Симетричні та зовнішні форми

M – k-гл. многовид, $k \geq 1$, $n = \dim M$. Далі за замовчуванням усі форми і поля максимальної гладкості $k-1$; $\ell \in \mathbb{Z}_+$.

<u>def.</u> Гладка ℓ-форма α на M зветься симетричною (відп., кососиметричною, або зовнішньою), якщо $\forall p \in M$ α_p симетрична (відп., кососиметрична), тобто $\forall v_1, \ldots, v_\ell \in T_pM$, $\sigma \in S_\ell$

$$\alpha_p(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(\ell)}) = \alpha_p(v_1, \ldots, v_\ell) \quad (\text{відп., } \operatorname{sign}\sigma \cdot \alpha_p(v_1, \ldots, v_\ell)).$$

<u>Rem.</u> Далі ми даватимемо визначення і будуватимемо конструкції для форм на M (або їхніх лок. задань), що аналогічні поняттям для форм на вект. просторі. Доведення їхніх властивостей випливають з відп. властивостей форм на вект. пр-рах

або аналогічні.

<u>Rem.</u> 3 <u>лв.</u> (косо)симетричності і альтернативного класу

форм на многовиді випливає, що α - симетрична (відп., зовнішня) $\Leftrightarrow$ $\forall$ вект. полів $X_1, \dots, X_l$ на M $\forall\, \sigma \in S_l$

$\alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(l)}) = \alpha(X_1, \dots, X_l)$ (відп., $\operatorname{sign}\sigma \cdot \alpha(X_1, \dots, X_l)$).

<u>Ex.</u> При $l=2$: $\alpha(Y, X) = \alpha(X, Y)$ (відп., $-\alpha(X,Y)$) $\forall\, X, Y$.

<u>Pr.</u> Якщо у лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U $\alpha|_U = \alpha_{i_1 \dots i_l} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_l}$, то α - симетрична (відп., зовнішня) $\Leftrightarrow$ $\forall$ лок. координат $\forall\, i_1, \dots, i_l = \overline{1,n}$ $\forall\, \sigma \in S_l$ $\alpha_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(l)}} = \alpha_{i_1 \dots i_l}$ (відп., $\operatorname{sign}\sigma \cdot \alpha_{i_1 \dots i_l}$).

▷ <u>Впр.</u> ◁

<u>Ex.</u> При $l=2$: як і у <u>Ex.</u> вище, достатньо виписати умову для єдиної нетривіальної перестановки з S_2: $\forall\, i, j = \overline{1,n}$ $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ (відп., $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$; зокрема, для зовнішньої $\alpha_{ii} = 0$ $\forall\, i = \overline{1,n}$).

<u>Rem.</u> Взагалі для зовнішньої форми з попер. <u>Pr.</u> випливає, що $\alpha_{i_1 \dots i_l} = 0$, якщо якісь два індекси співпадають (і $\alpha(X_1, \dots, X_l) = 0$, якщо співпадають два аргументи - з <u>def.</u>).

Рч. Симетричні і кососим. форми на T_pM утворюють векторні підпростори у $T_pM^l_0$. Сим. та зовнішні форми на M утворюють векторні підпростори (над $\mathbb{R}$) і підмодулі (над $C^{k-1}(M)$) у $\mathcal{T}^{l,k-1}(M)$.

▷ Бо симетричність і кососиметричність зберігаються при лін. комбінаціях (у т.ч. з функціональними коефіцієнтами). ◁

Rem. Ці простори позначаються $S^l(T_pM)$, $\Omega^l(T_pM)$, $S^l(M)$ і $\Omega^l(M)$ відповідно. При цьому 0-форми (тобто скаляри та ф-ції) завжди вважаємо симетричними і кососиметричними, тобто $S^0(T_pM) = \Omega^0(T_pM) = \mathbb{R}$, $S^0(M) = \Omega^0(M) = C^{k-1}(M)$. З def. також маємо $S^1(T_pM) = \Omega^1(T_pM) = T_pM^*$, $S^1(M) = \Omega^1(M) = \mathcal{X}^{k-1}(M)^*$ – усі 1-форми.

def. Симетрування (відп. альтернування) т. l-форми α наз.

$$\operatorname{Sym}\alpha : X_1, \ldots, X_l \mapsto \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_l} \alpha(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(l)}).$$

(відп. $\operatorname{Alt}\alpha : X_1, \ldots, X_l \mapsto \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_l} \operatorname{sign}\sigma \cdot \alpha(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(l)})$.)

$\forall\, X_1, \ldots, X_l \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$.

Ex. $l=2$: $\mathrm{Sym}\,\alpha(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\alpha(X,Y)+\alpha(Y,X)\big)$, $\mathrm{Alt}\,\alpha(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\alpha(X,Y)-\alpha(Y,X)\big)$.

Рг. 1. $\forall\, \alpha \in \mathcal{T}^{l,k-1}(M)$ $\mathrm{Sym}\,\alpha \in S^l(M)$, $\mathrm{Alt}\,\alpha \in \Omega^l(M)$.

2. $\alpha \in S^l(M) \iff \alpha = \mathrm{Sym}\,\alpha$; $\alpha \in \Omega^l(M) \iff \alpha = \mathrm{Alt}\,\alpha$.

