

1. Топології та коомології алгебраїчних комплексів

Топології (точніше топології та коомології) - це цілий клас алгебраїчних ^{гомотопічних} об'єктів, що ставлять у відповідність топ. простору X (можливо, з певного класу) набір абелевих груп (кілець, модулів, векторних просторів...). Вони будуються за певними спільними правилами та мають спільні властивості, з якими потрібно познайомитися спочатку.

def. 1.1. Лапласовими (фігн., коларисовими) комплексом зв. набір абелевих груп $\{C_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($\{C^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$) та їх гомоморфізмів $\{\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($\{d^k : C^k \rightarrow C^{k+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$) таких, що $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ ($d^{k+1} \circ d^k = 0$) $\forall k \in \mathbb{Z}$. Будемо позначати $C_* = \{C_k, \partial_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($C^* = \{C^k, d^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$):

$$C_* : \dots \xrightarrow{\partial_{k+2}} C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} C_{k-2} \rightarrow \dots$$

$$C^*: \quad \dots \xrightarrow{d^{k-2}} C^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} C^k \xrightarrow{d^k} C^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} C^{k+2} \xrightarrow{d^{k+2}} \dots$$

$C_k(C^*)$ зветься k -тою групою ланцюгів (кочланцюгів) (або (ко)ланцюговою групою) комплексу, $\partial_k(d^k)$ - k -та ^{(ко)гратинг} гомоморфізм, $k \in \mathbb{Z}$. Комплекс зветься скінченним, якщо $C_k \neq \{0\}$ ($C^k \neq \{0\}$) лише для скінченного числа k . Комп. зв. невід'ємним, якщо $C_k = \{0\}$ ($C^k = \{0\}$) для всіх $k < 0$ (а-но можна визначити додатний, недодатний ...).

Рем. Далі всієї за змислування - саме такі позначення.

Лем. 1.2. k -тою групою (ко)циклів (ко)ланцюгового комплексу $C_*(C^*)$ зветься $Z_k(C_*) := \ker \partial_k$ ($Z^k(C^*) := \ker d^k$). k -тою групою (ко)границь $C_*(C^*)$ зв. $B_k(C_*) := \text{Im } \partial_{k+1} = \partial_{k+1}(C_{k+1})$ ($B^k(C^*) := \text{Im } d^{k+1} = d^{k+1}(C^{k+1})$), $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Рем. За власт. $\ker$ та Im , $Z_k(C_*)$, $B_k(C_*) \subset C_k(Z^k(C^*))$.

$B^k(C^*) \subset C^k$ - підгрупи $\forall k$. Оскільки $d^k \circ d^{k+1} = 0$
 ($d^k \circ d^{k+1} = 0$), $B_k(C^*) \subset Z_k(C^*)$ ($B^k(C^*) \subset Z^k(C^*)$) і
 є підгрупами в них $\forall k$. Оскільки групи абелеві, усі
 ці підгрупи нормальні.

def. 1.3. k -та група (короткоточка) (ко)ланцюгового комплексу
 $C_*(C^*)$ для $k \in \mathbb{Z}$ зветься

$$H_k(C^*) := Z_k(C^*) / B_k(C^*) \quad \left(H^k(C^*) := Z^k(C^*) / B^k(C^*) \right).$$

Рет. За побудовою, це теж абелеві групи. Дати означення
 про ланцюгові комплекси, на коланцюгові це все пере-
 носиться зрозумілим чином.

def. 1.4. Морфізми ланцюгових комплексів $C_*^1 = \{C_k^1, d_k^1\}_{k \in \mathbb{Z}}$
 і $C_*^2 = \{C_k^2, d_k^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ зв. парі гомоморфізмів $f_* = \{f_k: C_k^1 \rightarrow$
 $\rightarrow C_k^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (будемо писати $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$) таких, що $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\partial_k^2 \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k^1$ тобто діаграма (взаємні композити, комутативна)

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{k+1}^1} & C_k^1 & \xrightarrow{\partial_k^1} & C_{k-1}^1 & \xrightarrow{\partial_{k-1}^1} & \dots \\ & & \downarrow f_k^1 & & \downarrow f_{k-1}^1 & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial_{k+1}^2} & C_k^2 & \xrightarrow{\partial_k^2} & C_{k-1}^2 & \xrightarrow{\partial_{k-1}^2} & \dots \end{array}$$

(див. нижче)

є комутативною. Лем. Тоді, комплекси і морфізми — це теж категорія!

