

Елементи теорії камероднів

def 1.12. Товаром, що зазначено Камеродня С, якщо визначено

наступні класи:

— $Ob C$ — об'єкти категорії C ;

— $\forall X, Y \in Ob C \quad Mor_C(X, Y)$ (або просто $Mor(X, Y)$ для

фікс. C) — морфізми категорії C з об'єкта X у об'єкт Y ;

— клас відображень $0: \text{Mor}_C(X, Y) \times \text{Mor}_C(Y, Z) \rightarrow$
 $\rightarrow \text{Mor}_C(X, Z): f, g \mapsto g \circ f$ — композиція морфізмів;
причому $\forall X, Y, Z \in \text{Ob } C$

— композиція асоціативна: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad \forall$
морф. f, g, h з відп. класів;

— $\forall X \in \text{Ob } C$ існує одиничний морфізм $\text{id}_X \in \text{Mor}_C$
 $(X, X): \forall Y \in \text{Ob } C \quad \forall f \in \text{Mor}_C(X, Y) \quad f \circ \text{id}_X = f$
; $\forall g \in \text{Mor}_C(Y, X) \quad \text{id}_X \circ g = g$.

Лема. Також id_X єдиний $\forall X$ (чому?).

Def. 1.13. Показати, що для $X, Y \in \text{Ob } C$ $f \in \text{Mor}_C(X, Y)$, $g \in \text{Mor}_C(Y, X)$. Якщо $g \circ f = \text{id}_X$, то говорять, що g - лівий обернений до f , а f - правий обернений до g . Якщо крім того g - правий обернений до f , тобто $f \circ g = \text{id}_Y$, то говорять, що g - обернений до f , і пишуть $g = f^{-1}$. У цьому випадку f зв. ізоморфізмом, а X та Y - ізоморфними.

Впр. 1.6. Показати, що якщо у $f \in \text{Mor}_C(X, Y)$ існує лівий об. g і правий об. h , то $g = h$, і це єдиний морфізм з такою властивістю (що виправдує позн. $f^{-1} = g = h$). Крім цього f^{-1} - теж ізоморфізм. Крім того, композиція із-лів-із-п. збігається з інверсією, що випливає з властивості об'єктів - фіг. об.

Def. 1.17. Категорія C зв. підкатегорією категорії D , якщо $\text{Ob } C \subset \text{Ob } D$ і $\forall X, Y \in \text{Ob } C$ $\text{Mor}_C(X, Y) \subset \text{Mor}_D(X, Y)$.

С $\text{Mon}_{\mathcal{D}}(X, Y)$. Будемо позначати це $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

Рем. ^(де id_X - тотожн. а 0 - об'єкт $\mathcal{D}$) Властивості морфізмів (з м.ч. позначення) - ті ж, що у відображень множин $X \rightarrow Y$. Дійсно, категорія Set множин і відображень - базовий приклад, а багато інших перших прикладів-підкатегорій у Set (грав. типичне), тобто для них $\text{Ob } \mathcal{C}$ складається з множин, а $\text{Mon}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ - з відобр. $X \rightarrow Y$. Але це не обов'язково так!

Ек. 1.5. (приклади категорій).

Назва / об'єкти	Морфізми	Ізоморфізми
Set : множини (усі)	відображення	бієкції
$\bigcup$ скінч. множини	- -	- -
Алебраїчні структури (усі $\subset \text{Set}$):		

Групи	гомоморфізми	ізоморфізми
Ab: абелеві групи	- -	- -
Ring: кільця	- -	- -
Field: поля	- -	- -
Vect _K : векторні пр-ри над полем K	лінійні над K відображення	лін. ізоморфізми
... etc. <u>Тополог C Set</u> :		
Top: топологічні пр-ри	неперервні відображення:	гомеоморфізми
Met: метричні пр-ри	$\text{Max}(X, Y) = C(X, Y)$ - -	- -
Met _L : - -	лінійні відображення	білінійні
Met _k : - - k-значні, k ∈ Z ₊	ізотермії k-значні відображення	ізотермії k-гомеоморфізми
∉ Set:		
Top*: топ. пр-ри з відміченою точкою, подоби пари (X, x): x ∈ X	$\text{Max}((X, x), (Y, y)) =$ $\{f \in C(X, Y) \mid f(x) = y\},$ звичайні кат. 0	гомео. зм: $x \mapsto y$

Заданий паре мон. гр-рів (X, Y) . Y - підпростір X

Ктор: топологічні гр-ри

Ктор*: мон. гр-ри з відн. топологією

Накривта (X, Y, p) над (фіксованим) мон. гр-ром Y

$$\text{Мон}((X, Y), (Z, W)) = \{f \in C(X, Z) \mid f(Y) \subset W\},$$

звичайна ком. 0

$$\text{Мон}(X, Y) = C(X, Y) / \sim, \text{ де } \sim - \text{ відн. еквівалентності,}$$

тобто класи еквівалентності відображень:

$$[f] \circ [g] := [f \circ g] \text{ (кор., } \exists f' \sim f, g' \sim g \Rightarrow f \circ g \sim f' \circ g')$$

$$\text{Мон}((X, x), (Y, y)) = \{f \in C(X, Y) \mid f(x) = y\} / \sim, \text{ де } \sim$$

означає $f \sim g$ (зв'язана з $\{x\}$ еквівалентність), 0 - як вище

Морфізми накривт:

$$\text{Мон}((X, Y, p), (Z, Y, q)) = \{f \in C(Y, Z) \mid q \circ f = p, \text{ тобто}$$

діагр. $X \xrightarrow{p} Z$ комутативна},
 0-ком. накривт $p \xrightarrow{f} q$ f .

