# Тензори в точці

Нехай $M$ – $k$-гл. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$, $l, m \in \mathbb{Z}_+$

<u>def.</u> $l$-коваріантним і $m$-контраваріантним тензором в точці $p \in M$ ( $(l,m)$-тензором, тензором валентності $(l,m)$ ) зветься $(l+m)$-лінійне відображення

$$T: \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{l} \times \underbrace{T_pM^* \times \ldots \times T_pM^*}_{m} \to \mathbb{R}$$

<u>Rem</u> Тобто $\forall\, v_1, \ldots, v_l \in T_pM$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T_pM^*$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$\forall\, i = \overline{1,l}$, $w_i \in T_pM$

$$T(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu w_i, \ldots, \alpha_m) = \lambda T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, \alpha_m) + \mu T(v_1, \ldots, w_i, \ldots \alpha_m)$$

і $\forall\, j = \overline{1,m}$, $\beta_j \in T_pM^*$

$$T(v_1, \ldots, \lambda \alpha_j + \mu \beta_j, \ldots, \alpha_m) = \lambda T(v_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) + \mu T(v_1, \ldots, \beta_j, \ldots, \alpha_m).$$

<u>Rem.</u> Очевидно, лінійність зберігається при лінійних комбінаціях відображень: якщо $T, S$ – $(l,m)$-тензори, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то
$\lambda T + \mu S : (v_1, \ldots, \alpha_m) \mapsto \lambda T(v_1, \ldots, \alpha_m) + \mu S(v_1, \ldots, \alpha_m)$ –

тех $(l,m)$-тензор.

Cor. $(l,m)$-тензори у $p$ утворюють векторний простір.

Rem. Він позначається $T_pM^l_m$ або $\underbrace{T_pM^*\otimes\ldots\otimes T_pM^*}_{l}\otimes\underbrace{T_pM\otimes\ldots\otimes T_pM}_{m}$

Ex. $T_pM^0_0$ традиційно ототожнюють з $\mathbb{R}$ (лін. відображення $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) – скаляри.

$T_pM^1_0$ – лінійні функціонали $\alpha: T_pM\to\mathbb{R}$, тобто $\alpha\in T_pM^*$ (1-форми).

$T_pM^l_0$ – $l$-лінійні $\alpha: \underbrace{T_pM\times\ldots\times T_pM}_{l}\to\mathbb{R}$ ($l$-форми).

$T_pM^0_1$ – лінійні $T_pM^*\to\mathbb{R}$, тобто елементи двічі спряженого простору $T_pM^{**}\simeq T_pM$: при цьому канонічному ізоморфізмі вектору $v\in T_pM$ відповідає функціонал від 1-форм $v: T_pM^*\to\mathbb{R}$: $v(\alpha):=\alpha(v)$.

$T_pM^1_1$ – білінійні $A: T_pM \times T_pM^* \to \mathbb{R}$. Цей простір канонічно ізоморфний простору лінійних операторів на $T_pM$: оператору $A: T_pM \to T_pM$ відповідає білінійне $A(v,\alpha) := \alpha(A(v))$ $\forall v \in T_pM,\ \alpha \in T_pM^*$. Впр. Це ізоморфізм.

$T_pM^l_1$ – $(l+1)$-лінійні $T: \underbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}_{l} \times T_pM^* \to \mathbb{R}$. Ан-ко операторам, цей простір ізоморфний простору векторнозначних $l$-лінійних форм $\underbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}_{l} \to T_pM$: якщо $T$ – така форма, то відповідний $T \in T_pM^l_1$, задається умовою $T(v_1, \dots, v_l, \alpha) := \alpha(T(v_1, \dots, v_l))$ $\forall v_1, \dots, v_l \in T_pM,\ \alpha \in T_pM^*$

Впр. Це ізоморфізм.

def. Нехай $T \in T_pM^l_m$, $S \in T_pM^r_s$. Їхнім тензорним добутком зветься $T \otimes S \in T_pM^{l+r}_{m+s}$, що визначений умовою

$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_{l+r}, \alpha_1, \dots, \alpha_{m+s}) := T(v_1, \dots, v_l, \alpha_1, \dots, \alpha_m)\, S(v_{l+1}, \dots, v_{l+r}, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+s})$

$\forall\ v_1, \dots, v_{l+r} \in T_pM,\ \alpha_1, \dots, \alpha_{m+s} \in T_pM^*$.