Лем. 1.1. Нехай $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ — морфізм ланцюгових комплексів. Тоді $f_k(Z_k(C_*^1)) \subset Z_k(C_*^2)$, $f_k(B_k(C_*^1)) \subset B_k(C_*^2)$, а відображення $f_{k*}: H_k(C_*^1) \rightarrow H_k(C_*^2): a + B_k(C_*^1) \mapsto f_k(a) + B_k(C_*^2)$ коректно визначене і є гомоморфізмом груп $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Лем. Оскільки групи абелеві, для суміщення класів за рівнянням використовується адитивні позначення.

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}: a \in Z_k(C_*^1) \Rightarrow \partial_k^2 f_k(a) = f_{k-1}(\partial_k^1 a) = 0$, бо $\partial_k^1 a = 0$, тому $f_k(a) \in Z_k(C_*^2)$.

$$a \in B_k(C_*^1) \Rightarrow \overset{\exists b:}{\forall} a = \partial_{k+1}^1 b, \quad b \in C_{k+1}^1 \Rightarrow f_k(a) = f_k(\partial_{k+1}^1 b) = \partial_{k+1}^2 f_{k+1}(b) \in B_k(C_*^2).$$

Коректність: $a + B_k(C_*^1) \in H_k(C_*^1) \Rightarrow a \in Z_k(C_*^1) \Rightarrow f_k(a) \in Z_k(C_*^2) \Rightarrow f_k(a) + B_k(C_*^2) \in H_k(C_*^2)$ за гомоморфізму.

$$a + B_k(C_*^1) = b + B_k(C_*^1) \Rightarrow \exists c \in C_{k+1}^1 : a - b = \partial_{k+1}^1 c,$$

f_k -зом-зм $\Rightarrow f_k(a) - f_k(b) = f_k(a - b) = f_k(\partial_{k+1}^1 c) = \partial_{k+1}^2 f_{k+1}(c) \in B_k(C_*^2)$ (повторили гомоморфізм вище) $\Rightarrow f_k(a) + B_k(C_*^2) = f_k(b) + B_k(C_*^2).$

Гомоморфізм, бо f_k -зом-зм: $\forall a, b \in Z_k(C_*^1)$

$$f_{k*}((a + B_k(C_*^1)) + (b + B_k(C_*^1))) = f_{k*}(a + b + B_k(C_*^1)) = f_k(a + b) + B_k(C_*^2) = f_k(a) + f_k(b) + B_k(C_*^2) = (f_k(a) + B_k(C_*^2)) + (f_k(b) + B_k(C_*^2)) = f_{k*}(a + B_k(C_*^1)) + f_{k*}(b + B_k(C_*^1)). \quad \triangle$$

лев. 1.5. Товариство, що зом-зм груп гомологій $f_{k*}: H_k(C_*^1) \rightarrow H_k(C_*^2)$, $k \in \mathbb{Z}$ (як у поперед. лв.) індукують морфізми $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$.

Лем. За побудовою, якщо $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ і $g_*: C_*^2 \rightarrow C_*^3$ — морфізми, то $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (g_k \circ f_k)_* = g_{k*} \circ f_{k*}$. Якщо $f_*: C_* \rightarrow C_*$ — тождествний морфізм, тобто $f_k = \text{id}_{C_k}$ $\forall k$, то $f_{k*} = \text{id}_{H_k(C_*)}$.