ізоморфізм f :

$$f(Y) = W.$$

класи еквівалентності екв-стей:

$$[f] \in \text{Мон}(X, Y),$$

$$\exists [g] \in \text{Мон}(Y, X):$$

$$[f] \circ [g] = [\text{id}_Y] \Rightarrow f \circ g \sim \text{id}_Y$$

$$[g] \circ [f] = [\text{id}_X] \Rightarrow g \circ f \sim \text{id}_X.$$

класи топ. екв., що переводять x у y (відн. зв. на $\{x\}$ тополог.),

ізоморфізми накривт тобто морфізми f , що є ізоморфізмами.

Додаткові (нескінченні, індекс $\mathbb{N}$) посл-сті груп та гомоморфізмів

$$\dots \rightarrow G_k \xrightarrow{\varphi_k} G_{k-1} \rightarrow \dots$$

U

Ланцюгові (коланц.) комплекси

(G_n) точні послідовності абелевих груп

надір гом-зв'язок

морфізми α та β з деф. 1.4.

також $\forall \{f_k\}$: діагр.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & G_k & \xrightarrow{\varphi_k} & G_{k-1} & \rightarrow & \dots \\ & & f_k \downarrow & & \psi_k \downarrow & & f_{k-1} \downarrow \\ \dots & \rightarrow & H_k & \rightarrow & H_{k-1} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Комутативна 0-похем.

$$\text{композиторія: } \{f_k\} \circ \{\psi_k\} = \{f_k \circ \psi_k\}$$

-||-

-||-

морфізми $\{f_k\}$:
якщо f_k - ізоморфізми

-||-

-||-

Моніди: $Ob C = \{X\}$

$Mon(X, X) = \mathcal{V}$, що задов. аксіомам з деф. 1.12.

$\uparrow \text{bij}$ - о бінар. операції,
 $\downarrow id_X$ - нейтр. ел-т
напівгрупи з одиницею

Морфізми (ед-ма напівгрупи), що мають обернений;
якщо морфізми - ізом.
 $\Leftrightarrow Monoid$ - група.

Рем. Тільки id_X збудованою одиницею (так, $y \in C \subset Set$ - монотонне відобр.)

Рем. Зображення морфізмів з $Mon(X, Y)$ співпадає з $Min(X, Y)$

Плюс $f \in Mon(X, Y), g \in Mon(Y, Z) \Rightarrow g \circ f \in Mon(X, Z)$ утв. три-

кутник

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \circ f \downarrow & & \downarrow g \\ Z & & Z \end{array}$$
 що є комутативною діаграмою; це

підлягає комутативності очевидно закладенося і на інші діаграми з об'єктів і морфізмів: наприклад, комут.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & \downarrow i & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{i} & W \end{array}$$
 означає, що $f \in \text{Mor}(X, Y)$, $g \in \text{Mor}(Y, W)$, $h \in \text{Mor}(X, Z)$, $i \in \text{Mor}(Z, W)$, і $g \circ f = i \circ h$ (як ел-ти $\text{Mor}(X, W)$).

def. 1.15. Нехай $\mathcal{C}$ і $\mathcal{D}$ - категорії. Коваріантним (бігн, контраваріантним) функтором з $\mathcal{C}$ у $\mathcal{D}$ зветься клас F відображень:

- $\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}: X \mapsto F(X)$;

- $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$

$\text{Mor}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}(F(X), F(Y))$

$(\text{Mor}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}(F(Y), F(X))) : f \mapsto F(f)$ такій,

що

- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}$;

$$\begin{aligned}
 - F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f) \\
 (F(g \circ f) &= F(f) \circ F(g)) \quad \forall f \in \text{Mor}(X, Y), g \in \text{Mor}(Y, Z), \\
 &\quad x, y, z \in \text{Ob } C,
 \end{aligned}$$

Реш. Подано функтори зберігають комутативність діаграм ков. F переводить комут. $X \xrightarrow{f} Y$ у комут. $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$

$$\begin{array}{ccc}
 g \circ f & \xrightarrow{\quad} & \downarrow g \\
 & & Z \\
 & \xrightarrow{F(f)} & \downarrow F(f)
 \end{array}$$

а контрар. F - у комут. $F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y)$, і ах-но для інших,