▷ Впр. △

Rem. ~~Тобто~~ Крім того, вони, очевидно, лінійні (у т. ч. над $C^{k-1}(M)$) як відображення $\mathrm{Sym}: \mathcal{T}^{l,k-1}(M) \to S^l(M)$, $\mathrm{Alt}: \mathcal{T}^{l,k-1}(M) \to \Omega^l(M)$.
Тобто це проектори (лінійні, ~~зир~~, ідемпотентні: $\mathrm{Sym}^2 = \mathrm{Sym}$, ан-но Alt).

Def. Нехай $\alpha \in S^l(M)$ (відп., $\Omega^l(M)$), $\beta \in S^m(M)$ (відп., $\Omega^m(M)$).
Їхнім симетричним (відп., зовнішнім) добутком зветься
$\alpha\beta := \mathrm{Sym}(\alpha\otimes\beta)$ (відп., $\alpha\wedge\beta = \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)$).

Ex. Для $l=m=1$: $\forall X, Y$

$$\alpha\beta(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\alpha\otimes\beta(X,Y) + \alpha\otimes\beta(Y,X)\big) = \frac{1}{2}\big(\alpha(X)\beta(Y) + \alpha(Y)\beta(X)\big) =$$

$= \frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta + \beta\otimes\alpha)(X,Y)$; ан-но для $\alpha\wedge\beta$ зі знаком $-$:

$\alpha\wedge\beta = \frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta - \beta\otimes\alpha)$.

Р4. (властивості симетричного і зовнішнього добутків) Нехай $\alpha, \tilde{\alpha} \in S^l(M)$ (відп., $\Omega^l(M)$), $\beta, \tilde{\beta} \in S^m(M)$ (відп., $\Omega^m(M)$), $\gamma \in S^n(M)$ (відп., $\Omega^n(M)$), $f, g \in C^{k-1}(M)$.

1. $\alpha\beta \in S^{l+m}(M)$ $(\alpha\wedge\beta \in \Omega^{l+m}(M))$.
2. $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ $((\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma))$.
3. $\alpha\beta = \beta\alpha$ $(\alpha\wedge\beta = (-1)^{lm}\beta\wedge\alpha)$.
4. $(f\alpha + g\tilde{\alpha})\beta = f\alpha\beta + g\tilde{\alpha}\beta$, $\alpha(f\beta + g\tilde{\beta}) = f\alpha\beta + g\alpha\tilde{\beta}$.
$((f\alpha + g\tilde{\alpha})\wedge\beta = f\alpha\wedge\beta + g\tilde{\alpha}\wedge\beta$, $\alpha\wedge(f\beta + g\tilde{\beta}) = f\alpha\wedge\beta + g\alpha\wedge\tilde{\beta})$.

▷ Впр. або див. книжки з лін. алгебри. △

Rem. Тобто ці добутки перетворюють простори і $C^{k-1}(M)$-модулі $S(M) := \bigoplus_{l=0}^{\infty} S^l(M)$ і $\Omega(M) := \bigoplus_{l=0}^{\infty} \Omega^l(M)$ відп. на (градуйовані) асоціативні алгебри, що звуться симетричною і зовнішньою алгеброю M відп. Аналогічно для форм у точці.

Rem. В силу асоціативностей (2. вище), можемо запису-

вати вирази вигляду $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ або $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_l$ без дужок.
Аналогічно до Ex. вище (де $l=2$):

Впр. $\forall$ 1-форм $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ $\alpha_1 \ldots \alpha_l = \frac{1}{l!} \sum\limits_{\sigma \in S_l} \alpha_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(l)}$ і
$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_l = \frac{1}{l!} \sum\limits_{\sigma \in S_l} \operatorname{sign}\sigma \cdot \alpha_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(l)}$.

Тч. Нехай $(x^1, \ldots, x^n)$ - лок. координати на U. Тоді $\forall p \in U$ системи l-форм $\{dx^{i_1} \ldots dx^{i_l}\}_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_l \le n}$ (відп., $\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_l}\}_{1 \le i_1 < \ldots < i_l \le n}$) утворюють базис $S^l(T_pM)$ (відп., $\Omega^l(T_pM)$). Тому $\forall \alpha \in S^l(M)$ (відп., $\Omega^l(M)$) $\exists!$ розкладення $\alpha|_U$ за цими формами з коефіцієнтами з $C^{k-1}(U)$.

▷ Перевіримо при $l=2$, для більших - Впр. Системи з умови тоді мають вигляд $\{dx^i dx^j\}_{1 \le i \le j \le n}$ і $\{dx^i \wedge dx^j\}_{1 \le i < j \le n}$ відп. Почнемо з кососиметричних. Отже, нехай $\alpha \in \Omega^2(T_pM)$, $\alpha \in \Omega^2(U)$ або $\alpha \in \Omega^2(M)$. В будь-якому разі її можна розкласти за лок. базисом:

або $\alpha|_U$

$$\alpha = \alpha_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = \left[\begin{matrix}\text{впорядкуємо індекси за зростанням,}\\ \text{викинувши } \alpha_{ii}=0 \text{ і згрупувавши за парами } i<j\end{matrix}\right] =$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n} \left(\alpha_{ij}\, dx^i \otimes dx^j + \alpha_{ji}\, dx^j \otimes dx^i\right) = \left[\begin{matrix}\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}\\ \text{за кососим.}\end{matrix}\right] =$$

$$= \sum_{i<j} \alpha_{ij}\left(dx^i\otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i\right) = \left[\frac{\text{Єх.}}{\text{вище}}\right] = \sum_{i<j} 2\alpha_{ij}\, dx^i \wedge dx^j =$$

Тобто розкладення існує. Воно єдине, бо його коеф. однозначно визначені коефіцієнтами розкладення за базисом $\{dx^i \otimes dx^j\}$.

