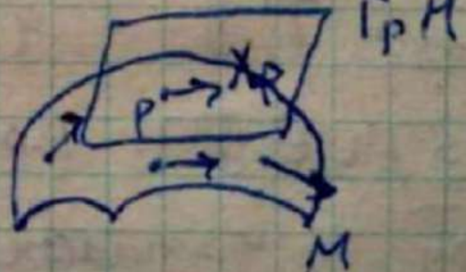
Властивості векторних полів

M – k-м. многовид, $k \geq 1$, $n = \dim M$.



def. $(0,1)$ – тензорне поле на M $X : M \to TM^0_1 = TM$ зветься векторним полем на M.

Рем. Тобто $X: p \mapsto X_p \in T_pM^0_1 = T_pM$. Для лок. координат $(x^1, \dots x^n)$ на U $\forall p \in U$ $X_p = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$, де $X^i: U \to \mathbb{R}$ – ф-ції (лок. координати X). Т.ч., $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, де $\frac{\partial}{\partial x^i}$ тепер позначають і поля на U: $p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$. $X \in C^q(M, TM)$ ($\in q$-гладких вект. полів) $\Leftrightarrow X^i \in C^q(U)$, $i = \overline{1,n}$ $\forall$ лок. координат. q-гладкі в.п. на M утворюють вект. простір над $\mathbb{R}$ і модуль над $C^q(M)$. Позначатимемо через $\mathfrak{X}^q(M)$. Тут $q = \overline{0, k-1}$.

Def. Нехай $X \in \mathfrak{X}^q(M)$, $f \in C^l(M)$, де $l = \overline{1,k}$. Похідною f за X (у напрямку X) зветься $X(f): p \in M \mapsto X_p(f) \in \mathbb{R}$.

Рем. Локально (у введених вище позначеннях) $X(f)\Big|_U = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$, тому $X(f) \in \overbrace{C^{\min(q, l-1)}(M)}^{\text{зокрема, для конст. } f = \lambda \in \mathbb{R} \ X(\lambda) = 0}$. Крім того, в силу властивостей диференціювання за X_p $\forall p \in M$ маємо $\forall f, g \in C^l(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$X(\lambda f + \mu g)(p) = X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p(f) + \mu X_p(g) = (\lambda X(f) + \mu X(g))(p),$$

тобто $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$. І правило Лейбніца:

$$X(fg)(p) = X_p(fg) = X_p(f)\cdot g(p) + f(p)\cdot X_p(g) = \big(X(f)\cdot g + f\cdot X(g)\big)(p).$$

Тобто $\quad X(fg) = X(f)\cdot g + f\cdot X(g) \qquad (*)$

<u>Сл.</u> Тобто $f \mapsto X(f)$ – лінійне відображення $C^q(M) \to C^{\min(q,\ell-1)}(M)$, що задовольняє $(*)$. Такі відображення утворюють вект. підпростір у просторі всіх лінійних $C^q(M) \to C^{\min(q,\ell-1)}(M)$ (підмодуль).

<u>Зат.</u> Виявляється, що диференціювання визначає поле однозначно (так само як диференціювання в точці однозначно визначає дотичний вектор), тобто відображення

$$\mathcal{X}^q(M) \to \left\{ \begin{matrix} \text{лінійні відображення} \\ C^q(M) \to C^q(M), \text{ що задов. } (*) \end{matrix} \right\}$$

що ставить у відповідність полю X диференціювання $f \mapsto X(f)$ – лінійний ізоморфізм вект. просторів і $C^q(M)$-модулів.

Ідея доведення полягає в тому, що, як раніше для векторів, $\forall$ лок. корд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U $\; X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ однозначно визначене ф-ціями $X^i = X(x^i)$, які можна знайти з диференціювання, хоча ф-цій x^i й визначені лише локально. Або: $\forall p$ $f \mapsto X(f)(p)$ задає $X_p \in T_pM$ (Вправ.).