Реш. Дали позначасмо $F: C \rightarrow D$. $\forall$ функтор (ков. чи контр.) переводить ізоморфізми у ізоморфізми, а отже ізоморфі об'єкти в ізоморфі.

$$\begin{aligned}
 F(g \circ f) &= F(f) \circ F(g) \\
 &= F(f) \circ F(g)
 \end{aligned}$$

► Прямі функ. з об.: наприклад, для ков. F і f із-на $f \in \text{Mor}(X, Y)$

$$\begin{aligned}
 F(f^{-1}) \circ F(f) &= F(f^{-1} \circ f) = F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \\
 F(f) \circ F(f^{-1}) &= F(f \circ f^{-1}) = F(\text{id}_Y) = \text{id}_{F(Y)}, \text{ тобто } F(f^{-1}) = F(f)^{-1}, \text{ і } F(f) \text{ - із-м. } \triangle
 \end{aligned}$$

Ex. 1.6. Тривіальний функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \quad \forall C: F(X) = X$
 $\vdash F(f) = f \quad \forall X, f$. Це, звичайно, коваріантний ф-р. За-
 гальною ідею, розгл. підкатегорію $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ і "вхо-
 чення" $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} : F(X) = X \quad \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C} (\subset \text{Ob } \mathcal{D}) : F(f) =$
 $= f \quad \forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C} : f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) (\subset \text{Mor}_{\mathcal{D}}(X, Y))$. Такий
 F звуть забуваючим (forgetful): він "забуває" про
 додаткові структури на $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Також, забувачі $\text{Gr} \rightarrow \text{Set}$
 $\vdash \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ розгл. групи (топ гр-ри) просто як множини,
 а век-зми (конт. відобр.) - просто як відображення. Це теж
 коваріантний ф-р (до відобр. переходять в себе).

Ex. 1.7. Ще один функтор $\text{Top} \rightarrow \text{Set} : X \mapsto \Pi_0(X)$ (мн.
 конт. лін. зв'язності), $f \mapsto f_*$, де для
 $A \in \Pi_0(X) \quad f_*(A)$ - зв. конт. Y (де $f \in C(X, Y)$), що
 виконає $f(A)$ ков. ф-р (чому?). Можна позначити Π_0
 і локальн. $\Pi_0: \text{Setop} \rightarrow \text{Set}$ ан-но до наст. гр-гу (вспр.).

За. 1.8. $\forall k \in \mathbb{N}$ функтор k -той топологической группы

$\pi_k : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp} : (X, x) \mapsto \pi_k(X, x) \quad \forall \text{ мон. пр. } X$ и

$x \in X, ; f \mapsto f_*$, где $f \in C(X, Y) : f(x) = y$ (где $(X, x), (Y, y) \in \text{Ob Top}_*$) и $f_* : \pi_k(X, x) \rightarrow \pi_k(Y, y)$ - инду-

цированный ($f_*([h]) = [f \circ h]$ для k -век. сфероида h и того эквив. класса $[h]$). Оск., как мы говорим, $(\text{id}_X)_* =$

$= \text{id}_{\pi_k(X, x)}$ и $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, где ков. пр. $\uparrow$ мон. пр.
 $\text{id}_{(X, x)}$, где иде.
 иде. пр. $\text{id}_X : X \rightarrow X$.

Крім того, з наведеного у поперед. курсі випливає, що якщо

$f, g \in C(X, Y)$ такі, що $f(x) = g(x) = y$ і $f \sim_{\{x\}} g$, то

$f_* = g_* \in \text{Mon}(\pi_k(X, x), \pi_k(Y, y))$. Це означає, що можна

визначити $\uparrow$ індуцир. функтор $H\text{Top}_* \rightarrow \text{Grp} : (X, x) \mapsto \pi_k(X, x)$ і $[f] \mapsto f_*$.

Оск. $[id_X] \mapsto (id_X)_* = \text{id}_{\pi_k(X, x)}$ і $[f] \circ [g] = [f \circ g] \mapsto (f \circ g)_* =$

$= f_* \circ g_*$, це ков. др-р. Також з Рч. 1.8. випливає, що
 гом. еkv. простори з вiдп. точкою мають iзomorфi-
 зм. групи: ми отримали "категорiю" зведених
 гом. iнварiантiстi (кiнцевим топологiчним факто-
 ром $\in f \sim g \Rightarrow f_* = g_* : \gamma$ заг. випадку $f \sim g$
 $f_* = g_* \circ \alpha$, де α - деякий iз-м, що визначається гомото-
 пією $f \sim g$, але для зв'язаної категорії $\alpha = id$ - Рч. 1.).