Зокрема, $\{dx^i\wedge dx^j\}_{i<j}$ – базис $\Omega^2(T_pM)$.

Так само для симетричної α на T_pM, на U або на M!

або $\alpha|_U$

$$\alpha = \alpha_{ij}\, dx^i\otimes dx^j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}\, dx^i \otimes dx^i + \sum_{1\le i<j\le n}\left(\alpha_{ij}\, dx^i\otimes dx^j + \alpha_{ji}\, dx^j\otimes dx^i\right) =$$

$$= \left[\begin{matrix}\alpha_{ji} = \alpha_{ij}\\ \text{за симетр.}\end{matrix}\right] = \sum_i \alpha_{ii}\, dx^i\otimes dx^i + \sum_{i<j}\alpha_{ij}\left(dx^i\otimes dx^j + dx^j\otimes dx^i\right) = \left[\frac{\text{Єх.}}{\text{вище}}\right] =$$

$$= \sum_i \alpha_{ii}\, dx^i dx^i + \sum_{i<j} 2\alpha_{ij}\, dx^i dx^j =$$

Знову ж це єдине розкл., тому $\{dx^i dx^j\}_{i\le j}$ – базис $S^2(T_pM)$. ▲

<u>Cor.</u> $\dim S^l(T_pM) = C^l_{n+l-1}$, $\dim \Omega^l(T_pM) = C^l_n$ (зокрема, 0 при $l>n$).

<u>Єх.</u> При $l=2$ це $\frac{n(n+1)}{2}$ і $\frac{n(n-1)}{2}$ відп.

Відп Продовжимо викладки з попер. доведення. Для кососим.:

$$= \sum_{1\le i<j\le n} \left(\alpha_{ij}\, dx^i \wedge dx^j + \alpha_{ij}\, dx^i \wedge dx^j\right) = \left[\begin{array}{l}\text{кососим. } \alpha_{ij} \text{ і}\\ \wedge \text{: для 1-форм}\\ \alpha\wedge\beta = -\beta\wedge\alpha\end{array}\right] = \sum_{i<j}$$

$$\left(\alpha_{ij}\, dx^i \wedge dx^j + (-\alpha_{ji})(-dx^j \wedge dx^i)\right) = \left[\begin{array}{l}\text{"розгруповуємо" назад}\\ \text{і додаємо члени з } \alpha_{ii} = 0\end{array}\right] =$$

$$= \alpha_{ij}\, dx^i \wedge dx^j.$$

У цій сумі кожен з індексів i, j змінюється від 1 до n.

Це вже не розкл. за базисом, бо система $\{dx^i \wedge dx^j\}_{i,j=1}^{n}$ лін. залежна.

Для симетричних ан-но (з симетричності α_{ij} і $\alpha\beta = \beta\alpha$):

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\, dx^i dx^i + \sum_{1\le i<j\le n} \left(\alpha_{ij}\, dx^i dx^j + \alpha_{ji}\, dx^j dx^i\right) = \alpha_{ij}\, dx^i dx^j,$$

де так само кожний з $i, j = \overline{1,n}$.

Впр. Це вірно і для загального l: якщо $\alpha = \alpha_{i_1\ldots i_l}$ $dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_l}$ (у точці або на коорд. околі) і α - сим. (відп. кососиметрична), то $\alpha = \alpha_{i_1\ldots i_l}\, dx^{i_1} \ldots dx^{i_l}$ (відп. $\alpha = \alpha_{i_1\ldots i_l}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_l}$).

Rem. Зокрема, коеф. $\alpha_{i_1\ldots i_l} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_l}}\right)$ для таких сум.

Rem. Будемо позначати $\underbrace{dx^i\ldots dx^i}_{m} =: (dx^i)^m$. Тоді, зокрема, для симетричної 2-форми: $\alpha = \sum_i \alpha_{ii}(dx^i)^2 + 2\sum_{i<j}\alpha_{ij}dx^i dx^j$.

Наприклад, при $n=2$: $\alpha = \alpha_{11}(dx^1)^2 + 2\alpha_{12}dx^1dx^2 + \alpha_{22}(dx^2)^2$.

Pr. Якщо α - симетрична (відп., зовнішня) л. l-форма на N, то $\forall\, F \in C^k(M,N)$ $F^*\alpha$ - сим. (відп. зовн.) л. l-форма на M.

▷ З дов.: F^* зберігає властивості симетрії. △

Rem. Аналогічно поняття (косо)симетричності можна ввести для $(l,1)$-тензорних полів (векторзначних форм) і $(0,l)$-тенз. полів (полівекторних).

Rem. Отже, $\dim \Omega^l(T_pM) = C_n^l$, зокрема, 0 при $l>n$ і 1 при $l=n$. Тобто $\forall\, \omega \in \Omega^n(M)$ $\forall$ лок. коорд. $(x^1,\ldots,x^n)$ на U $\omega|_U = f\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ для деякої $f\in C^{k-1}(U)$.

Перейдемо до певних коорд. $(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$ на $\tilde{U}$ $(U\cap\tilde{U}\neq\varnothing)$.