Озн. Нехай гладкість многовиду $k \geq 2$. Дужкою Лі векторних полів $X, Y \in \mathcal{X}^q(M)$, $q \geq 1$, зветься

$$[X,Y] : f \in C^k(M) \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Зам. $X(f), Y(f) \in C^q(M) \Rightarrow [X,Y](f) \in C^{\min(q,q-1)}(M) = C^{q-1}(M)$.

Тобто ми визначили поле $[X,Y] \in \mathcal{X}^{q-1}(M)$ через диференціювання, як намагалися у попер. **Зам.** Це можна зробити в силу:

Впр. $[X,Y] : f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$ дійсно задає лінійне $C^q(M) \to C^{q-1}(M)$, що задовольняє $(*)$.

Зам. Часто пишуть $[X,Y] = XY - YX$, де множення означає композицію диференціювань.

Зам. Знайдемо локальне задання дужки Лі у лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U: якщо $[X,Y]|_U = [X,Y]^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, то $\forall i = \overline{1,n}$

$$[X,Y]^i = [X,Y](x^i) = X(Y(x^i)) - Y(X(x^i)) =$$

Нехай $X|_U = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Y|_U = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$:

$$= X\Big(Y^j \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)}_{\delta^i_j}\Big) - Y\Big(X^j \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)}_{\delta^i_j}\Big) = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}(Y^i) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(X^i).$$

Отже, $$[X, Y]|_U = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (**).$$

Впр. Перевірити, що (**) коректно задає у кожній $p \in U$ вектор $$[X,Y]_p = \left(X^j(p)\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(p) - Y^j(p)\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(p)\right)\frac{\partial}{\partial x^i},$$ тобто що виконується правило перетворення координат.

Rem. В силу попер. Впр., можна визначити $[X,Y]: p \mapsto$ $\mapsto [X,Y]_p$ за допомогою (**), не використовуючи диференціювання. З (**) випливає, що це $(k-1)$-гл. поле. Тоді $\forall f \in C^k(M)$ $\forall$ лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U

$$[X,Y](f)|_U = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i} = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) -$$
$$- X^j Y^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) + Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} =$$

Оскільки $\forall i, j = \overline{1,n}$

$$X^j Y^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = [i \leftrightarrow j] = X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \left[\substack{f \in C^r(M) \\ k \geq 2}\right] = X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i},$$

тому члени з другими похідними скорочуються:

$$\circeq \big(X(Y(f)) - Y(X(f)) \big)\big|_u .$$

Тобто ці два <u>def.</u> $[X,Y]$ узгоджені.

<u>Rem.</u> Зокрема, $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0 \ \ \forall\, i,j = \overline{1,n}$ (з будь-якого <u>def.</u>).

<u>Pr.</u> (властивості дужки Лі) $\forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}^r(M)$, $f \in C^r(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

<u>1.</u> $[X,Y] = -[Y,X]$ (кососиметричність).

<u>2.</u> $[X+Y, Z] = [X,Z] + [Y,Z]$ і $[X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$.

<u>3.</u> $[fX, Y] = f[X,Y] - Y(f)X$ і $[X, fY] = f[X,Y] + X(f)Y$

(зокрема, $[\lambda X, Y] = \lambda[X,Y] = [X, \lambda Y]$).

<u>4.</u> $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (тотожність Якобі).

<u>Rem.</u> У <u>4.</u> вважаємо $r \geq 2$, тому $k \geq 3$.

<u>2.</u> і <u>3.</u> для λ означають, що $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}^r(M) \times \mathfrak{X}^r(M) \to \mathfrak{X}^{r-1}(M)$ білінійне. Зокрема, при $k = r = \infty$ дужка Лі задає на

$\mathfrak{X}^\infty(M)$ структуру алгебри (над $\mathbb{R}$), точніше, алгебри Лі в силу 1. і 4.

▷ 1. $[Y,X] = YX - XY = -[X,Y]$.

2. $[X+Y,Z] = (X+Y)Z - Z(X+Y) = \left[\begin{matrix}\text{композиція диф.}\\ \text{дистрибутивна}\end{matrix}\right] =$

$= \underline{XZ} + \underline{\underline{YZ}} - \underline{ZX} - \underline{\underline{ZY}} = \underline{[X,Z]} + \overline{\underline{[Y,Z]}}$, друге ан-но (або з 1.).