Лем. 1.6. Алгебраїчного гомоморфізму між морфізмами ланцюгових комплексів f_* і $g_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ зветься набір гомоморфізмів $\{\mathcal{D}_k: C_k^1 \rightarrow C_{k+1}^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ такий, що $\forall k \in \mathbb{Z}$
 $f_k - g_k = \partial_{k+1}^2 \circ \mathcal{D}_k + \mathcal{D}_{k-1} \circ \partial_k^1$ або $\partial_{k+1}^2 \circ \mathcal{D}_k - \mathcal{D}_{k-1} \circ \partial_k^1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \partial_{k+2}^1 & & 1 & \partial_{k+1}^1 & & 1 & \partial_k^1 & & 1 & \partial_{k-1}^1 & & \dots \\
 \dots & \rightarrow & C_{k+1}^1 & \xrightarrow{\quad} & C_k^1 & \xrightarrow{\quad} & C_{k-1}^1 & \rightarrow & \dots & & & \\
 & & \mathcal{D}_k \swarrow & & \downarrow f_k, g_k & & \swarrow \mathcal{D}_{k-1} & & & & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_{k+2}^2} & C_{k+1}^2 & \xrightarrow{\partial_{k+1}^2} & C_k^2 & \xrightarrow{\partial_k^2} & C_{k-1}^2 & \rightarrow & \dots & & &
 \end{array}$$

Лем. 1.2. Якщо $\exists$ алг. гомоморфізм між f_* і g_* , то
 $\forall k \in \mathbb{Z} \quad f_{k*} = g_{k*}$.

► Дійсно, $\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall a + B_k(C_*^1) \in H_k(C_*^1)$ (зокр., $a \in Z_k(C_*^1)$):

$$(f_{k*} - g_{k*})(a + B_k(C_*^1)) = (f_k - g_k)(a) + B_k(C_*^2) = \partial_{k+1}^2 \mathcal{D}_k(a) \pm \mathcal{D}_{k-1}(\underbrace{\partial_k^1 a}_0) + B_k(C_*^2) = \partial_{k+1}^2 \mathcal{D}_k(a) + B_k(C_*^2) = 0 + B_k(C_*^2),$$

$\stackrel{\text{«}B_k(C_*^2)\text{»}}{=}$

тобто $f_{k*}(a + B_k(C_*^1)) = g_{k*}(a + B_k(C_*^1))$. $\triangle$

Лем. Ранг абелевої групи G називають найбільше $n \in \mathbb{Z}_+$ таке, що G містить підгрупу, ізоморфну $\mathbb{Z}^n$, або ∞ , якщо такою n немає. Найбільшого позначають чанк G . Наприклад, чанк $\mathbb{Z}^n = \text{чанк}(\mathbb{Z}^n \times \underbrace{\mathbb{Z}_p}_{\substack{\neq \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^2}}) = n$, чанк $\mathbb{Q} = 1$ (чому?) з операцією додавання.

def. 1.7. k -ті числа Бетті ланцюгового комплексу C_* зб. $b_k := \text{чанк } H_k(C_*)$, $k \in \mathbb{Z}$. Якщо C_* скінченний (або принаймні $H_k(C_*) \neq \{0\}$ лише для скінченної кількості k) і $b_k < \infty \quad \forall k$, то ейлеровою характеристикою C_* зб. $\chi(C_*) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k b_k$.

Пр. 1.3. Якщо ланцюговий комплекс C_* скінченний і $\text{rang } C_k < \infty \ \forall k$, то

$$\chi(C_*) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{rang } C_k.$$

► Впр. 1.1. $\forall$ аделевої гр. G та її підгрупи $K \subset G$ якщо $\text{rang } G < \infty$, то $\text{rang } K < \infty$, і $\text{rang } G/K = \text{rang } G - \text{rang } K$.

Покладемо для ком-зла $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ маємо ізоморфізми $C_k / \text{Im } \partial_k \cong \text{Im } \partial_k = B_{k-1}(C_*)$, тому в силу
вправи (і очевидної інваріантності ранга відносно ізоморфізмів)

$\text{rang } C_k - \text{rang } Z_k(C_*) = \text{rang } B_{k-1}(C_*)$ (вони усі $< \infty$ за умовою і Впр. 1.1.). Тому

$$\begin{aligned} \chi(C_*) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{rang } H_k(C_*) = \left[\text{Впр. 1.1.} \right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \left(\text{rang } Z_k(C_*) - \text{rang } B_k(C_*) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{rang } Z_k(C_*) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} \text{rang } B_k(C_*) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \left(\text{rang } Z_k(C_*) + \text{rang } B_{k-1}(C_*) \right) = \left[\text{зауваж.} \right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \text{rang } C_k, \end{aligned}$$

де усі суми скінченні в силу скінченності C_* . $\triangle$

Лем. $\forall$ групу H і G моноидом $H \rightarrow G$ позн.