Ек. 1.9. Нехай $C_* = \{C_k, \partial_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ - ланцюговий комплекс.
 Ми поставили йому у вiдп. набір груп гомологій
 $\{H_k(C_*)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, а $\forall$ морфізму $f_* = \{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}} : C_*^1 \rightarrow C_*^2$
 набір гом-зв'яз $\{f_{k*} : H_k(C_*^1) \rightarrow H_k(C_*^2)\}$ (Рч. 1.1.) i що
 можна розглядати як морфізм $\{H_k(C_*^1)\} \rightarrow \{H_k(C_*^2)\}$
 (просто як посл. груп чи як ланцюжки $\dots \rightarrow H_k(C_*^i) \xrightarrow{0} H_k(C_*^{i+1}) \xrightarrow{0} H_k(C_*^{i+2}) \dots$)

як у Ех. 1.5. з прихованим ім-значенням: поді умова комутативності для $\{f_k\}$ тривіально виконана). В силу Лем. підп. Рн. 1.1., це коваріантний ф-р з категорії $\text{Lan} \cdot \text{Klan}.$ у figr. категорію. Але-но для коначного коначного (тес коваріантний - чому?)

Ех. 1.10. Тепер розглянемо категорію пар (C_*, L_*) комплексів (C_*, L_*) , де L_* - підкомплекс у C_* та морфізмів $f_* = \{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}} : (C_*^1, L_*^1) \rightarrow (C_*^2, L_*^2)$ як у фрм. Рн. 1.6. : f_* - морфізм $C_*^1 \rightarrow C_*^2$ і $f_k(L_k^1) \subset L_k^2$ (чому це ком.?)
 $\forall k$. Конкретний (C_*, L_*) поставимо у figr. довизначу посл. з Тн. 1.1. Поді Рн. 1.6. означає, що побудований там набір $\{(f_k | L_k^1)_*, f_{k*}, g_{k*}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in$ (в силу комутат.) коррізном. точках послідовностей (як у Ех. 1.5.)
у категорії

За лем. після л. 1.1. (і ан-ти-міркуваннями
для $\{f_k\}$), таким чином побудований ф-р (коварі-
антний) з кат. пар ланц. комплексів у кат. точних
послідовностей.

Ех. 1.11 Фіксуємо $V_{\text{лн}}$. X і розглянемо $F: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$:
 $Y \mapsto X^Y$ (множина всіх відображень $Y \rightarrow X$), $(f: Y \rightarrow Z) \mapsto$
 $\mapsto (F(f): X^Z \rightarrow X^Y: \varphi \mapsto \varphi \circ f)$. Тоді $F(\text{id}_Y) = \text{id}_{X^Y}$
і для $f: Y \rightarrow Z, g: Z \rightarrow W, \forall \varphi \in X^W$
 $F(g \circ f)(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = F(f)(\varphi \circ g) = F(f)$
 $(F(g)(\varphi)) = (F(f) \circ F(g))(\varphi)$.

Т.ч., F - контраваріантний ф-р.

Ех. 1.12. "Об'єктами" ф-р з попереднього прикладу
на $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ і $X = \mathbb{K}$ (поле). Тоді вект. пр-р Y над

$\mathcal{K}$ переходять у простір лін. відобр. $Y \rightarrow K$, тобто у спряжений Y^* , а лінійне $f: Y \rightarrow Z$ - у $F(f) = f^*$, що визн. так само: $f^*: Z^* \rightarrow Y^*: \varphi \mapsto \varphi \circ f$ і, як видно, теж є лінійним. Доведення того, що це контр. ф-р, те не саме (тобто ф-р $\text{Vect } K \rightarrow \text{Vect } K$).

Ех. 1.13. Так само, "обмежувати" ф-р з Ех. 1.11. на Ab для фіксованої абелевої $X=G$, отримаємо контр. ф-р $\text{Hom}(\cdot, G): Ab \rightarrow Ab: H \mapsto \text{Hom}(H, G)$ і $f \mapsto (f^*: \varphi \mapsto \varphi \circ f)$. Так можна робити і з деякими іншими структурами.

Впр. 1.7 Спробуйте узагальнити ідею Ех. 1.11-13 на довільну початкову категорію (не обов'язково $\subset \text{Set}$) та її фікс. об'єкт X , отримаючи т.зв.

представляющий функтор для X . Куди він від γ
заг. випадку? Як побудувати аналогічний коваріантний
ф-р?

Ек. 1.14. За Рл. 1.4. і Впр. 1.2., $\forall$ ланг. комплексу
 $C_* = \{C_k, \partial_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ^{і аб. U, G} ~~визначений~~ ^{визначений} спряшений кокомпактований
 $\text{Hom}(C_*, G) = \{ \text{Hom}(C_k, G), d^k \}$, а морфізми $f_* = \{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$
 $C_*^1 \rightarrow C_*^2$ визн. $\{f_k^* : \text{Hom}(C_k^2, G) \rightarrow \text{Hom}(C_k^1, G)\} : \text{Hom}(C_k^2, G) \rightarrow$
 $\rightarrow \text{Hom}(C_k^1, G)$, де f_k^* визначені за $f_k \forall k$ як у Ек. 1.13.
Оск. за унл. прикладом $(f_k \circ g_k)^* = f_k^* \circ g_k^* \forall$ морф. f_* і g_*
і id_{C_*} переходить у $\text{id}_{\text{Hom}(C_*, G)}$ за побудовою, це
контраваріантний ф-р з ланцюгових комплексів у
кокомпактові (у тун. категорію за великим расуном).
Він мене позн. $\text{Hom}(\cdot, G)$ або просто Hom .