3. $\forall g \in C^k(M)$ $\quad [fX,Y](g) = (fX)(Y(g)) - Y((fX)(g)) \overset{(*)}{=} \underline{fX(Y(g))} -$

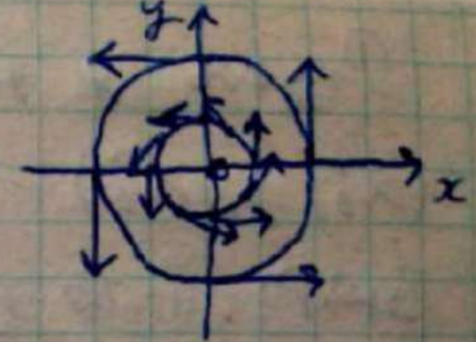
$- Y(f)X(g) - \underline{fY(X(g))} = (\underline{f[X,Y]} - Y(f)X)(g)$, друге ан-но.

4. $[[X,Y],Z] = [X,Y]Z - Z[X,Y] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$

(композиція диференціювань асоціативна). Розписуючи так само $[[Y,Z],X]$ та $[[Z,X],Y]$ і приводячі подібні, отримаємо 0 (Впр.). ◭

Def. Крива $\gamma \in C^{k+1}((a,b),M)$ зветься інтегральною траєкторією (інтегральною кривою) поля $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, якщо $\forall t \in (a,b)$ $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$.

Ex. $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $X_{(x,y)} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.



Якщо $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ задає інт. траєкторію,
то $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$,

тобто $\gamma(t) = (C_1\cos t + C_2 \sin t,\ C_1 \sin t - C_2\cos t)$ – кола з центром в $(0,0)$.

Тв. 1 (існування) $\forall X \in \mathcal{X}^r(M)$, $r \geq 1$ $(\Rightarrow k \geq 2)$ $\forall p \in M$ $\exists \varepsilon > 0$, $\gamma \in C^{r+1}((-\varepsilon,\varepsilon), M)$ такі, що $\gamma(0) = p$ (у таких випадках говорять, що крива проходить через p) і γ – інт. тр. X.

2. (єдиність). Нехай $\gamma, \mu \in C^{r+1}((a,b), M)$ – інт. тр. $X \in \mathcal{X}^r(M)$, $r \geq 1$.
Якщо $\exists\, t_0 \in (a,b)$ таке, що $\gamma(t_0) = \mu(t_0)$, то $\gamma = \mu$.

▷ У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U будемо шукати γ з лок. заданням $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$. Якщо $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, то умова $\gamma' = X_\gamma$ має вигляд
$(\gamma^i)' = X^i(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, $i = \overline{1,n}$ (тут використали лок. задання X^i)

Разом з умовами $\gamma^i(t_0)=x_0^i$, $i=\overline{1,n}$ ($\Leftrightarrow \gamma(t_0)=p$, де $(x_0^1,\dots,x_0^n)$ – координати p) це задача Коші для системи ЗДР 1-го порядку з гладкими X^i. Тоді, зокрема $\exists\, \varepsilon>0$ і $\exists$ розв'язок $\{\gamma^i \in C^{r+1}((-\varepsilon,\varepsilon),\mathbb{R})\}_{i=1}^{n}$ з $\gamma^i(0)=x_0^i$, $i=\overline{1,n}$.
Це доводить <u>1.</u> Властивість <u>2.</u> для кривих $\gamma:(a,b)\to U$ випливає з єдиності розв'язку задачі Коші.

<u>Впр.</u> Вивести звідси <u>3.</u> для загального випадку (використати лему Лебега). $\blacktriangle$

<u>def.</u> $X\in\mathfrak{X}^r(M)$ $(r\geq 1)$ називається повним, якщо $\forall\, p\in M$ $\exists$ інт. тр. $\mathbb{R}\to M$ поля X, що прох. через p (тобто $\exists\, t_0: \gamma(t_0)=p$).