$\text{Hom}(H, G)$ це група аделева, G аделева:

$$\forall f, g \in \text{Hom}(H, G) \quad \forall a \in H \quad (f + g)(a) := f(a) + g(a)$$

(перевірте).

аделевої групи G

Лем. 1.3. Для будь-якого коцепного комплексу C_* , $k \in \mathbb{Z}$ визначимо $d^k: \text{Hom}(C_k, G) \rightarrow \text{Hom}(C_{k+1}, G)$:

$$d^k f(a) := f(\partial_{k+1} a) \in G, \text{ де } f \in \text{Hom}(C_k, G) \text{ і } a \in C_{k+1}.$$

Позн $\text{Hom}(C_*, G) := \{ \text{Hom}(C_k, G), d^k \}_{k \in \mathbb{Z}}$ буде називати коцепновим комплексом, що спряжений до C_* .

Лем. 1.4. $\text{Hom}(C_*, G)$ коректно визначений і дійсно є коцепновим комплексом.

$$\triangleright \forall k \in \mathbb{Z}, f \in \text{Hom}(C_k, G) \quad d^k f = f \circ \partial_{k+1}: C_{k+1} \rightarrow G \in$$

роз-знач як композиція роз-знач, тому гіпно визначення
 $d^k: \text{Hom}(C_k, G) \rightarrow \text{Hom}(C_{k+1}, G)$.

$\forall f, g \in \text{Hom}(C_k, G), \forall a \in C_{k+1}$

$$d^k(f+g)(a) = (f+g)(\partial_{k+1}a) = f(\partial_{k+1}a) + g(\partial_{k+1}a) = d^k f(a) + d^k g(a) = (d^k f + d^k g)(a), \text{ тому } d^k - \text{гомоморфізм.}$$

$\forall f \in \text{Hom}(C_k, G), \forall a \in C_{k+2}$

$$(d^{k+1} \circ d^k)(f)(a) = d^k f(\partial_{k+2}a) = f(\underbrace{(\partial_{k+1} \circ \partial_{k+2})}_{=0}(a)) = 0,$$

тому $d^{k+1} \circ d^k = 0$. Отже, це кокомпозитивний комплекс. $\triangle$

Рем. Групи когомологій $\text{Hom}(C_*, G)$ іноді називаються

групами когомологій C_* з коефіцієнтами у G і позначають $H^k(C_*, G) := H^k(\text{Hom}(C_*, G))$.

Впр. 1, 2. Побудувати за морфізмом $f_*: C_*^1 \rightarrow C_*^2$ морфізм кокомпозитивних комплексів $\text{Hom}(C_*^2, G) \rightarrow \text{Hom}(C_*^1, G)$.

Рем. $\text{Hom}(\cdot, G)$ - контраваріантний функтор з категорії кокомпозитивних комплексів у категорію кокомпозитивних комплексів.

(див. нисече).

доб. 1.9. Лапласовий комплекс $L_* = \{L_k, \partial_k^L\}_{k \in \mathbb{Z}}$ звется підкомплексом лапласового $C_* = \{C_k, \partial_k^C\}_{k \in \mathbb{Z}}$, якщо $\forall k \in \mathbb{Z}$ L_k -підгрупа у C_k і $\partial_k^L = \partial_k^C|_{L_k}$ (зокрема, це означає, що $\partial_k^C(L_k) \subset L_{k-1}$).

Реш. Далі будемо обидві ці набори ^{граничних} ком-зв'язів позначати просто через ∂_k : $C_* = \{C_k, \partial_k\}$ і $L_* = \{L_k, \partial_k|_{L_k}\}$, де $L_k \subset C_k$ $\forall k$. Якщо позначати через $i_k: L_k \rightarrow C_k$ відобр. вклячення ($i_k: a \mapsto a \ \forall a \in L_k$), то отримавши діаграму

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & L_k & \xrightarrow{\partial_k|_{L_k}} & L_{k-1} & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow i_k & & \downarrow i_{k-1} & & \\ \dots & \rightarrow & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

що є комутативною, бо $\forall a \in L_k$ $i_{k-1}(\partial_k|_{L_k} a) = \partial_k a = \partial_k(i_k(a))$ $\forall k$ і при цьому i_k -зом-зми, бо L_k -підгрупи.