Ех. 1.15. Каретті, $\forall$ комплексу C^* можна поста-
вити γ відн. послідовність його груп коhomологій з
коэф. у G , подібно коhomологій $\text{Hom}(C^*, G)$ (знову
пов'язаний пушованим γ -знами), послідовно заставляючи
функтори з Ех. 1.14. : Ех. 1.9. За побудовою, це буде
контрав. ф-р з комплексів у посл. аб. груп.

Рем. У останньому прикладі природним чином виникає
композиція функторів, що за def. temp є функтором
(перевірте формально; що з ко/контраваріантністю?).
Її асоціативність та γ -контрав. функторів
з Ех. 1.6. означає, що усі категорії утворюють
категорію, де морфізмами є функтори!

Воп. 1.8. Що таке поді ізоморфізм категорій? Спробуйте
згадати ізоморфі, але не рівні категорії.

Відома того, морфізми моделі функцій і між функторами.

Def. 1.16. Нехай $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ — коваріантні функтори.
(пр. морфізм),

Природним перетворенням з F у G зветься відображення, що кожному $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ставить у відповідність

$T_X \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ так, що $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C} : f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$
діаграма
$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{T_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{T_Y} & G(Y) \end{array}$$
 комутативна. Якщо усі T_X

є ізоморфізмами, то перетв. зветься природним ізоморфізмом $F \cong G$.

Впр. 1.9. Як це виглядатиме для контрав. функторів?

Показати, що для $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \text{Vect}_K$, F тривіально

і G — функтора подвійного спряження (тобто композиції

ф-на з Ex. 1.12 на собі: $X \mapsto X^{**}$, $f \mapsto f^{**}$, що є

коваріантним — чому?) морфізми $T_X : X \rightarrow X^{**} : x \mapsto$

$\mapsto (\alpha \in X^* \mapsto \alpha(x))$ задають прир. перетв., тобто що

$\forall$ лінійного $f: X \rightarrow Y$ діалр. $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T_X} & X^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\ Y & \xrightarrow{T_Y} & Y^{**} \end{array}$ комутативна.
 Чи буде це вірно для самого (контрав.) ф-на спряження з Ex. 1.12.? Яке це має відношення до "каноничності" $T_X: X \rightarrow X^{**}$ (на відміну від "неканоничного" $X \rightarrow X^*$) для скінченновим. просторів, коли це ізоморфізми?

Впр. 1.10. За допомогою поняття природного ізоморфізму "наслідати" означення ізоморфізмів категорій з Впр. 18., отримавши поняття еквівалентних категорій (в стилі def. гомотопічної екв-сті). Спробувати знайти приклади.

Рет. Багато типових задач алг. топології можна сформулювати у "категоричному стилі", наприклад:
 — Використання інваріантів. Нехай F — функтор з $\mathcal{K}Top$ (або $\mathcal{K}Top_*$, як у Ex. 1.8. для T_K) у якусь

категорію алгебраїчних природи, скажімо, Grp (для груп) або послідовностей аб. груп (для (ко)гомологій).

Потім за Рч. 1.8. X гомом. екв. $Y \Rightarrow F(X) \text{ і } F(Y)$ ізоморфні.

- Продовження відображень. Нехай X - підмножина у Y (топ. пр-ті). Продовжити $f \in C(X, Z)$ на Y означає знайти таке $\bar{f} \in C(Y, Z)$, що $f = \bar{f} \circ i$ для вкриття $i: X \rightarrow Y$,
тобто "замкнути" комутативний трикутник

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ f \searrow & & \uparrow \bar{f} \\ & Z & \end{array}$$

Нехай F - функтор з Top (або Top_*) у зусь топ. (або. природи). Потім для даного f продовже. $\bar{f}$ існує $\Rightarrow$ (для нов. F) $\Rightarrow \exists$ морфізм $g = F(\bar{f})$, що "замикає" комут. трикутник

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(i)} & F(Y) \\ F(f) \searrow & & \uparrow g \\ & F(Z) & \end{array}$$

Часто це простіше перевірити.

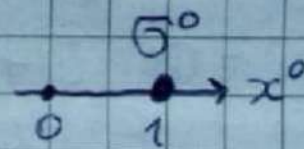
Див. подальшу інф. у S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, T. Leinster, Basic Category Theory, E. Riehl, Category Theory in Context.