<u>Ex.</u> Поле з минулого <u>Ex.</u> повне. $X=\frac{d}{dt}$ – неповне на $(a,b)\subset\mathbb{R}$, якщо $(a,b)\neq\mathbb{R}$: $\forall$ його інт.тр. має вигляд 

$\gamma(t)=t+C$ і визначена на $(a-C,\ b-C)\neq\mathbb{R}$.

<u>Впр.</u> Якщо $\operatorname{supp} X := \{p \mid X_p\neq 0\}$ міститься у компакті $K\subset M$, то X повне.

Форми на многовиді

M - k-гл. многовид, $k \geqslant 1$, $\dim M = n$.

<u>def.</u> r-гладкою l-формою на M ($r = \overline{0,k-1}$, $l \in \mathbb{Z}_+$) зветься r-гладке $(l,0)$-тензорне поле $\alpha : M \to TM^l_0$ на M.

<u>Rem.</u> Тобто $\forall p \in M$ $\alpha_p : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{l} \to \mathbb{R}$ - l-лінійна форма:

$$\alpha_p(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu w_i, \ldots, v_l) = \lambda \alpha_p(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_l) + \mu \alpha_p(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_l)$$

$\forall i = \overline{1,l}$, $v_1, \ldots, v_i, w_i, \ldots, v_l \in T_pM$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (при $l = 0$ $\alpha_p \in \mathbb{R}$, тобто $\alpha \in C^r(M)$ - ф-ція). У лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^n)$ на U:

$$\alpha|_U = \alpha_{i_1 \ldots i_l} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_l},$$ де $\alpha_{i_1 \ldots i_l} \in C^r(U)$ $\forall i_1, \ldots, i_l = \overline{1,n}$

Тоді $\forall v_1, \ldots, v_l \in T_pM$, $p \in U$, якщо $v_i = v_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $i = \overline{1,l}$, то:

$$\alpha_p(v_1, \ldots, v_l) = \alpha_{i_1 \ldots i_l}(p) dx^{i_1}(v_1) \ldots dx^{i_l}(v_l) = \alpha_{i_1 \ldots i_l}(p) v_1^{i_1} \ldots v_l^{i_l}.$$

Зокрема, $\alpha_{i_1 \ldots i_l}(p) = \alpha_p\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_l}}\right)$.

<u>Ex.</u> $\forall f \in C^{r+1}(M)$ $df : p \mapsto d_pf$ - r-гл. 1-форма, і локально $df|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Rem. Ч-ти. ℓ-форми на M утворюють вект. простір над $\mathbb{R}$ і модуль над $C^\infty(M)$. Будемо його позначати $\mathcal{X}^{\ell,\infty}(M)$.

Рч. Нехай $\alpha \in \mathcal{X}^{\ell,\infty}(M)$. Визначимо відображення

$$\alpha : \underbrace{\mathcal{X}^\infty(M) \times \ldots \times \mathcal{X}^\infty(M)}_{\ell} \to C^\infty(M) : \alpha(X_1, \ldots, X_\ell)(p) := \alpha_p((X_1)_p, \ldots, (X_\ell)_p)$$

$\forall X_1, \ldots, X_\ell \in \mathcal{X}^\infty(M), p \in M$. Це відображення ℓ-лінійне відн. множення на ф-ції з $C^\infty(M)$ (у т.ч. константи $\in \mathbb{R}$), тобто є ℓ-лінійною формою на модулі $\mathcal{X}^\infty(M)$ над $\underline{C}^\infty(M)$.