**Rem.** З $(l+m)$-лінійності $T$ і $(k+s)$-лінійності $S$ випливає $(l+k+m+s)$-лінійність $T\otimes S$, тобто це дійсно $(l+k,\, m+s)$-тензор.

**Pr.** $\forall$ тензорів $T, S, R$ відповідних валентностей і $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(\lambda T + \mu S)\otimes R = \lambda\, T\otimes R + \mu\, S\otimes R$$

$$T\otimes(\lambda S + \mu R) = \lambda\, T\otimes S + \mu\, T\otimes R$$

$$(T\otimes S)\otimes R = T\otimes(S\otimes R)$$

$\triangleright$ Впр. $\triangleleft$

**Rem.** Тобто $\otimes$ білінійний та асоціативний. Зокрема, тому його можна ітерувати (не розставляючи дужки), розглядаючи добутки вигляду $T_1\otimes\ldots\otimes T_k$.
Тенз. добуток $\otimes$ перетворює пряму суму $\bigoplus\limits_{l,m=0}^{\infty} T_pM^l_m$ на асоціативну (градуйовану) алгебру (векторний простір з білінійним добутком) – тензорну алгебру $T_pM$.

**Rem.** Нехай $(x^1, \ldots, x^n)$ – лок. координати в околі $p$ (тобто $\exists$ карта $(U, \varphi)$, $p \in U$, з такими лок. коорд.). Тоді $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ –

базис $T_pM$, а $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ - дуальний до нього базис $T_pM^*$. Розглянемо добутки вигляду $dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_l} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}} \in T_pM^l_m$,

де $i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_m = \overline{1,n}$ - усі можливі набори індексів. За def. тенз. добутку, $\forall\, v_1, \ldots, v_l \in T_pM$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T_pM^*$

$$dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_l} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}} (v_1, \ldots, v_l, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = dx^{i_1}(v_1) \cdot \ldots \cdot dx^{i_l}(v_l) \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}(\alpha_1)}_{\alpha_1\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right)} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{j_m}}(\alpha_m)}_{\alpha_m\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_m}}\right)} \;(=)$$

← згідно з побудовою ізоморфізма $T_pM^{**} \simeq T_pM$

Якщо $v_i = v_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $i = \overline{1,l}$, і $\alpha_i = \alpha_{ij}\, dx^j$, $i = \overline{1,m}$, то це дорівнює (за дуальністю базисів)

$$(=)\; v_1^{i_1} \ldots v_l^{i_l} \alpha_{1 j_1} \ldots \alpha_{m j_m}.$$

<u>Тм.</u> $\left\{dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_l} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}}\right\}^n_{i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_m = 1}$ - базис $T_pM^l_m$.

▷ Доведемо, що $\forall\, T \in T_pM^l_m$ $\exists!$ розкладення $T$ за цією системою:

$$T = T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_l}\, dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}} \quad (*)$$

! Якщо розкл. (*) існує, то $\forall$ набору $k_1,\dots,k_l, s_1,\dots,s_m=\overline{1,n}$ підставимо у $T$ відповідні базисні елементи:

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{k_l}}, dx^{s_1},\dots,dx^{s_m}\right) = T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\underbrace{dx^{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\right)}_{\delta^{i_1}_{k_1}}\dots\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{j_m}}\left(dx^{s_m}\right)}_{\delta^{s_m}_{j_m}} =$$

$= T^{s_1\dots s_m}_{k_1\dots k_l}$, тобто коефіцієнти у (*) визначені однозначно.