2. Симпліційні простори та топології

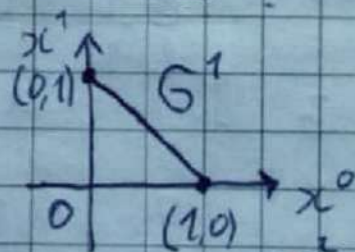
Ми вже вводили поняття симплексу, простору Δ розділі 31 курсу топології. Тут зробимо це простіше, обмисливши стандартні симплекси (втім, ці означення еквівалентні).

def. 2.1. Стандартний k -вимірний симплекс для $k \in \mathbb{Z}_+$ хвється
$$\sigma^k := \left\{ (x^0, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x^i \geq 0 \ \forall i = \overline{0, k}, \sum_{i=0}^k x^i = 1 \right\}.$$

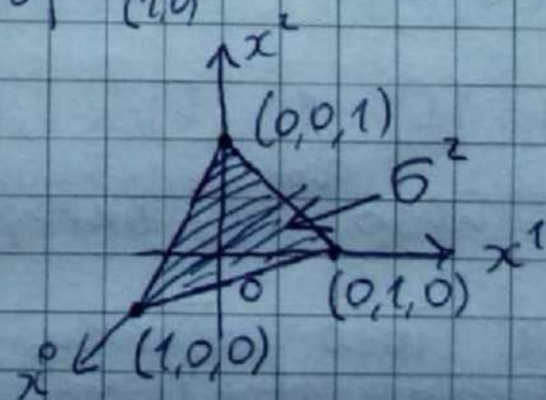
Ex. 2.1. $k=0$: $\sigma^0 \subset \mathbb{R}^1$ - точка.



$k=1$: $\sigma^1 \subset \mathbb{R}^2$ - відрізок.



$k=2$: $\sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ - трикутник.



$k=3$: $\sigma^3 \subset \mathbb{R}^4$ - тетраедр.

Рем. Далі звисає через σ^k позн. стану, k -вим. симп. Завважено, що $\sigma^k = \left\{ \sum_{i=0}^k x^i (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \mid x^i \geq 0 \forall i, \sum_{i=0}^k x^i = 1 \right\}$ - це опукла оболонка точок $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ (також найменша за вмістом опукла підпросторова $\mathbb{R}^{k+1}$, що містить ці точки). $\forall \ell = \overline{0, k}$ і підмножини індексів $0 \leq i_0 < \dots < i_\ell \leq k$ опукла оболонка ^{точок} $(0, \dots, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1, \dots, 0)$ має вигляд $\left\{ \sum_{j=0}^\ell y^j (0, \dots, 1, \dots, 0) \mid y^j \geq 0 \forall j, \sum_{j=0}^\ell y^j = 1 \right\}$ лежить $\{ x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x^i = 0, i \neq i_0, \dots, i_\ell \}$ - $(\ell+1)$ -вимірному підпростору $\mathbb{R}^{k+1}$, що ототожнюється з $\mathbb{R}^{\ell+1}$, а це оп. оболонка - з σ^ℓ .

def. 2.2. Точки $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ звуться вершинами σ^k , а опуклі оболонки $(0, \dots, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1, \dots, 0)$ $\forall \ell = \overline{0, k}$ і $0 \leq i_0 < \dots < i_\ell \leq k$ - його ℓ -вимірні грані. Одновимірні грані σ^k звуться його ребрами, а k -вимірна грань (єдина) - сам σ^k ; у свою ℓ -вим. граней $\sigma_{k+1}^{\ell+1}$.

Рем. Зокрема, 0-вимірні грані - вершини. Далі судимо за needs. ототожнювати ℓ -вим. грані σ^k з σ^ℓ , як у поперед. Рем.

Впр. 2.1. Показати, що $\mathcal{B}^k \cong \mathcal{D}^k \quad \forall k$ (з індукцією з $\mathcal{B}^{k+1}$ мон.).

Лем. 2.3. k -вимірний топологічний симплекс для $k \in \mathbb{Z}_+$ у топологічному просторі X зветься $\varphi(\mathcal{B}^k)$, де $\varphi: \mathcal{B}^k \rightarrow X$ - вкладення (непер. відображення, що є гомеоморфізмом на образ, тобто $\varphi: \mathcal{B}^k \rightarrow \varphi(\mathcal{B}^k)$ з індук. топ. - гомео-зм). φ зветься характеристичним відображенням $\varphi(\mathcal{B}^k)$.

Лем. Зокрема, усі мон. симплекси $\cong \mathcal{D}^k$ за Лем. і поперед. вправою.

Лем. 2.4. Вершинами мон. симплекса $\varphi(\mathcal{B}^k) \subset X$ зветься точки $\mathcal{L}_0 := \varphi((1, 0, \dots, 0))$, ..., $\mathcal{L}_k := \varphi((0, \dots, 0, 1))$, тобто образи вершин $\mathcal{B}^k$. l -вим. гранями $\varphi(\mathcal{B}^k)$ для $l = \overline{0, k}$ зветься образи l -вим. граней $\mathcal{B}^k$ під дією φ (зокрема, ребрами - образи ребер).

Лем. Знову пс, 0 -вим. грані - вершини. З поперед. Лем., усі l -вим. грані мон. симплекса можна вважати l -вимірними мон. симплексами (бо обмеження φ - теж гомео-зм на образ).