▷ ℓ-лінійність випливає з побудови: $\forall i = \overline{1, \ell}$, $X_1, \ldots, X_i, Y_i, \ldots, X_\ell \in \mathcal{X}^\infty(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$, $\forall p \in M$:

$$\alpha(X_1, \ldots, fX_i + gY_i, \ldots, X_\ell)(p) = \alpha_p((X_1)_p, \ldots, f(p)(X_i)_p + g(p)(Y_i)_p, \ldots, (X_\ell)_p) =$$
$$= f(p)\alpha_p((X_1)_p, \ldots, (X_i)_p, \ldots, (X_\ell)_p) + g(p)\alpha_p((X_1)_p, \ldots, (Y_i)_p, \ldots, (X_\ell)_p) =$$
$$= (f\alpha(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_\ell) + g\alpha(X_1, \ldots, Y_i, \ldots, X_\ell))(p).$$

Це дійсно відображення у $C^\infty(M)$, бо, якщо у довільних

лок. координатах $(x^1, \dots, x^n)$ на U $\quad X_i|_U = X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $i = \overline{1, l}$ і
$\alpha|_U = \alpha_{i_1 \dots i_l} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_l}$, то з формули у точці випливає
$$\alpha(X_1, \dots, X_l)|_U = \alpha_{i_1 \dots i_l} X_1^{i_1} \dots X_l^{i_l} \in C^r(U). \ \blacktriangle$$
<u>Rem.</u> Виявляється, що відображення з попер. <u>Pr.</u> однозначно визначає форму α:

Рч. Відображення, що кожній формі $\alpha \in \mathcal{X}^{l,q}(M)$ ставить у відповідність

$$\alpha : \underbrace{\mathcal{X}^q(M)\times\ldots\times\mathcal{X}^q(M)}_{l} \to C^q(M) : \alpha(X_1,\ldots,X_l)(p) := \alpha_p((X_1)_p,\ldots,(X_l)_p)$$

$\forall X_1,\ldots,X_l \in \mathcal{X}^q(M),\ p\in M$, є лінійним ізоморфізмом вект. просторів над $\mathbb{R}$ і модулів над $C^q(M)$

$$\mathcal{X}^{l,q}(M) \to \left\{ \begin{matrix} l\text{ - лінійні форми} \\ \text{на модулі } \mathcal{X}^q(M) \text{ над } C^q(M) \end{matrix} \right\}.$$

(раніше перевіримо, що його область значень - саме множина справа).

▶ Структура модуля (і вект. пр-ру при $f=\lambda\in\mathbb{R}$, $g=\mu\in\mathbb{R}$) на правій множині вводиться очевидним чином:

$$(f\alpha+g\beta)(X_1,\ldots,X_l) := f\cdot\alpha(X_1,\ldots,X_l)+g\cdot\beta(X_1,\ldots,X_l) \ (\in C^q(M))$$

$\forall X_1, \dots, X_\ell \in \mathcal{X}^\infty(M)$, де $f, g \in C^\infty(M)$. Комбінація форм $f\alpha + g\beta$ за побудовою переходить саме у таке відобр., тому побудована відповідність є лінійною. Треба перевірити його бієктивність, тобто побудувати обернене. Отже, нехай дана ℓ-лінійна відн. множення на ф-ції з $C^\infty(M)$ форма $\alpha : \underbrace{\mathcal{X}^\infty(M) \times \dots \times \mathcal{X}^\infty(M)}_{\ell} \to C^\infty(M)$.

<u>Рч.1.</u> (існування та властивості полів-продовжень).
$\forall p \in M$ $\forall v \in T_pM$ існує ∞-гладке продовження цього вектора на M, тобто таке поле $X \in \mathcal{X}^\infty(M)$, що $X_p = v$. Більш того, ці продовження можна обирати так, що вони задовольняють наступним умовам:

a. $\forall$ двох продовжень X і $\tilde{X}$ вектора $v \in T_pM$ $\exists$ відкр. $W \ni p$: $X|_W = \tilde{X}|_W$;

в. $\forall$ $v, w \in T_pM$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ продовження $\lambda v + \mu w$ має вигляд $fX + gY$, де $X, Y \in \mathfrak{X}^{\infty}(M)$, $f, g \in C^{\infty}(M)$ і $X_p = v$, $Y_p = w$ (тобто це продовження v і w відп.), $f(p) = \lambda$, $g(p) = \mu$.