Тоді $\forall\, i=\overline{1,n}$ $\quad dx^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\, d\tilde{x}^j$

$$\omega|_{U\cap\tilde{U}} = f\left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{i_1}}\, d\tilde{x}^{i_1}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{i_n}}\, d\tilde{x}^{i_n}\right) = \left[\begin{array}{l}\text{розписуємо в суму}\\ \text{за власт. } \wedge \text{ і прибираємо}\\ \text{нулі}\end{array}\right] =$$

$$= f\sum_{\sigma\in S_n}\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{\sigma(1)}}\cdots\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{\sigma(n)}}\, d\tilde{x}^{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge d\tilde{x}^{\sigma(n)} = \left[\begin{array}{l}\text{кососимет-}\\ \text{ричність } \wedge\end{array}\right] = f\left(\sum_{\sigma\in S_n}\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{\sigma(1)}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{\sigma(n)}}\operatorname{sign}\sigma\right) d\tilde{x}^1\wedge\ldots\wedge d\tilde{x}^n = f\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right)_{i,j=1}^{n} d\tilde{x}^1\wedge\ldots\wedge d\tilde{x}^n.$$

Визначник тут - це якобіан відобр. переходу від нових координат до старих. Позначимо його $J(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})$, де (U,φ), $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ - карти, що відп. нашим системам лок. координат. Отже, $\omega|_{\tilde{U}} = \tilde{f}\, d\tilde{x}^1\wedge\ldots\wedge d\tilde{x}^n$ де $\tilde{f}|_{U\cap\tilde{U}} = f\cdot J(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})$ (точніше, $f\cdot J(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})\circ\tilde{\varphi}$, бо це ф-ція на $U\cap\tilde{U}$)

Згадаємо ф-лу заміни координат в інтегралі Рімана:

$$\int\limits_{\varphi(D\cap U\cap\tilde{U})}(f\circ\varphi^{-1})\,dx^1\ldots dx^n = \int\limits_{\tilde{\varphi}(D\cap U\cap\tilde{U})}(f\circ\tilde{\varphi}^{-1})\,|J(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})|\,d\tilde{x}^1\ldots d\tilde{x}^n.$$

Тут $D\subset M$ - така, що ці інтеграли $\exists$ (див. нижче), а відобр. переходу $\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ - і є заміна координат. Щоб звільнитися від модуля, будемо у таких випадках розглядати лише атласи з $J>0$. Коли це можливо?

Орієнтовність гладких многовидів

M - k-гл. многовид, $k \geq 1$, $n = \dim M$.

Rem. $\forall$ карт (U, φ) і $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ M з $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ (з атласів даної гл. структури) $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ - дифеоморфізм, тому його якобіан $J(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \neq 0$ (в кожній точці) і зберігає знак на зв'язних комп. $\varphi(U \cap \tilde{U})$.

Def. Карти (U, φ) і $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ наз. узгодженими, якщо $J(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) > 0$ у всіх точках $\varphi(U \cap \tilde{U})$. k-гл. атлас A, будь-які дві карти якого (з поміж, що перетинаються) узгоджені, зветься орієнтуючим. Два орієнт. атласа A і B звуться еквівалентними, якщо $A \cup B$ - орієнт. атлас (позн. $A \sim B$).

Rem. Тобто $A \sim B \iff$ усі відобр. переходу від карт A до карт B і навпаки мають додатні якобіани.

Pr. Це відношення еквівалентності атласів (всередині даної гл. структури).

▷ Очевидно, $\mathcal{A}\sim\mathcal{A}$ (бо $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}=\mathcal{A}$) і $\mathcal{A}\sim\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B}\sim\mathcal{A}$ (бо def. симетричне).

Нехай $\mathcal{A}\sim\mathcal{B}$, тобто $\forall\, (U,\varphi)\in\mathcal{A}, (V,\psi)\in\mathcal{B}: U\cap V\neq\varnothing$ $J(\psi\circ\varphi^{-1})>0$, і $\mathcal{B}\sim\mathcal{C}$, тобто $\forall\, (V,\psi)\in\mathcal{B}, (W,\chi)\in\mathcal{C}: V\cap W\neq\varnothing$ $J(\chi\circ\psi^{-1})>0$. Тоді $\forall\, (U,\varphi)\in\mathcal{A}, (W,\chi)\in\mathcal{C}: U\cap W\neq\varnothing$ $\forall p\in U\cap W$ $\exists\, (V,\psi)\in\mathcal{B}: p\in V$. В околі цієї точки $\chi\circ\varphi^{-1}=(\chi\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\varphi^{-1}) \Rightarrow$ [ланцюгове правило і правило множення визначників] $\Rightarrow J(\chi\circ\varphi^{-1}) =$

$= J(\chi\circ\psi^{-1})\, J(\psi\circ\varphi^{-1})>0$. І так $\forall p\in U\cap W$, тобто $J(\chi\circ\varphi^{-1})>0$ і карти узгоджені. Т.ч., $\mathcal{A}\sim\mathcal{C}$. ▲

def. Клас еквівалентності орієнтуючих атласів M зветься орієнтацією M. Якщо у M $\exists$ орієнт. атлас, M зветься орієнтовним, в іншому випадку — неорієнтовним. Пара $(M,[\mathcal{A}])$, де M — орієнтовний k-гл. многовид, а $[\mathcal{A}]$ — орієнтація на ньому, зветься орієнтованим многовидом.