Будемо позначати $\varphi(\sigma^k)$ також через $[d_0, \dots, d_k]$ для кожної вершини $d_0, \dots, d_k$, а $\forall i \in \overline{0, k}$ і підписані індекси $0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq k$ через $[d_{i_0}, \dots, d_{i_r}]$ - відповідну грань, тобто образ функції оболонки $(0, \dots, \underset{i_0}{1}, \dots, 0), \dots, (0, \dots, \underset{i_r}{1}, \dots, 0)$

def. 2.5. Труднакцiєю топологiчного простору X зветься множина $\mathcal{A}$ топологiчних симплексiв у просторi така, що

1. $\mathcal{A}$ - закриття $\mathcal{A}$ -функторне покриття X , тобто таке, що $\forall C \subset X$ замкнена $\Rightarrow$ перетин V з $\mathcal{A}$ симплексом $\mathcal{A}$ замкнений.

2. $\forall$ симплекса з $\mathcal{A}$ усі його грані також належать до $\mathcal{A}$.

3. $\forall$ два симплекси з $\mathcal{A}$ або не перетинаються, або мають спільну грань. Крім того, їх перетин складається з однієї спільної грані (вимірності $\leq$) та всіх її граней (вимірності $\leq$).

Пара $(X, \mathcal{A})$ з топ. пр-ру X і його труднакцiї $\mathcal{A}$ зветься симпліційним простором (PL-простором, інколи - симпліційним

комплексом). Триангуляція A і простір (X, A) зветься скінченними, якщо A скін. зі скінченної кількості симплексів, скінченновимірними (n -вимірними) - якщо $\exists n \in \mathbb{Z}_+$, що є найвищою вимірністю симплексів з A (тоді воно зветься вимірністю A і (X, A) : $n = \dim A = \dim (X, A)$). n -вимірність кістяка (X, A) для $n \in \mathbb{Z}_+$ зб. об'єднання симплексів A вимірності $\leq n$.

Рем. Приклади розташування 2-вим. симплексів, що задов. Σ :



А фіксована, говорили просто про скінч. простір X .

Будемо позначати $A = \{ \sigma_\alpha^k = \varphi_\alpha^k(\sigma^k) \}_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+ \\ \alpha \in A_k}}$, де φ_α^k - хар.

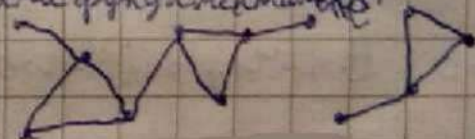
вигорождення топ. симплекса σ_α^k . Тоді A і (X, A) скінч. $\Leftrightarrow$

$|\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k| < \infty$, n -вим. кістяк X : $X_n = \bigcup_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \alpha \in A_k}} \sigma_\alpha^k$. Тоді

$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \dots \subset X$ і $\dim X = n \Leftrightarrow X = X_n$

і $X_n \setminus X_{n-1} \neq \emptyset$ (може $X = X_n = X_{n+1} = \dots$) Тодь-які скінченні триангуляція і скінч. простір є скінченновимірними.

Лем. 2.2. 0-вимірні скінч. простори - дискретні, а 1-вимірні - це ^{до нехитрої 1-ї м. топологічної фундаментальної} графи без кратних ребер і петель (P):



Лем. Структури скінч. просторів існують на $\forall$ поверхні M (ми це використовували у доведенні теореми клас. поверхонь і називали теоремою Радо) і на $\forall$ многовиді M довільної вимірності за додаткової умови шадності (теорема Гайтхеда), скінченні якщо M -компакт. Підпростати $\mathbb{R}^m$ зі стр. скінч. простору ^{зв'язна} ^{політопальні} (поліедри, якщо скінченні еволюції).

Впр. 2.2. $\forall$ триангуляція n -вимірною многовида E

n -вимірною, тоді його вимірності як многовида і скінч. простору збігаються.

Лем. 2.6. Нехай (X, A) -скінч. простір, а G -абелева група.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$ k -випірний симпліційний ланцюг (X, A) з коефіцієнтами у G зветься будь-яка скінченна формальна лінійна комбінація $\sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k$ ($g_\alpha \in G \forall \alpha \in A_k, |\{\alpha \in A_k \mid g_\alpha \neq 0\}| < \infty$) k -випірних симплексів σ . Додавання ланцюгів визначене покомпонентно: $\sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k + \sum_{\alpha \in A_k} h_\alpha \sigma_\alpha^k := \sum_{\alpha \in A_k} (g_\alpha + h_\alpha) \sigma_\alpha^k$. Множина усіх таких ланцюгів з такою операцією зветься k -гого груповим симпліційним ланцюгом (X, A) з коефіцієнтами у G і позначається

$$C_k(X, G) := \left\{ \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k \mid g_\alpha \in G \forall \alpha \in A_k, |\{\alpha \in A_k \mid g_\alpha \neq 0\}| < \infty \right\}.$$

Лем. 2.1. $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ $C_k(X, G)$ є абелевою групою.