▷ Нехай $U \ni p$ – коорд. окіл з лок. коорд ($x^1, \dots, x^n$) і $v = v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$. Застосуємо до U і p Рч. про існування гл. ф-ції Урисона й отримаємо околи V, W і ф-цію $\varphi \in C^{\infty}(M)$. Покладемо для $q \in M$

$$X_q := \begin{cases} \varphi(q) \cdot \left(v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q\right), & q \in U, \\ 0, & q \notin U \end{cases}.$$

$X_p = v$ і

Отримали поле $X \in \mathfrak{X}^{\infty}(M)$ (ан-но іншим побудован з використанням ф-ції Урисона – Впр.): $\forall$ два такі про–

$\underbrace{}_{}^{X \text{ і } \tilde{X}}$

довження на перетині відп. множин W і $\tilde{W}$ дорівнюють $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, оск. ф-ції Урисона $\varphi = 1 = \tilde{\varphi}$ на $W \cap \tilde{W}$, звідки маємо **а.** З лін. комб. $\lambda v + \mu w$ (де $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$) цим способом отримуємо поле

$$q \mapsto \begin{cases} 0, & q \notin U, \\ \varphi(q)\left((\lambda v^i + \mu w^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q\right) = \underbrace{\sqrt{\varphi(q)}\,\lambda}_{f(q)} \cdot \underbrace{\sqrt{\varphi(q)}\left(v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q\right)}_{X_q} + \underbrace{\sqrt{\varphi(q)}\,\mu}_{g(q)} \cdot \underbrace{\sqrt{\varphi(q)}\left(w^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q\right)}_{Y_q}, & q \in U. \end{cases}$$

Визначаючи f, g, X, Y вказаним тут способом на U і 0 за межами U ($\sqrt{\varphi}$ – теж ф-ція Урисона), маємо, що це продовження має вигляд $fX + gY$ як потрібно у **в.** $\blacktriangle$ (Рк.1)

Лм. 2. Якщо $X_i \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ таке, що $\exists$ відкр. $U \ni p$: $X_i|_U = 0$, то $\forall\, X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_l \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ $\alpha(X_1,\dots,X_i,\dots,X_l)(p)=0$ (тут $i=\overline{1,l}$ - довільний)

▷ Побудуємо для U і p ф-цію Урисона $\varphi \in C^\infty(M)$. Тоді $\varphi X_i = 0$ з умови та власт. φ, тому за лінійністю α

$$0=\alpha(X_1,\dots,\varphi X_i,\dots,X_l)(p) = \underbrace{\varphi(p)}_{=1}\cdot\alpha(X_1,\dots,X_i,\dots,X_l)(p).$$ ◁ (Лм. 2)

Отже, нехай $p\in M$ $\forall\, v_1,\dots,v_l \in T_pM$ нехай $X_1,\dots,X_l\in\mathfrak{X}^\infty(M)$ - їхні відп. продовження, що задов. умовам Лм. 1. Покладемо

$$\alpha_p : T_pM\times\dots\times T_pM \to \mathbb{R} : v_1,\dots,v_l \mapsto \alpha(X_1,\dots,X_l)(p)$$

і перевіримо, що $p\mapsto\alpha_p$ - ∞-гл. l-форма, що переходить в α при відображенні з умови. Перевіримо коректність.

(це так за побудовою цього $p\mapsto\alpha_p$)

Нехай $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_l$ - якісь (інші) продовження $v_1, \dots, v_l$ відп., що задов. Рч.1. В силу власт. а., $\forall\, i = \overline{1,l}$ X_i та $\tilde{X}_i$ збіг. на деякій відкр. $W_i \ni p$, тобто $(X_i - \tilde{X}_i)|_{W_i} = 0$. Тоді за Рч.2. та l-лінійністю α

$\alpha(X_1, X_2, \dots, X_l)(p) - \alpha(\tilde{X}_1, X_2, \dots, X_l)(p) = \alpha(X_1 - \tilde{X}_1, X_2, \dots, X_l)(p) = 0$, тобто

$\alpha(X_1, X_2, \dots, X_l)(p) = \alpha(\tilde{X}_1, X_2, \dots, X_l)(p) = [\text{ан-но}] = \alpha(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, X_3, \dots, X_l)(p) = \dots$

$\dots = \alpha(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_l)(p)$, що й демонструє коректність.