Rem. Тобто орієнтації — це підкласи гладкої структури.

Pr. Нехай M — орієнтовний зв'язний k-гл. многовид. Тоді на M $\exists$ рівно 2 орієнтації.

▷ Отже, $\exists$ $\mathcal{A}$ – орієнт. атлас M: $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. $\forall \alpha \in A$ нехай $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ (лок. коорд. ф-ції). Покладемо $\hat{\varphi}_\alpha := (-x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^n)$. Тоді $\hat{\mathcal{A}} := \{(U_\alpha, \hat{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ – теж атлас, k-гл. з якобіанами відобр. переходу

$$J(\hat{\varphi}_\beta \circ \hat{\varphi}_\alpha^{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^1} & -\frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^2} & \cdots & -\frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^n} \\ -\frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^1} & \frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^1} & \cdots & \frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^1} & \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^2} & \cdots & \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^n} \end{vmatrix} = (-1)^2 J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) > 0,$$

тобто він орієнтуючий. При цьому $\hat{\varphi}_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ k-гладкі, і

$$J(\hat{\varphi}_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) = \begin{vmatrix} -\frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^1} & \cdots & -\frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^n} \\ \frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^1} & \cdots & \frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^1} & \cdots & \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^1} \end{vmatrix} = -J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) < 0 \text{ і ан-но } J(\varphi_\beta \circ \hat{\varphi}_\alpha^{-1}) < 0$$

$\forall \alpha, \beta \in A$: $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Тобто, зокрема, $\hat{\mathcal{A}}$ – з тієї ж C гл. структури, що й $\mathcal{A}$, але $\mathcal{A} \nsim \hat{\mathcal{A}}$ як орієнтуючі. Отже, $\exists \geq 2$ орієнтації. Щоб показати, що їх рівно 2, достатньо показати, що $\forall$ орієнт. $\mathcal{B}$ якщо $\mathcal{B} \nsim \mathcal{A}$, то $\mathcal{B} \sim \hat{\mathcal{A}}$.

Дійсно, нехай $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ і $\mathcal{B} \nsim \mathcal{A}$, тобто $\exists\, \alpha_0 \in A$, $\beta_0 \in B$, $p_0 \in U_{\alpha_0}\cap V_{\beta_0}$: $J(\psi_{\beta_0}\circ\varphi_{\alpha_0}^{-1})(\varphi_{\alpha_0}(p_0)) < 0$. Визначимо ф-цію $f : M \to \mathbb{R}$:

$$f(p) := \operatorname{sign} J(\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(p)),$$

де $\alpha\in A$, $\beta\in B$: $p\in U_\alpha\cap V_\beta$. Ця ф-ція коректно визначена, бо $\forall$ іншої пари індексів $\tilde\alpha\in A$, $\tilde\beta\in B$: $p\in U_{\tilde\alpha}\cap V_{\tilde\beta}$ на деякому околі $\varphi_{\tilde\alpha}(p)$ буде

$$\operatorname{sign} J(\psi_{\tilde\beta}\circ\varphi_{\tilde\alpha}^{-1}) = \operatorname{sign} J(\psi_{\tilde\beta}\circ\psi_\beta^{-1}\circ\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha\circ\varphi_{\tilde\alpha}^{-1}) = \left[\begin{array}{l}\text{ланц. правило}\\ \text{і правило множ.}\\ \text{визначників}\end{array}\right] =$$
$$= \underbrace{\operatorname{sign} J(\psi_{\tilde\beta}\circ\psi_\beta^{-1})}_{1}\operatorname{sign} J(\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})\underbrace{\operatorname{sign} J(\varphi_\alpha\circ\varphi_{\tilde\alpha}^{-1})}_{1} = \operatorname{sign} J(\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}),$$

бо атласи орієнтуючі. Крім того, $f\in C(M,\{-1,1\})$, бо локально на $U_\alpha\cap V_\beta$ $f = \dfrac{J(\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})}{|J(\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|}\circ\varphi_\alpha$ задається непер. ф-ціями (визначення поліномів від частинних похідних коорд. ф-цій відобр. переходу + модуль), і, звичайно $f\neq 0$. Оскільки M зв'язний і $f(p_0) = -1$, $f(p) = -1$ $\forall\, p\in M$. Тобто $\forall\, \alpha\in A$,

$\beta \in B$ $\quad J(\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) < 0$ у всіх точках області визначення.
Тому $J(\psi_\beta \circ \hat{\varphi}_\alpha^{-1}) = -J(\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) > 0$, тобто $B \sim \hat{A}$. ▲

Cor. Орієнтовний многовид з m компонентами зв'язності має рівно 2^m орієнтацій.

Ex. 1. $\mathbb{R}^n$: очевидно, $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ - орієнтуючий. Якщо глоб. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ задають орієнтацію $\mathbb{R}^n$ (тобто відп. атлас з 1 карти її задає), то базис $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ задає відп. орієнтацію у лінійно-алгебраїчному сенсі на $T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ і навпаки.

2. Нехай у M $\exists$ атлас $A = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$: $U \cap V$ зв'язний. Тоді аналогічно попер. доведенню або $J(\psi \circ \varphi^{-1}) > 0$ всюди і тому A - орієнт., або $J(\psi \circ \varphi^{-1}) < 0$ всюди і тоді $\{(U, \varphi), (V, \hat{\psi})\}$ (у позначеннях попер. доведення) - орієнт. Отже, M - орієнт. Зокрема, сфера S^n при $n \geq 2$ орієнтовна.