► Сума коректно визначена, бо в обох комб. лише скінч. кількість $\neq 0$ членів, і те ж саме для суми, тому вона $\in C_k(X, G)$. Асоціативність і комутативність - з асоц. і ком. G .

Нейтральним елементом є $0 := \sum_{\alpha \in A_k} 0 \cdot \sigma_\alpha^k$, а протилежний:
 $-\left(\sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k\right) = \sum_{\alpha \in A_k} (-g_\alpha) \sigma_\alpha^k$. $\triangle$

лев. 2.7. Нехай (X, A) — скінч. пр. і G — аб. гр. k -тих граничних
 гомоморфізм (або просто гранично), що $\text{sign.}(X, A)$ (з коэф. у G)
 для $k \in \mathbb{N}$.

Зв. $\partial_k : C_k(X, G) \rightarrow C_{k-1}(X, G) : \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k \mapsto \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \partial_k \sigma_\alpha^k$,

де $\forall \sigma_\alpha^k = \varphi_\alpha^k(\sigma^k) = [\alpha_0, \dots, \alpha_k]$

$\partial_k [\alpha_0, \dots, \alpha_k] := \sum_{i=0}^k (-1)^i [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k]$.

Позн. $\hat{\alpha}_i$ позначає пропуск вершини α_i .

Рем. Як пояснювалося раніше, усі $(k-1)$ -варіанти пари

$[\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k]$ мон. симплекса $[\alpha_0, \dots, \alpha_k] \in (k-1)$ -вар.

мон симплексами у X . Згідно з лев. 2.5, вони належать

до A , тому $\partial_k [\alpha_0, \dots, \alpha_k] \in C_{k-1}(X, G)$, а отже й

будь-яка скінченна комбінація $\sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \partial_k \sigma_\alpha^k$ також гранично.

У подальшому будемо використовувати позначення $[x_0, \dots, x_k]$ і у випадку, коли індекси не впорядковані за зростанням, вважати, що $[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(k)}] = \text{sign } \sigma \cdot [x_0, \dots, x_k]$.

$[x_0, \dots, x_k] \quad \forall \sigma \in S_{k+1}$ (як елементи $C_k(X, G)$)
 Впр. 2.3. ∂_k для σ задається формулою і у тих же позначеннях.
 Пр. 2.2. $\partial_k: C_k(X, G) \rightarrow C_{k-1}(X, G)$ є гомоморфізмом і

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0 \quad \forall k \geq 2.$$

За побудовою, ∂_k зберігає лін. комбінації, а отже й суми:

$$\begin{aligned} \partial_k \left(\sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k + \sum_{\beta \in A_k} h_\beta \sigma_\beta^k \right) &= \partial_k \sum_{\alpha \in A_k} (g_\alpha + h_\alpha) \sigma_\alpha^k = \sum_{\alpha \in A_k} (g_\alpha + h_\alpha) \partial_k \sigma_\alpha^k = \\ &= \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \partial_k \sigma_\alpha^k + \sum_{\alpha \in A_k} h_\alpha \partial_k \sigma_\alpha^k = \partial_k \sum_{\alpha \in A_k} g_\alpha \sigma_\alpha^k + \partial_k \sum_{\alpha \in A_k} h_\alpha \sigma_\alpha^k. \end{aligned}$$

Отже, це гом-зв. Тому щоб $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ достатньо

перевірити $\forall$ симплекса $\sigma_\alpha^k = [x_0, \dots, x_k]$:

$$\begin{aligned} \partial_{k-1} (\partial_k [x_0, \dots, x_k]) &= \partial_{k-1} \sum_{i=0}^k (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k] = \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_{k-1} [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j [x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k] \right) = \end{aligned}$$

$$\dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k] + \sum_{j=i+1}^k (-1)^{j-1} [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_k] = \left[\begin{array}{l} \text{групуємо} \\ \text{за першим } j \end{array} \right] =$$

$$= \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \left([\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_k] - [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_k] \right) = 0$$

↑
для першої суми змінні позначення i та j місцями. $\triangle$

Сол. 2.1. $\forall$ скінч. простору X і абелевої групи G групи $C_k(X, G)$ k -тих скінч. ланцюгів для $k \in \mathbb{Z}_+$ і гомоморфізми $\partial_k: C_k(X, G) \rightarrow C_{k-1}(X, G)$ для $k \in \mathbb{N}$ утворюють невід'ємний ланцюговий комплекс, якщо покласти $C_k(X, G) = 0$ при $k < 0$ і $\partial_k = 0$ при $k \leq 0$. Якщо X скінченновимірний, то цей комплекс скінченний ($C_k(X, G) = 0$ при $k > n$ для $n = \dim X$):

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X, G) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X, G) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X, G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, G) \xrightarrow{\partial_0} 0 \rightarrow \dots$$

def. 2.8. Комплекс $C_*(X, G) := \{C_k(X, G), \partial_k\}$ зветься (алгебраїчним) симпліційним комплексом з коефіцієнтами у G , що відповідає скінч. пр-му X . $\forall k \in \mathbb{Z}_+$