Сол. 1.1. $i_* = \{i_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in$ морфізм комплексів $L_* \hookrightarrow C_*$
 (у позначеннях як вище), а отже визначені гом-зми
 груп гомологій $i_{k*}: H_k(L_*) \rightarrow H_k(C_*) : a + B_k(L_*) \mapsto$
 $\mapsto i_k(a) + B_k(C_*) = a + B_k(C_*) \quad \forall k$, де $a \in Z_k(L_*)$.

def. 1.10. Якщо L_* - підкомплекс C_* (у позм. як вище).

Факторкомплексом C_* за L_* зветься

$$C_*/L_* := \{C_k/L_k, \partial_k: a + L_k \mapsto \partial_k a + L_{k-1}, a \in C_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Ри. 1.5. C_*/L_* є ланцюговим комплексом, а $j_* := \{j_k:$

$C_k \rightarrow C_k/L_k : a \mapsto a + L_k\}$ - морфізмом $C_* \hookrightarrow C_*/L_*$, отже $\forall k$
 визн. гом-зми груп гомологій $j_{k*}: H_k(C_*) \rightarrow H_k(C_*/L_*)$.

Рем. Подібно j_* складається з канонічних проєкцій

груп C_k на факторгрупи C_k/L_k . Цю модель назвати

канон. пр. C_* на C_*/L_* .

$\Rightarrow \forall k \quad \partial_k: C_k/L_k \rightarrow C_{k-1}/L_{k-1}$ коректно визначений.

$a + L_k = b + L_k \Rightarrow a - b \in L_k \Rightarrow \partial_k a - \partial_k b = \partial_k(a - b) \in$
 $\in L_{k-1} \Rightarrow \partial_k a + L_{k-1} = \partial_k b + L_{k-1}$. Це ром-зм, бо ∂_k -
 ром-зм (ан-но го говедження Рл. 1.1.), і $(\partial_{k-1} \circ \partial_k)(a + L_k) =$
 $= \partial_{k-1}(\partial_k a + L_{k-1}) = (\underbrace{\partial_{k-1} \circ \partial_k}_0) a + L_{k-2} = L_{k-2}$ (не те саме,
 го сун. мас $0 + L_{k-2}$), отже C^*/L^* - дійсно ланц. к-с. $\forall k$
 $\bar{\partial}_k$ - ром-зм (за def. факторизує), і діяє так

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \xrightarrow{\partial_k} & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} & \rightarrow \dots \\
 & \bar{\partial}_k \downarrow & & \partial_k \downarrow & & \bar{\partial}_{k-1} \downarrow & \\
 \dots & \rightarrow & C_k/L_k & \rightarrow & C_{k-1}/L_{k-1} & \rightarrow & \dots
 \end{array}$$

комутативна, бо $\forall a \in C_k \quad (\partial_k \circ \bar{\partial}_k)(a) = \partial_k(a + L_k) =$
 $= \partial_k a + L_{k-1} = (\bar{\partial}_{k-1} \circ \partial_k)(a)$, отже $\bar{\partial}_*: C^* \rightarrow C^*/L^*$ - морфізм. Δ

Рем. Бигр. ром-зм груп гомологій $\forall k$:

$$\bar{\partial}_{k*}: H_k(C^*) \rightarrow H_k(C^*/L^*): a + B_k(C^*) \mapsto \bar{\partial}_k(a) + B_k(C^*/L^*) = (a + L_k) + B_k(C^*/L^*), \text{ де } a \in Z_k(C^*).$$

При цьому вся група має вигляд

$$H_k(C^*/L^*) = \{(a + L_k) + B_k(C^*/L^*) \mid a + L_k \in Z_k(C^*/L^*)\},$$

де $a + L_k \in Z_k(C^*/L^*) \Leftrightarrow L_{k-1} = \partial_k(a + L_k) = \partial_k a + L_{k-1} \stackrel{(\Leftrightarrow)}{=} (0 + L_{k-1})$

$\Rightarrow \partial_k a \in L_{k-1}$ для $a \in C_k$ (закрепа, це так для $a \in Z_k(C^*)$: але позначення менш використовуватимемо аргументи).
 $\partial_k a = 0 \in L_{k-1}$.