S^n

Впр. S^1 орієнтовне.

Rem. Зв'язність $U \cap V$ тут суттєва, див. приклад листа Мебіуса нижче.

3. Прямий добуток орієнтовних многовидів орієнтовний (Впр.). Наприклад, тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ орієнт.

4. M орієнт., $U \subset M$ відкр. $\Rightarrow$ U орієнт. (Впр.).

5. $\mathbb{R}P^n$ орієнт. при непарних n (Впр.).

Як доводити неорієнтовність?

Rem. Нехай орієнтація M задається атласом A, $p \in M$. Нехай $(U, \varphi) \in A$: $p \in U$, $(x^1, \ldots, x^n)$ - відп. лок. коорд. Задамо орієнтацію T_pM базисом $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ (як у прикладі $\mathbb{R}^n$ вище). Ця орієнтація коректно однозначно визначена орієнтацією M: якщо $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ - інша карта з A або $\forall$ іншого атласа цієї орієнтації з лок. коорд. $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$, $p \in U \cap \tilde{U}$, то $\forall i = \overline{1,n}$ $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^j}$, тобто м-ця переходу між відповідними базисами - це м-ця Якобі $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ у $\tilde{\varphi}(p)$ з визначником

>0, тому базиси однаково орієнтовані.

<u>def.</u> Векторним полем уздовж кривої $\gamma : I \to M$ (де $I \subset \mathbb{R}$ — деякий проміжок) будемо називати $X : I \to TM : \forall t \in I$ $X(t) \in T_{\gamma(t)} M$. Будемо говорити, що вект. поля $X_1, \ldots, X_n$ уздовж $\gamma : I \to M$ задають базис уздовж γ, якщо $\forall t \in I$ $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ — базис $T_{\gamma(t)} M$.

<u>Pr.</u> Нехай $\gamma \in C([a,b], M)$ — ~~[illegible]~~ шлях у M і $\{X_i \in C([a,b], TM)\}_{i=1}^{n}$ задають базис уздовж γ. Нехай M орієнтований і $\forall p \in M$ на T_pM введена орієнтація як у <u>Rem.</u> вище. Тоді $\{X_1(a), \ldots, X_n(a)\}$ додатно (відн., від'ємно) орієнтований у $T_{\gamma(a)} M \Leftrightarrow \{X_1(b), \ldots, X_n(b)\}$ додатно (відн., від'ємно) орієнтований у $T_{\gamma(b)} M$.

▷ Розглянемо $f : [a,b] \to \{-1, 1\} : f(t)$ — знак орієнтації $\{X_i(t)\}_{i=1}^{n}$ у $T_{\gamma(t)} M$. Вона неперервна, бо

$\forall t \in [a, b]$ $\forall$ карти (U, φ) $\forall$ атласа орієнтації M: $U \ni \gamma(t)$ з лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^n)$ якщо $X_i \big|_{\gamma^{-1}(U)} = X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $i = \overline{1, n}$, то $X_i^j \in C(\gamma^{-1}(U), \mathbb{R})$ в силу неперр. X_i, і

$$f\big|_{\gamma^{-1}(U)} = \frac{\det (X_i^j)_{i,j=1}^n}{|\det (X_i^j)_{i,j=1}^n|}$$

, тому f неперервна на відкр. окол. $\gamma^{-1}(U)$ точки t. Отже, $f \in C([a, b], \{-1, 1\})$, тому $f(a) = f(b)$. $\blacktriangle$

зв'язна

<u>def.</u> Дезорієнтуючим шляхом (петлею) у M наз. шлях $\gamma \in C([a, b], M)$: $\gamma(a) = \gamma(b) = p$ разом з неперервними полями $\{X_i \in C([a, b], TM)\}_{i=1}^n$, що задають базис уздовж γ, такими, що базиси $\{X_i(a)\}_{i=1}^n$ і $\{X_i(b)\}_{i=1}^n$ протилежно орієнтовані у T_pM.

<u>Rem.</u> У цьому <u>def.</u> орієнтація M взагалі не згадується.

<u>Cor.</u> Якщо у M існує дезорієнтуючий шлях, то M неорієнтовний.

$\triangleright$ $\nearrow$ у M $\exists$ орієнтація. З попер. <u>Pr.</u>, тоді $\{X_i(a)\}_{i=1}^n$ і $\{X_i(b)\}_{i=1}^n$ повинні бути одночасно >0 або <0 орієнт. в T_pM, тобто однаково $\lightning$ $\blacktriangle$

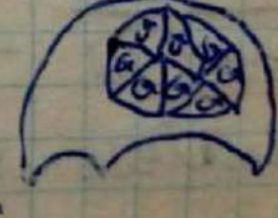
Ex. 1. (Відкритий) лист Мебіуса в $\mathbb{R}^3$:

Впр. Записати це аналітично.