$\exists$ Тепер для $T\in T_pM^l_m$ покладемо $T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}:=T\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\dots, dx^{j_m}\right)$ $\forall\, i_1,\dots,j_m=\overline{1,n}$. Тоді в силу полілінійності $T$ $\forall\, v_1,\dots,v_l\in T_pM$, $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in T_pM^*$ з розкладеннями як у попередньому Lem.:

$$T(v_1,\dots,\alpha_m) = v_1^{i_1}\dots\alpha_{m j_m}\,T\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\dots,dx^{j_m}\right) = [\text{попер. Lem}] =$$

$$v_1^{i_1}\,''\,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\dots\alpha_{m j_m}\,''\,dx^{j_m}$$

$$= T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\,dx^{i_1}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_m}}(v_1,\dots,\alpha_m),$$

тобто дійсно $T = T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\,dx^{i_1}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_m}}$ – вірне (*). ▲

Сл. $\dim T_pM^l_m = n^{l+m}$, де $n=\dim M$.

Rem. Коефіцієнти $T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}$ у (*) називають компонентами тензора $T$ (що відповідають $(x^1,\dots,x^n)$).

Rem. Нехай $T$ має розкл. (*) і нехай $(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n)$ - інші лок. координати в околі $p$. Тоді $\{d\tilde{x}^{i_1}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{j_m}}\}$ - тенс базис $T_pM^l_m$. Компоненти $T$ у ньому:

$$\tilde{T}^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}=T\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{i_1}},\dots,d\tilde{x}^{j_m}\right)\overset{\boxed{(*)}}{=}T^{s_1\dots s_m}_{k_1\dots k_l}\,dx^{k_1}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{i_1}}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{\partial}{\partial x^{s_m}}\left(d\tilde{x}^{j_m}\right).$$

Cor. (тензорний закон перетворення)

$$\tilde{T}^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}=T^{s_1\dots s_m}_{k_1\dots k_l}\frac{\partial x^{k_1}}{\partial\tilde{x}^{i_1}}(p)\dots\frac{\partial x^{k_l}}{\partial\tilde{x}^{i_l}}(p)\,\frac{\partial\tilde{x}^{j_1}}{\partial x^{s_1}}(p)\dots\frac{\partial\tilde{x}^{j_m}}{\partial x^{s_m}}(p)\quad(**)$$

$\forall\, i_1,\dots,i_l,j_1,\dots,j_m=\overline{1,n}$

Rem. За допомогою (**) можна визначити $(l,m)$-тензор у $p$ як відображення з множини карт в околі $p$ у $\mathbb{R}^{n^{l+m}}$ (набір компонент) ан-но def дотичного вектора ((**) узагальнює правило заміни координат з цього def.).

# Тензорні розшарування і тензорні поля

$M$ – $k$-гл. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$, $l, m \in \mathbb{Z}_+$.

Def. $(l,m)$–тензорним розшаруванням $M$ зветься (формальне) об'єднання $TM^l_m := \bigcup_{p\in M} T_pM^l_m$. Зокрема, $TM := TM^0_1$ зветься дотичним розшаруванням $M$.

Rem. Ел-ти $TM^l_m$ зручно записувати у вигляді пар:

$$TM^l_m = \{(p,T) \mid p\in M, T \in T_pM^l_m\}$$

Позначимо через $\pi : TM^l_m \to M : (p,T) \mapsto p$ т. зв. канонічну проекцію.

Rem. Нехай $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ – атлас (з гладкої структури) $M$ і $\forall \alpha \in A$ $\varphi_\alpha = (x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$ – відповідні лок. координати. Тоді $\forall$ $(p,T) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ (тобто такого, що $p \in U_\alpha$) $T$ має розклад $(*)$ у відп. базисі. Покладемо $\forall \alpha \in A$

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{n+n^{l+m}} : \left(p, T = T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\, dx^{i_1}_\alpha \otimes\dots\otimes dx^{i_l}_\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}_\alpha}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_m}_\alpha}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \Big(\underbrace{\varphi_\alpha(p)}_{\mathbb{R}^n}, \underbrace{(T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l})}_{\mathbb{R}^{n^{l+m}}}\Big).$$

Це, звісно, біекція. Розглянемо "відображення переходу": $\forall \alpha, \beta \in A$ таких, що $\varnothing \neq \pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) = \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ $(\Leftrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing)$