Перевіримо l-лінійність α_p: $\forall\, i = \overline{1,l}$, $v_i, w_i \in T_pM$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$ будемо продовжувати $\lambda v_i + \mu w_i$ полем $fX_i + gY_i$, де $f(p) = \lambda$, $g(p) = \mu$, $(X_i)_p = v_i$, $(Y_i)_p = w_i$ у відп. до власт. в. з Рч.1. Тоді за побудовою

$\alpha_p(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu w_i, \dots, v_l) = \alpha(X_1, \dots, fX_i + gY_i, \dots, X_l)(p) =$

$= [\text{лінійність } \alpha] = \big(f\cdot\alpha(X_1,\dots,X_i,\dots,X_\ell) + g\cdot\alpha(X_1,\dots,Y_i,\dots,X_\ell)\big)$
$(p) = \lambda\,\alpha_p(v_1,\dots,v_i,\dots,v_\ell) + \mu\,\alpha_p(v_1,\dots,w_i,\dots,v_\ell)$.

Т.ч., $\alpha_p \in T_pM^\ell_0$ $\forall p$, тобто $p \mapsto \alpha_p$ – ℓ-форма на M (що переходить у α за побудовою). Залишилося перевірити її гладкість. У лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$ на U тепер можна записати розкладення $\alpha|_U = \alpha_{i_1\dots i_\ell}\,dx^{i_1}\otimes\dots\otimes dx^{i_\ell}$, де $\alpha_{i_1\dots i_\ell}(p) = \alpha_p\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{i_\ell}}\right)$ $\forall p\in U$. Як у дов. Рч.1, продовжимо $\forall i=\overline{1,n}$ вектор $\frac{\partial}{\partial x^i}$ полем $e_i \in \mathcal{X}^\infty(M)$: $e_i|_W = \frac{\partial}{\partial x^i}$ (як лок. задане поле), де W – відкр., $p\in W\subset U$ (можна вважати W однаковим для всіх i, перетинаючи їх). Тоді $\forall i_1,\dots,i_\ell = \overline{1,n}$
$\alpha_{i_1\dots i_\ell}|_W = \alpha(e_{i_1},\dots,e_{i_\ell})|_W \in C^\infty(W)$. Зробивши так $\forall p\in U$, отримаємо $\alpha_{i_1\dots i_\ell}\in C^\infty(U)$. Отже, дійсно $(p\mapsto\alpha_p)\in \mathcal{X}^{\ell\,\infty}(M)$. ◭

Ex. $\forall f \in C^{r+1}(M)$, $X \in \mathcal{X}^r(M)$, $p \in M$

$$df(X)(p) = d_p f(X_p) = X_p(f) = X(f)(p),$$

тобто $df(X) = X(f)$.

Rem. Аналогічно можна встановити ізоморфізм між $C^r(M)$-модулями r-гладких (l,m)-тензорних полів на M і $(l+m)$-лінійними відображеннями від l вект. полів і m форм! (Впр.)

def.2. r-гладке (l,m)-тензорне поле на M – це $(l+m)$-лінійне відносно множення на ф-ції з $C^r(M)$ відображення

$$T : \underbrace{\mathcal{X}^r(M) \times \ldots \times \mathcal{X}^r(M)}_{l} \times \underbrace{\mathcal{X}^r(M)^* \times \ldots \times \mathcal{X}^r(M)^*}_{m} \to C^r(M),$$

де $\mathcal{X}^r(M)^* := \mathcal{X}^{1,r}(M)$ – модуль r-гл. 1-форм на M.

Rem. В силу сказаного вище, $\mathcal{X}^{1,r}(M)$ ізоморфний модулю

$C^\infty(M)$ - лінійних функціоналів $\mathcal{X}^\infty(M) \to C^\infty(M)$, звідси таке позначення.

