -izm: достаточно перевернуть, что $\text{Ker } \varphi = 0$.

$$\begin{aligned} & \sum g_i [\alpha_i] + B_0(S^1, G) \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \sum g_i = g_0 + g_1 + g_2 = 0, \text{ modmo} \\ & g_0 = -g_1 - g_2. \text{ Тогда } \sum g_i [\alpha_i] = (-g_1 - g_2) [\alpha_0] + g_1 [\alpha_1] + g_2 [\alpha_2] = \\ & = g_1 ([\alpha_1] - [\alpha_0]) - g_2 ([\alpha_0] - [\alpha_2]) = \partial_1 (g_1 [\alpha_0, \alpha_1] - g_2 [\alpha_2, \alpha_0]) \in \\ & \in B_0(S^1, G), \text{ modmo } \sum g_i [\alpha_i] + B_0(S^1, G) = B_0(S^1, G) (=0) \triangle \end{aligned}$$

Отсюда, $H_k(S^1, G) \simeq \begin{cases} G, & k=0,1 \\ 0, & k \neq 0,1 \end{cases}$

Заметим, $H_1(S^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0,1 \\ 0, & k \neq 0,1 \end{cases}$. many $\chi(S^1) = \text{rank } \mathbb{Z} -$
 $-\text{rank } \mathbb{Z} = 1 - 1 = 0$.] me ne gda $C_k: C_k(S^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^3, & k=0,1 \\ 0, & k \neq 0,1 \end{cases}$, many
 $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (-1)^k \text{rank } C_k(S^1) = 3 - 3 = 0$.

A diagram of a circle labeled S^1 . Five points on the circle are labeled d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 in clockwise order starting from the right. To the right of the circle, the text $m=5$ is written.

[illegible]

(оравуно, загов. дов. 25). Пунан. свирена і збоукирна.

✓ ад. зн. G

$$C_k(\mathbb{D}^2, G) = \begin{cases} C_0(S^1, G) \cong G^3, & k=0 \quad \text{группа автоморфизмов сферы} \\ C_1(S^1, G) \cong G^3, & k=1 \quad \text{в } S^1 \text{ и } G \text{ нет вложения в } \mathbb{D}^2 \\ \{g[d_0, d_1, d_2] \mid g \in G\} \cong G, & k=2 \quad (S^1 \text{ — окруж.} \\ & \text{нагр. в } \mathbb{D}^2) \\ 0, & k \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

$$\partial_0 = 0 \Rightarrow Z_0(\mathcal{D}^2, G) = C_0(\mathcal{D}^2, G) = C_0(S^1, G), \partial_3 = 0 \Rightarrow B_2(\mathcal{D}^2, G) = 0.$$

∂_1 — не нуль, что и непер. прикладно $\Rightarrow Z_1(\mathcal{D}^2, G) = Z_1(S^1, G) =$
 $= \{ h([d_0, d_1] + [d_1, d_2] + [d_2, d_0]) \mid h \in G \} \simeq G.$

$$\partial_2(g[d_0, d_1, d_2]) = [\text{лев. 2.7}] = g([d_1, d_2] - [d_0, d_2] + [d_0, d_1]) =$$

$$= [\text{напр.}] = g([d_1, d_2] + [d_2, d_0] + [d_0, d_1]) \quad \forall g \in G.$$

Из означен, что $Z_2(\mathcal{D}^2, G) = \text{Ker } \partial_2 = 0$ и $B_1(\mathcal{D}^2, G) = \text{Im } \partial_2 =$
 $= Z_1(\mathcal{D}^2, G).$

$$\forall k \neq 0, 1, 2 \quad Z_k(\mathcal{D}^2, G) = B_k(\mathcal{D}^2, G) = H_k(\mathcal{D}^2, G) = 0.$$

$$H_2(\mathcal{D}^2, G) = Z_2(\mathcal{D}^2, G) / B_2(\mathcal{D}^2, G) = 0.$$

$$H_1(\mathcal{D}^2, G) = Z_1(\mathcal{D}^2, G) / B_1(\mathcal{D}^2, G) = 0.$$

$$H_0(\mathcal{D}^2, G) = Z_0(\mathcal{D}^2, G) / B_0(\mathcal{D}^2, G) = Z_0(S^1, G) / B_0(S^1, G) \simeq G \text{ за непер.}$$

прикладом. Отсюда, $H_k(\mathcal{D}^2, G) \simeq \begin{cases} G, & k=0 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$

Эти группы изоморфны группам гомологий окружностей —

нового простору за Ес. 2.5. (при $n=1$), як і повинно
 бути за Тн. 2.1. і степеністю $\mathbb{D}^n$. Зокрема,
 $H_k(\mathbb{D}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$ і $\chi(\mathbb{D}^2) = 1$.

Впр. 2.6. Обчислити синглярні гомології для цих
 прикладів.

Впр. 2.7. Обчислити синглярні гомології S^2 ,
 триангувавши її як тетраедр. Знайти
 Ейлерову хар-ку. А-но до прикладу 2.7. показати,
 що сингл. гомології $\mathbb{D}^3$ ізоморфні гомологіям точки.