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)) \to \psi_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)) :$$

$$\left(\text{відкриті у } \mathbb{R}^{n+n^{l+m}}\right) \to \overset{\parallel}{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^{n^{l+m}}} \qquad \overset{\parallel}{\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^{n^{l+m}}}$$

$$\left((x^1,\dots,x^n),(T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l})\right) \overset{\psi_\alpha^{-1}}{\mapsto} \left(\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\dots,x^n),\ T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\, dx_\alpha^{i_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_m}}\right) \mapsto$$

$$\overset{\parallel}{\tilde{T}^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\, dx_\beta^{i_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_m}}}$$

$$\overset{\psi_\beta}{\mapsto} \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x^1,\dots,x^n),\ \left(T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l} \frac{\partial x_\alpha^{i_1}}{\partial x_\beta^{j_1}}(x^1,\dots,x^n) \dots \frac{\partial x_\beta^{j_m}}{\partial x_\alpha^{j_m}}(x^1,\dots,x^n)\right)^n_{i_1,\dots,j_m=1}\right)$$

в силу тензорного закону перетворення (**). Цей вираз лінійний за $T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}$ і має гладкість $k-1$ за $x^1,\dots,x^n$, бо містить частинні похідні $k$-гл. відображень переходу (а також самі ці відображення). Тобто $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ — $(k-1)$-гладкі, і $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ дуже схоже на $(k-1)$-гл. атлас. Але на $TM^l_m$ поки що немає навіть топології!

Рч. Нехай $M$ – деяка множина і $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ – множина пар, що складаються з ел-тів покриття $M$ (тобто $M = \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$) і біекцій $\psi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Нехай при цьому $\forall\, \alpha,\beta\in A$ таких, що $V_\alpha\cap V_\beta \neq \varnothing$ множини $\psi_\alpha(V_\alpha\cap V_\beta)$ і $\psi_\beta(V_\alpha\cap V_\beta)$ відкриті у $\mathbb{R}^n$ і $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1} \in C^k(\psi_\alpha(V_\alpha\cap V_\beta), \psi_\beta(V_\alpha\cap V_\beta))$, де $k\in\mathbb{Z}_+$ або $k=\infty$. Тоді

$$\mathcal{T} := \{U\subset M \mid \forall\alpha\in A\ \psi_\alpha(U\cap V_\alpha) \text{ відкрита в } \mathbb{R}^n\}$$

є топологією на $M$, і, якщо $(M,\mathcal{T})$ хаусдорфовий і з $(\leq)$ зліченною базою, то $M$ – $n$-вимірний многовид, а $\mathcal{A}$ – його $k$-гл. атлас.

▷ Зокрема, з умови випливає, що всі $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$ – гомеоморфізми.

Перевіримо, що $\mathcal{T}$ – топологія:

$\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\subset\mathcal{T} \Rightarrow \forall\alpha\in A\ \psi_\alpha\left(\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma\right)\cap V_\alpha\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\psi_\alpha(U_\gamma\cap U_\alpha)$ відкр. в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

$\{U_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{T} \Rightarrow \forall\alpha\in A\ \psi_\alpha\left(\left(\bigcap_{i=1}^m U_i\right)\cap V_\alpha\right) = \bigcap_{i=1}^m \psi_\alpha(U_i\cap V_\alpha)$ – відкр. в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^m U_i\in\mathcal{T}$.