<u>Рем.</u> Далі ми ототожнювати (через канонічний ізоморфізм) $T_pM^l_1$ з простором векторозначних l-лінійних форм на T_pM. Аналогічно будується ізоморфізм модулів ∞-гл. $(l,1)$-тенз. полів T і l-лінійних відн. множення на ф-ції з $C^\infty(M)$ відображень $T: \underbrace{\mathcal{X}^\infty(M) \times \dots \times \mathcal{X}^\infty(M)}_{l} \to \mathcal{X}^\infty(M)$:

$\forall X_1, \dots, X_l \in \mathcal{X}^\infty(M)$, $\alpha \in \mathcal{X}^\infty(M)^*$

$$\alpha(\underset{\text{у новому сенсі}}{T}(X_1, .., X_l)) = \underset{\text{у сенсі def. 2}}{T}(X_1, \dots, X_l, \alpha)$$

Зокрема, $(1,1)$-тенз. поля - це оператори $\mathcal{X}^\infty(M) \to \mathcal{X}^\infty(M)$

<u>Впр.</u> Довести, що це лін. ізоморфізм (вект. просторів над $\mathbb{R}$ і модулів над $C^\infty(M)$).

<u>def.</u> Нехай M, N - k-гл. многовиди, $k \geq 1$, $F \in C^k(M, N)$. Кодиференціалом (pullback) F у точці $p \in M$ зветься

відображення l-лінійних форм ($\forall\, l \in \mathbb{N}$), що спряжене (дуальне) до d_pF, тобто

$$F_p^* : T_{F(p)}N^l_0 \to T_pM^l_0 : \forall \alpha \in T_{F(p)}N^l_0,\ v_1,\dots,v_l \in T_pM$$

$$(F_p^*\alpha)(v_1,\dots,v_l) := \alpha(d_pF(v_1),\dots,d_pF(v_l)).$$

Rem. Оскільки d_pF лінійне, а α l-лінійна, $F_p^*\alpha$ дійсно l-лінійна. Крім того, $\forall\, \alpha, \beta \in T_{F(p)}N^l_0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ з def. легко вивести, що

$$F_p^*(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda F_p^*\alpha + \mu F_p^*\beta,$$

тобто саме F_p^* - лінійне відображення.

def. Кодиференціалом F зветься $F^* : \mathcal{T}^{l,r}(N) \to \mathcal{T}^{l,r}(M)$:

$(F^*\alpha)_p := F_p^*\alpha_{F(p)}\ \forall \alpha \in \mathcal{T}^{l,r}(N),\ p \in M$ (тут $l \in \mathbb{N}$, $r = \overline{0,k-1}$).

Rem. Щоб знайти $F^*\alpha$, достатньо знати $\alpha|_{F(M)}$.

Вправ. Перевірити, що F^* дійсно переводить $\mathcal{T}^{l,r}(N)$ у $\mathcal{T}^{l,r}(M)$ і що якщо локально $\alpha = \alpha_{a_1\dots a_l}\, dy^{a_1} \otimes \dots \otimes dy^{a_l}$, то Чи буде воно лінійним?

$$F^*\alpha = \frac{\partial F^{a_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial F^{a_l}}{\partial x^{i_l}}\, \alpha_{a_1\dots a_l}\, dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_l}$$ у відп. лок. коорд.

Вправ. Показати, що $F^*(df) = d(f \circ F)\ \forall f \in C^{r+1}(N)$.

Rem. З **def.** тенз. добутку тензорів та полів випливає, що $\forall$ r-гладких (l,m)-тенз. поля T і (s,t)-тенз. поля S на M у сенсі **def. 2.** (зокрема, для l-форми і s-форми)

$$T\otimes S(X_1,\ldots,X_{l+s},\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+t}) = T(X_1,\ldots,X_l,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\cdot$$
$$\cdot S(X_{l+1},\ldots,X_{l+s},\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_{m+t}) \quad (\in C^r(M))$$
$$\forall X_1,\ldots,X_{l+s}\in \mathcal{X}^r(M),\ \alpha_1,\ldots,\alpha_{m+t}\in \mathcal{X}^r(M)^*.$$

Аналогічний вигляд має й дія на поля довільного добутку $T_1\otimes\ldots\otimes T_s$ (**Впр.** виписати цю ф-лу хоча б для форм).