Ex. 2. $\mathbb{R}P^n$ при парних n (**Впр.**: використати γ — факторизований напівмеридіан, що з'єднує діаметрально протилежні точки S^n:)

Rem. Вірно й обернене: M неорієнт. $\Rightarrow \exists$ дезорієнтуючий шлях. При цьому властивість петлі бути дезорієнт. шляхом зберігається при гомотопіях (петлі $\gamma, \mu \in C([a,b], M)$ з $\gamma(a)=\gamma(b)=\mu(a)=\mu(b)=p$ гомотопні, якщо $\exists\, F \in C([a,b]\times[0,1], M)$: $F(t,0)=\gamma(t)$, $F(t,1)=\mu(t)$ $\forall t$ і $F(a,s)=F(b,s)=p$ $\forall s$), тому всі однозв'язні многовиди (для яких усі петлі гомотопні постійній $\gamma(t)=p$) орієнтовні. Наприклад, S^n при $n\geq 2$.

Rem. Існують різні означення орієнтовності для різних класів многовидів, але вони всі узгоджені (якщо застосовні два, то орієнтовність відносно них збігається). Наприклад, для поверхонь — через тріангуляцію.



Інтегрування форм

def. Нехай M - многовид. Говорять, що $A \subset M$ - міри 0 за Жорданом, якщо $\exists$ карти $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{m}$: $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ і $\varphi_i(A \cap U_i)$ - міри 0 за Жорданом у $\mathbb{R}^n$ (де $n = \dim M$), тобто $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \{x_{ij}\}_{j=1}^{l_i}$ і $\{r_{ij} > 0\}_{j=1}^{l_i}$: $\varphi_i(A \cap U_i) \subset \bigcup_{j=1}^{l_i} B_{r_{ij}}(x_{ij})$ (евкл. кулі), і $\sum_{j=1}^{l_i} \mathrm{Vol}\, B_{r_{ij}}(x_{ij}) < \varepsilon$ (евкл. об'єми, можна замінити на $\sum_{j=1}^{l_i} r_{ij}^n < \varepsilon$). $D \subset M$ зветься кубовною (вимірним за Жорданом), якщо $\overline{D}$ - компакт і ∂D - міри 0 за Жорданом.

Rem. Кубовні множини мають звичні з аналізу властивості. Зокрема, для кубовних D_1 і D_2 $D_1 \cup D_2$ і $D_1 \cap D_2$ кубовні.

def Нехай M - k-гладкий ($k \geq 1$) n-вимірний орієнтований многовид, $D \subset M$ кубовна і $\omega \in \Omega^n(M)$ - $(k-1)$-гл. зовнішня

n-форма. Нехай $D \cap \operatorname{supp} \omega \subset U$, де $\operatorname{supp} \omega := \{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}$ - носій ω, а U - носій деякої карти (U, φ) з якось атласа, що $\in$ орієнтації M (або, як це говорять, задає орієнтацію). Нехай $(x^1, \dots, x^n)$ - лок. коорд., що відповідають (U, φ), і $\omega|_U = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Інтегралом (від) ω по D зветься тоді інтеграл Рімана

$$\int_D \omega := \int_{\varphi(D \cap U)} f \circ \varphi^{-1} dx^1 \dots dx^n. \qquad (*)$$

__Rem.__ $\varphi(D \cap U)$ кубовна в $\mathbb{R}^n$ (__Впр.__). $f \circ \varphi^{-1}$ - $(k-1)$-гладка, зокрема, неперервна, тому інтеграл $\exists$. Перевіримо коректність: нехай $D \cap \operatorname{supp} \omega \subset U \cap \tilde{U}$, де $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ - карта з атласа (можливо, іншого), що задає орієнт., з лок. коорд. $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$, і $\omega|_{\tilde{U}} = \tilde{f}\, d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n$. Тоді

$$\int_{\varphi(D \cap U)} f \circ \varphi^{-1} dx^1 \dots dx^n = \left[\begin{array}{l} \varphi(D \cap U) \text{ можна замінити на} \\ \varphi(D \cap U \cap \tilde{U}), \text{ бо за}^{\text{й}}\text{нехай в} \\ \varphi(D \cap U)\ f \circ \varphi^{-1} = 0;\ \text{ф-ла заміни} \\ \text{у інтегралі Рімана для диф-зма } \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \end{array}\right] =$$

$$= \int\limits_{(\tilde\varphi\circ\varphi^{-1})(\varphi(\mathcal{D}\cap U\cap\tilde U))} f\circ\varphi^{-1}\circ(\tilde\varphi\circ\varphi^{-1})^{-1}\cdot\left|J\left((\tilde\varphi\circ\varphi^{-1})^{-1}\right)\right| d\tilde x^1\ldots d\tilde x^n = \left[\begin{array}{l}(\tilde\varphi\circ\varphi^{-1})^{-1} = \varphi\circ\tilde\varphi^{-1};\\ |J(\varphi\circ\tilde\varphi^{-1})| = J(\varphi\circ\tilde\varphi^{-1}),\\ \text{бо карти узгоджені}\\ \text{(однієї орієнт.)}\end{array}\right] =$$

$$= \int\limits_{\tilde\varphi(\mathcal{D}\cap U\cap\tilde U)} f\circ\tilde\varphi^{-1}\cdot J(\varphi\circ\tilde\varphi^{-1})\, d\tilde x^1\ldots d\tilde x^n = \left[\begin{array}{l}\text{ан-но, можна замінити}\\ \tilde\varphi(\mathcal{D}\cap U\cap\tilde U)\text{ на }\tilde\varphi(\mathcal{D}\cap\tilde U),\\ \text{ф-ла заміни коеф. у}\\ n\text{-формі (див. вище)}\end{array}\right] = \int\limits_{\tilde\varphi(\mathcal{D}\cap\tilde U)} \tilde f\circ\tilde\varphi^{-1} d\tilde x^1\ldots d\tilde x^n$$