Лем. 1.11. Постігровність (не обов'язково абелевих) груп та їх гомоморфізмів

$$\dots \xrightarrow{\varphi_{k+2}} G_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} G_k \xrightarrow{\varphi_k} G_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{k-1}} \dots$$

(монотонна, скінченна або напівскінченна) зветься точкою у k -тому члені (G_k) , якщо $\text{Im } \varphi_{k+1} = \text{Ker } \varphi_k$; точкою, якщо вона точна у кожному члені.

Ел. 1.1. $0 \xrightarrow{\circ} G \xrightarrow{\varphi} H$ точна $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = \text{Im } 0 = \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \varphi$ - ін'ї (монотонізм).

Есл. 1.2. $G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{\circ} 0$ точна $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Im } \varphi = \text{Ker } 0 = H \Leftrightarrow \varphi$ - вич (епіморфізм).

Есл. 1.3. $0 \xrightarrow{\circ} G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{\circ} 0$ точна $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi$ - вич, тобто ізоморфізм, в силу 2 поперед. прикладів.

Впр. 1.3. (коротка точна послідовність). Послідовність

$$0 \xrightarrow{\circ} F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \xrightarrow{\circ} 0$$

точна $\Leftrightarrow H \cong G/\hat{F}$, де $\hat{F} \subset G$ - нормальна підгрупа, що ізоморфна F . ($\Leftarrow$ означає, що якщо це так, то $\exists \varphi, \psi$ такі,

що посл. точна). Реш. Зокрема, для $L_* \subset C_*$ маємо $\forall k$ точні
лапцзовські $H_k(L_*) \xrightarrow{i_*} H_k(C_*) \xrightarrow{j_*} H_k(C_*/L_*)$ з індукованими хом.
Есл. 1.4. Лапцзовий комплекс $C_* = \{C_k, \partial_k\}$ точний у k -малу

члені $\Leftrightarrow B_k(C_*) = \text{Im } \partial_{k+1} = \text{Ker } \partial_k = Z_k(C_*) \Leftrightarrow H_k(C_*) =$
 $= Z_k(C_*)/B_k(C_*) = 0$. Ані-но для коцанцзових k -сів та їх
когомологів.

Th. 1.1. ((гофа) точна послідовність пари комплексів).

Нехай L_* - підкомплекс C_* (у позн. як вище). Тоді $\forall k \in \mathbb{Z}$

коректно визначений гомоморфізм

$$\delta_k: H_k(C_*/L_*) \rightarrow H_{k-1}(L_*) : (a + L_k) + B_k(C_*/L_*) \mapsto \partial_k a + B_{k-1}(L_*),$$

і послідовність

$$\dots \xrightarrow{\delta_{k+1}} H_k(L_*) \xrightarrow{i_{k*}} H_k(C_*) \xrightarrow{j_{k*}} H_k(C_*/L_*) \xrightarrow{\delta_k} H_{k-1}(L_*) \xrightarrow{i_{k-1*}} \dots$$

точна

► Здається, що у заданні δ_k $a \in C_k : \partial_k a \in L_{k-1}$, при цьому $\partial_{k-1}(\partial_k a) = 0$, тобто $\partial_k a \in Z_{k-1}(L_*)$, тому дійсно $\partial_k a + B_{k-1}(L_*) \in H_{k-1}(L_*)$.

Нехай $(a + L_k) + B_k(C_*/L_*) = (b + L_k) + B_k(C_*/L_*) \Rightarrow (a - b) + L_k = (a + L_k) - (b + L_k) \in B_k(C_*/L_*) \Rightarrow \exists c + L_{k+1} \in C_{k+1}/L_{k+1} : (a - b) + L_k = \partial_{k+1}(c + L_{k+1}) = \partial_{k+1} c + L_k \Rightarrow a - b - \partial_{k+1} c \in L_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \partial_k a - \partial_k b = \partial_k (a - b - \partial_{k+1} c) \in B_{k-1}(L_*) \Rightarrow \partial_k a + B_{k-1}(L_*)$
 $= \partial_k b + B_{k-1}(L_*)$, що доводить коректність. Це зм-зм, бо
 ∂_k - зм-зм (ан-но до перер. доведено) ^{можливо, що а має, замінюючи} _{історію співставлення класів}

