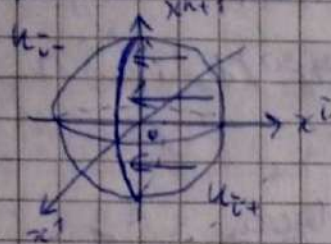


Чи це атлас Суворова у S^n ?

Ортонормоване проектування:



$$B = \{(U_{i+}, \varphi_{i+}), (U_{i-}, \varphi_{i-})\}_{i=1}^{n+1} - 2n+2 \text{ картки}$$

$$U_{i+} = \{x \in S^n \mid x^i > 0\}$$

$$U_{i-} = \{x \in S^n \mid x^i < 0\}$$

- відкриває

$$\varphi_{i+}(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$$

$$\varphi_{i-}(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$$

$\varphi_{i+}: U_{i+} \rightarrow B^n$, $\varphi_{i-}: U_{i-} \rightarrow B^n$ - неперервні, біж (де

$$B^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < 1\} \cong \mathbb{R}^n$$

Одкриває:

$$\varphi_{i+}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{i-1} (y^j)^2}, y^i, \dots, y^n) - \text{неперервні}$$

$$\varphi_{i-}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^{i-1}, -\sqrt{1 - \sum_{j=1}^{i-1} (y^j)^2}, y^i, \dots, y^n) - \text{неперервні}$$

Отже це атлас.

Вибірн. переходи $\varphi_{i+} \circ \varphi_{i-}^{-1}$ - x -картки, тодімо B задає м. структуру на S^n . Вибірн. переходи між картками різніс структури: при $i = 1, n$

$$\varphi_N \circ \varphi_{i+}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{1-y^n}, \dots, \frac{\sqrt{1-|y|^2}}{1-y^n}, \frac{y^{n-1}}{1-y^n} \right): B^n \rightarrow \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^i > 0\}$$

$$\varphi_N \circ \varphi_{i-}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{1-y^n}, \dots, \frac{-\sqrt{1-|y|^2}}{1-y^n}, \frac{y^{n-1}}{1-y^n} \right): B^n \rightarrow \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^i < 0\}$$

$$\varphi_S \circ \varphi_{i+}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{1+y^n}, \dots, \frac{\pm \sqrt{1-|y|^2}}{1+y^n}, \frac{y^{n-1}}{1+y^n} \right): B^n \rightarrow \{y \in \mathbb{R}^n \mid \pm y^i > 0\}$$

$$\varphi_{i+} \circ \varphi_N^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{2y^1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y^{i-1}}{|y|^2+1}, \frac{2y^{i+1}}{|y|^2+1}, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1} \right): \{y \in \mathbb{R}^n \mid \pm y^i > 0\} \rightarrow B^n$$

$$\varphi_{i-} \circ \varphi_S^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{2y^1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y^{i-1}}{|y|^2+1}, \frac{2y^{i+1}}{|y|^2+1}, \frac{1-|y|^2}{|y|^2+1} \right): \{y \in \mathbb{R}^n \mid \pm y^i > 0\} \rightarrow B^n$$

При $i = n+1$:

$$\varphi_N \circ \varphi_{n+1+}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{1-\sqrt{1-|y|^2}}, \dots, \frac{y^n}{1-\sqrt{1-|y|^2}} \right): B^n \setminus \{0\} \rightarrow \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| > 1\}$$

$$\varphi_N \circ \varphi_{n+1-}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{1+\sqrt{1-|y|^2}}, \dots, \frac{y^n}{1+\sqrt{1-|y|^2}} \right): B^n \rightarrow \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < 1\}$$

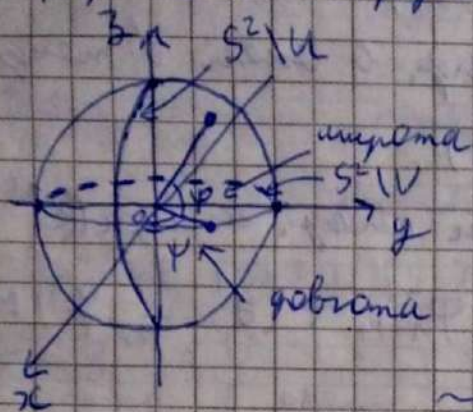
$$\varphi_S \circ \varphi_{n+1+}^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_{n+1-}^{-1}, \quad \varphi_S \circ \varphi_{n+1-}^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_{n+1+}^{-1}$$

$$\varphi_{n+1+} \circ \varphi_N^{-1} = \left(\frac{2y^1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y^n}{|y|^2+1} \right) = \varphi_{n+1+} \circ \varphi_S^{-1}(y^1, \dots, y^n) \text{ на } B^n$$

Всі ці вибірн. x -картки, отже

$A \sim B$: картки структури збігаються.

Сферичні координати. Об'ємний елемент $n=2$:



$$\begin{cases} x = \cos \varphi \cos \psi \\ y = \cos \varphi \sin \psi \\ z = \sin \varphi \end{cases}$$

задає $\Phi^{-1}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \rightarrow U$, де відкрита $U = S^2 \setminus \{(x, y, z) \in S^2 \mid z=0, x \geq 0\}$ - границя до найближчого віз, неперервна, одержана:

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} (\arcsin z, \arccos \frac{x}{\sqrt{1-z^2}}), & y \geq 0 \\ (\arcsin z, 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{1-z^2}}), & y \leq 0 \end{cases}$$

теж неперервне, тому (U, Φ) - карта. До атласу $\mathcal{A}$ додати (V, Ψ) , де $V = S^2 \setminus \{(x, y, z) \in S^2 \mid z=0, x \leq 0\}$, $\Psi: V \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$ задається Ψ^{-1} :

$$\begin{cases} x = -\cos \chi \cos \omega \\ y = \sin \chi \\ z = \cos \chi \sin \omega \end{cases}$$

Фіз 1. Перевірити, що $\mathcal{C} := \{(U, \Phi), (V, \Psi)\}$ - атлас S^2 , $\mathcal{A}$ -магніт.

2. Чи задає $\mathcal{C}$ ту ж структуру, що $A \in B$?

3. Визначити, що таке $\mathbb{CP}^n$ (аналогічно до $\mathbb{RP}^n$). Показати, що це $2n$ -вимірний $\mathcal{A}$ -магніт многовид. Що таке $\mathbb{CP}^1$?

4. Побудувати m -структуру на $M \times N$ за m -структурами на M і на N .

5. Побудувати m -структуру на відкритій $U \subset M$ за m -структурою на M .