що і доводить коректність. У загальному випадку існування інтеграла гарантується теоремою:

<u>Th.</u> Нехай M – k-гл. ($k\geq 1$) n-вим. орієнтований мн., $\mathcal{D}\subset M$ кубовна. Тоді $\exists!$ лінійний функціонал $\int\limits_{\mathcal{D}} : \Omega^n(M)\to\mathbb{R}$ такий, що $\forall\omega\in\Omega^n(M)$ з $\mathcal{D}\cap\operatorname{supp}\omega\subset U$, де (U,φ) - карта з атласу, що задає орієнт., з лок. коорд. $(x^1,\ldots,x^n)$, і $\omega|_U = f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ виконується

$$\int\limits_{\mathcal{D}}\omega = \int\limits_{\varphi(\mathcal{D}\cap U)} f\circ\varphi^{-1} dx^1\ldots dx^n. \qquad (*)$$

При цьому $\forall$ кубовних $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$ в M з $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2 = \varnothing$ і $\forall\omega$

Означає просто що $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2=\varnothing$

$$\int\limits_{\mathcal{D}_1\sqcup\mathcal{D}_2}\omega = \int\limits_{\mathcal{D}_1}\omega + \int\limits_{\mathcal{D}_2}\omega$$

def. $\int_{D} \omega$ тоді зветься інтегралом (від) ω по D.

Ця теорема доводиться за допомогою розбиттів одиниці:

def. Розбиттям одиниці на топ. пр-рі X наз. набір неперервних ф-цій $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset C(X, \mathbb{R})$ таких, що:

- $\forall x \in X$ $\exists$ відкр. $U \ni x$: $|\{\alpha \in A \mid U \cap \operatorname{supp} h_\alpha \neq \varnothing\}| < \infty$.
- $\forall x \in X$ $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha(x) = 1$ (коротко: $\sum_{\alpha} h_\alpha = 1$).

Rem. Тут сума $\sum_{\alpha} h_\alpha(x)$ має сенс, бо згідно з першою умовою лише скінч. кількість $h_\alpha(x) \neq 0$, їх і додаємо.

def. Говорять, що покриття $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ множини X вписане в її покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, якщо $\forall \beta \in B$ $\exists \alpha \in A$: $V_\beta \subset U_\alpha$.

def. Покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ топ. пр-ру X зветься локально скінченним, якщо $\forall x \in X$ $\exists$ відкр. $U \ni x$: $|\{\alpha \in A \mid U \cap U_\alpha \neq \varnothing\}| < \infty$

X зветься паракомпактним, якщо у $\forall$ його відкрите покриття можна вписати локально скінченне [redacted] покриття.

Ex. 1. Компактні простори паракомпактні.

2. $\mathbb{R}^n$ паракомп. (Впр.)

Def. Розбиття одиниці $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$ на пр-рі X підпорядковане його покриттю $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, якщо $\forall\alpha\in A$ $\operatorname{supp} h_\alpha \subset U_\alpha$.

Th. Нехай M - k-гл. многовид ($k\geq 0$). Тоді M паракомпактний. Більш того, в $\forall$ його відкрите покриття можна вписати локально скінч. покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, для якого $\exists$ підпорядковане йому k-гладке фінітне невід'ємне розбиття одиниці $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (тобто $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset C^k(M)$, $\forall\alpha\in A$ $\operatorname{supp} h_\alpha$ компактне, і $h_\alpha\geq 0$).

Rem. Тепер застосуємо цю Th. до деякого атласа M (знову k-гл. з $k\geq 1$, $\dim M = n$), що задає орієнт. Отримаємо покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ і розб. од. $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Для кубовної $D\subset M$ і $\omega\in\Omega^n(M)$ покладемо

$$\int_D \omega = \int_D \sum_{\alpha\in A} h_\alpha\omega := \sum_{\alpha\in A}\int_D h_\alpha\omega .$$

$\{U_\alpha\}$ лок. скінч., тому $\forall p \in \overline{D}$ $\exists$ відкр. $U_p \ni p$: U_p перетинається лише зі скінч. кількістю U_α. D побудовна $\Rightarrow$ $\overline{D}$ комп. $\Rightarrow$ у відкр. покр. $\{U_p\}_{p \in \overline{D}}$ $\exists$ скінч. під-покриття : $D \subset \overline{D} \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{p_i}$. Тому D перетинається лише зі скінч. кількістю U_α. Для інших α $h_\alpha \omega|_D = 0$, тому й інтеграли в сумі справа покладемо рівними 0, залишиться скінч. сума. Кожен з її доданків $\int_D h_\alpha \omega$ знаходиться як інтеграл Рімана за ф-лою (*), бо $\operatorname{supp} h_\alpha \omega \subset U_\alpha$ - входить до носія деякої карти з атласу орієнтації.

__Rem.__ $\int_D \omega$ можна також визначити для випадку, коли ∂D - міри 0 за Ж., але $\overline{D}$ не обов'язково компакт (наприклад, $D = M$), а $\omega \in \Omega^n(M)$ - фінітна, тобто $\overline{\operatorname{supp} \omega}$ - компакт. Для цього просто інтегруємо по $\overline{D \cap E}$, E - якась побудовна, $E \supset \overline{\operatorname{supp} \omega}$.