Точність у $H_k(C_*) \forall k$. $a + B_k(C_*) \in \text{Im } i_{k*} \Rightarrow a \in L_k \Rightarrow$
 $\Rightarrow j_{k*}(a + B_k(C_*)) = (a + L_k) + B_k(C_*/L_*) = L_k + B_k(C_*/L_*) =$
 $= B_k(C_*/L_*)$. Бо $L_k = 0 + L_k = \partial_{k+1}(0 + L_{k+1}) \in B_k(C_*/L_*) \Rightarrow$
 $\Rightarrow a + B_k(C_*) \in \text{Ker } j_{k*}$. (група)

$a + B_k(C_*) \in \text{Ker } j_{k*} \Rightarrow B_k(C_*/L_*) = j_{k*}(a + B_k(C_*)) = (a + L_k) +$
 $+ B_k(C_*/L_*) \Rightarrow a + L_k \in B_k(C_*/L_*) \Rightarrow \exists b + L_{k+1} \in C_{k+1}/L_{k+1}$
 $a + L_k = \partial_{k+1}(b + L_{k+1}) = \partial_{k+1} b + L_k \Rightarrow a - \partial_{k+1} b \in L_k \Rightarrow$
 $\Rightarrow [\partial_{k+1} b \in B_k(C_*)] \Rightarrow a + B_k(C_*) = (a - \partial_{k+1} b) + B_k(C_*) \in \text{Im } i_{k*}$.

Точність у $H_k(C_*/L_*) \forall k$. $(a + L_k) + B_k(C_*/L_*) \in \text{Im } j_{k*} \Rightarrow$

(ан-не забування)

$$\Rightarrow [\text{Rem. функ}] \Rightarrow a \in Z_k(C^*) \Rightarrow \delta_k((a+L_k) + B_k(C^*/L_k)) =$$

$$= \partial_k a + B_{k-1}(L_k) = B_{k-1}(L_k) \Rightarrow (a+L_k) + B_k(C^*/L_k) \in \text{Ker } \delta_k.$$

$$(a+L_k) + B_k(C^*/L_k) \in \text{Ker } \delta_k \Rightarrow [\text{ан-функ}] \Rightarrow B_{k-1}(L_k) = \partial_k a + B_{k-1}(L_k)$$

$$\Rightarrow \partial_k a \in B_{k-1}(L_k) \Rightarrow \exists b \in L_k : \partial_k a = \partial_k b \Rightarrow (a+L_k) + B_k(C^*/L_k) =$$

$$= ((a-b)+L_k) + B_k(C^*/L_k), \quad a-b \in Z_k(C^*) \quad (\text{бо } \partial_k(a-b) = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+L_k) + B_k(C^*/L_k) \in \text{Im } \delta_{k+1}.$$

Повинність у $H_{k-1}(L_k) \forall k$ $a + B_{k-1}(L_k) \overset{\in \text{Im } \delta_k}{\Leftrightarrow} \exists b \in C_k :$

(ан-не забування)

$$a = \partial_k b \Leftrightarrow a \in B_{k-1}(C^*) \Leftrightarrow B_{k-1}(C^*) = a + B_{k-1}(C^*) =$$

$$= i_{k*}(a + B_{k-1}(L_k)) \Leftrightarrow a + B_{k-1}(L_k) \in \text{Ker } i_{k*}. \quad \triangle$$

Вп. 1.6 Нехай для $\ell=1,2$ L_k^ℓ - підкомплекс у $C_k^\ell =$

$$= \{C_k^\ell, \partial_k^\ell\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \text{тобто } L_k^\ell = \{L_k^\ell \subset C_k^\ell, \partial_k^\ell|_{L_k^\ell}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \text{ де}$$

L_k^ℓ - підгрупа в C_k^ℓ , і $\partial_k^\ell(L_k^\ell) \subset L_{k-1}^\ell \forall k$. Нехай

$f_* : C_*^1 \rightarrow C_*^2$ - морфізм комплексів такий, що

$f_*(L_*^1) \subset L_*^2$, тобто $f_k(L_k^1) \subset L_k^2 \forall k$ (де $f_* = \{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$)

$\forall k \in \mathbb{Z}$ визначимо g_k як факторизоване f_k :

$g_k: C_k^1/L_k^1 \rightarrow C_k^2/L_k^2: a + L_k^1 \mapsto f_k(a) + L_k^2$ (аналогічно до того, як f_k факторизували ∂_k при побудові C_*/L_*).