$\forall \alpha \in A \ \ \psi_\alpha(\varnothing \cap V_\alpha) = \varnothing$ і $\psi_\alpha(M \cap V_\alpha) = \mathbb{R}^n$ відкр. в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \varnothing, M \in T$.
Отже, $(M, T)$ - дійсно топ. простір. При цьому $\forall \alpha \in A$
$\forall \beta \in A \ \ \psi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$ відкр. в $\mathbb{R}^n \Rightarrow V_\alpha$ відкрита. Покажемо,
що $\psi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^n$ - гомеоморфізм. Це він, тобто треба показати,
що це неперервне відкрите відображення.
$\forall$ відкр. $U \subset \mathbb{R}^n \ \forall \beta \in A \ \ \psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(U) \cap V_\beta) = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(U \cap \psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta))$,
бо обидві множини складаються з $\psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(x))$ для $x \in U$ таких, що
$\psi_\alpha^{-1}(x) \in V_\beta$. Оскільки $\psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$ відкр. в $\mathbb{R}^n$, а $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ - гомео-зм,
$\psi_\alpha^{-1}(U)$ відкрита (в топології $M$, а отже і в індукованій топ.
$V_\alpha$). Тобто $\psi_\alpha$ неперервне.
$\forall$ відкр. $U \subset V_\alpha$ $U$ відкр. і в топ. $M$ (бо $V_\alpha$ - відкр.) $\Rightarrow$
$\psi_\alpha(U) = \psi_\alpha(U \cap V_\alpha)$ - відкр. в $\mathbb{R}^n$. Тобто $\psi_\alpha$ відкрите.
Таким чином (за умови хаусдорфовості і (≤) зліч. бази)
$M$ - $n$-вимірний многовид, а $A$ - його атлас з відобр.

переходу $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$. Оскільки вони $k$-гладкі, $A$ - $k$-гладкий. $\blacktriangle$

Впр. $TM^l_m$ з топологією з Рч. хаусдорфовий і має ($\leq$) зліч. базу.

Реч. $TM^l_m$ має структуру $(k-1)$-гладкого $(n+n^{l+m})$-вимірного многовиду.

Впр. Ці топологія і гладка структура не залежать від вибору вихідного атласу $M$ (а лише від топології та гл. структури $M$).

Rem. Зокрема, $TM$ - $2n$-вимірний мн.

При $M = \mathbb{R}^n$ можна взяти вихідний атлас $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ і відповідне $\psi_\alpha$ встановлює дифеоморфізм ($\infty$-гл.) $T(\mathbb{R}^n)^l_m \cong \mathbb{R}^{n+n^{l+m}}$.

Ан-но для відкритих $U \subset \mathbb{R}^n$: $TU^l_m \cong U \times \mathbb{R}^{n^{l+m}}$ (Впр.)

def. $(l,m)$-тензорним полем на $M$ (перерізом $TM^l_m$) зветься $T : M \to TM^l_m$ таке, що $\pi \circ T = id_M$.

Rem. Тобто $\forall\ p \in M$ $T : p \mapsto T_p \in T_p M^l_m$.

Оскільки $T_p M^l_m$ - векторний простір, до перерізів можна застосовувати лінійні операції: якщо $T, S$ – $(l,m)$-тенз. поля на $M$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то

$$(\lambda T + \mu S)_p := \lambda T_p + \mu S_p \in T_p M^l_m$$

визначає $(l,m)$-тенз. поле $\lambda T + \mu S$ на $M$. Більш того, $\forall$ ф-ції $f: M \to \mathbb{R}$ можна визначити $(l,m)$-тенз. поле $fT$ умовою

$$(fT)_p := f(p) T_p \in T_p M^l_m.$$

<u>Сл.</u> $(l,m)$-тензорні поля на $M$ утворюють векторний простір над $\mathbb{R}$ і модуль над кільцем $\mathbb{R}^M$ функцій на $M$.

<u>Зат.</u> Коли поле $T: M \to TM^l_m$ є гладким відображенням? Запишемо його лок. представлення у парі карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$ з нашого опису $TM^l_m$. Для цього $\forall p \in U_\alpha$ розкладемо $T_p$ за відповідним базисом:

$$T_p = T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_l}(p)\, dx^{i_1}_\alpha \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}_\alpha}.$$

Отримаємо ф-ції $T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_l}: U_\alpha \to \mathbb{R}$, $i_1, \dots, j_m = \overline{1,n}$. При цьому

$(\psi_\alpha \circ T \circ \varphi_\alpha^{-1})(x^1, \dots, x^n) = \psi_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n), T_{\varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n)} =$

$= T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_l}(\varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n))\, dx_\alpha^{i_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_m}}) = ((x^1, \dots, x^n), (T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_l} \circ \varphi_\alpha^{-1})(x^1, \dots, x^n)).$

Сл. $\forall r = \overline{0, k-1}$ $(l, m)$ - тенз. поле $T : M \to TM^l_m$ є $r$-гладке

$\Leftrightarrow$ $\forall$ карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ з лок. коорд. $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ усі т. зв.

локальні компоненти $T$ - ф-ції $T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_l} \in C^r(U_\alpha)$; $i_1, \dots, j_m = \overline{1, n}$.

Rem. Зокрема, 0-гладкі поля - неперервні.

Rem. $T|_{U_\alpha} = T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_l}\, dx_\alpha^{i_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_m}}$ - рівність полів на $U_\alpha$.

Тут $dx_\alpha^{i_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_m}} : p \in U_\alpha \mapsto dx_\alpha^{i_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_m}} \in T_p M^l_m$

позначає також лок. поле на $U_\alpha$. Воно $(k-1)$ - гладке (тобто

$\in C^{k-1}(U_\alpha, \pi^{-1}(U_\alpha))$).

Rem. З цього лок. критерію гладкості випливає, зокрема, що

якщо $T, S$ - $r$-гладкі, $f, g \in C^r(M)$ (зокрема, якщо $f = \lambda \in \mathbb{R}$,

$g = \mu \in \mathbb{R}$ - константи), то й $fT + gS$ - $r$-гладке.

Сл. $r$-гладкі $(l, m)$ - тенз. поля на $M$ утворюють векторний простір над $\mathbb{R}$ і модуль над $C^\infty(M)$.

Rem. При $\dim M > 0$ цей простір $\infty$-вимірний ($\forall\, l, m, r$).

Rem. $TM^l_m$ – приклад поняття векторного розшарування.

Ex $\forall f \in C^k(M)$ $\forall p \in M$ $d_p f \in T_pM^* = T_pM^1_0$ і локально $d_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,dx^i$. Тому $df : p \mapsto d_p f$ визначає $(k-1)$-гладке $(1,0)$-тенз. поле (1-форму), що локально задається $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

**def.** Нехай $T$ – ч-гл. $(l,m)$-тенз. поле, а $S$ – ч-гл. $(s,t)$-тенз. поле на $M$. Їх тензорним добутком зветься

$$T\otimes S : M \to TM^{l+s}_{m+t} : p \mapsto (T\otimes S)_p := T_p \otimes S_p$$

**Rem** $\forall p$ $T_p\otimes S_p \in T_pM^{l+s}_{m+t}$, тому $T\otimes S$ – $(l+s, m+t)$-тенз. поле на $M$. Наступні властивості випливають з власт. тенз. добутку у точці, або нескладно перевіряються:

**Pr.** $\forall$ ч-гл. тенз. полів $T, S, R$ на $M$ відп. валентностей, $f, g \in C^{ч}(M)$

1. $T\otimes S$ – ч-гл. тенз. поле на $M$.
2. $(fT+gS)*R = f\,T\otimes R + g\,S\otimes R$ (зокрема, для постійних
3. $T\otimes(fS+gR) = f\,T\otimes S + g\,T\otimes R$   $f=\lambda\in\mathbb{R}$, $g=\mu\in\mathbb{R}$).
4. $(T\otimes S)\otimes R = T\otimes(S\otimes R)$.

▷ Впр. △

Rem. Асоціативність Ч. означає, що тенз. добуток полів можна ітерувати, розглядаючи добутки вигл. $T_1 \otimes \ldots \otimes T_s$ без розставляння дужок. Як і для тензорів у точці, ці власт. означають, що ч-гл. тенз. поля на $M$ для усіх $(l, m) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ (точніше, пряма сума відп. вект. просторів/модулів) утворюють асоціативну (градуйовану) алгебру над $\mathbb{R}$ і над $C^\infty(M)$ – тензорну алгебру $M$.

Зокрема, "базисні" $\underbrace{\text{тензорні}}_{}$ локальні тензорні поля $\{dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}}\}$, що використовувалися вище, є тензорними добутками $(1,0)$- і $(0,1)$-полів на $U$ саме в цьому сенсі.