Тоді g_k - коректно визначені гол-зми груп $\forall k$,

$g_* := \{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ - морфізм комплексів $C_*/L_*^1 \rightarrow C_*/L_*^2$,

зокрема, визначені індуковані гол-зми $g_{k*}: H_k(C_*/L_*^1) \rightarrow H_k(C_*/L_*^2) \forall k$, і діаграма з точними рядками з Тн.1.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \delta_{k+1}^1 & \xrightarrow{\quad} & H_k(L_*^1) & \xrightarrow{i_{k*}^1} & H_k(C_*^1) & \xrightarrow{j_{k*}^1} & H_k(C_*/L_*^1) & \xrightarrow{\delta_k^1} & H_{k-1}(L_*^1) & \xrightarrow{i_{k-1*}^1} & \dots \\ & & \downarrow (f_k|L_k^1)* & & \downarrow f_{k*} & & \downarrow g_{k*} & & \downarrow (f_{k-1}|L_{k-1}^1)* & & \\ \delta_{k+1}^2 & \xrightarrow{\quad} & H_k(L_*^2) & \xrightarrow{i_{k*}^2} & H_k(C_*^2) & \xrightarrow{j_{k*}^2} & H_k(C_*/L_*^2) & \xrightarrow{\delta_k^2} & H_{k-1}(L_*^2) & \xrightarrow{i_{k-1*}^2} & \dots \end{array}$$

(з очевидними позначеннями $i_{k*}^l, j_{k*}^l, \delta_k^l$) комутативна.

Рез. Тоді $\{f_k|L_k^1\}_{k \in \mathbb{Z}}$ утворюють морфізм $L_*^1 \rightarrow L_*^2$,

до морфізму $\in f_*$ (Впр.), отже визначені і індуковані гол-зми груп гомологій $(f_k|L_k^1)* \forall k$.

► Ці перевірки робляться за означеннями як вище (Кор.)

Перевіримо комутативність: $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\forall a + B_k(L_*^1) \in H_k(L_*^1) \quad (\bar{i}_{k*}^2 \circ (f_k|_{L_k^1})_*)(a + B_k(L_*^1)) = \bar{i}_{k*}^2(f_k(a) + B_k(L_*^2)) = f_{k*}(a) + B_k(C_*^2) = f_{k*}(a + B_k(C_*^1)) = (\bar{f}_{k*} \circ \bar{i}_{k*}^1)(a + B_k(L_*^1));$$

$$\forall a + B_k(C_*^1) \in H_k(C_*^1) \quad (\bar{g}_{k*}^2 \circ f_{k*})(a + B_k(C_*^1)) = \bar{g}_{k*}^2(f_k(a) + B_k(C_*^2)) = (f_k(a) + L_k^2) + B_k(C_*^2/L_*^2) = g_{k*}((a + L_k^1) + B_k(C_*^1/L_*^1)) = (\bar{g}_{k*} \circ \bar{f}_{k*}^1)(a + B_k(C_*^1));$$

$$\forall (a + L_k^1) + B_k(C_*^1/L_*^1) \in H_k(C_*^1/L_*^1) \quad (\bar{\sigma}_k^2 \circ g_{k*})((a + L_k^1) + B_k(C_*^1/L_*^1)) = \bar{\sigma}_k^2((f_k(a) + L_k^2) + B_k(C_*^2/L_*^2)) = (\partial_k^2 \circ f_k)(a) + B_{k-1}(L_*^2) = [f_* - \text{морфізм}] = (f_{k-1} \circ \partial_k^1)(a) + B_{k-1}(L_*^2) = (f_{k-1}|_{L_{k-1}^1})(\partial_k^1 a + B_{k-1}(L_*^1)) = (f_{k-1}|_{L_{k-1}^1} \circ \bar{\sigma}_k^1)((a + L_k^1) + B_k(C_*^1/L_*^1)). \quad \triangle \quad \underbrace{L_{k-1}^1}_{(L_{k-1}^1)_*}$$

Рч. 1.7. (5-лемма). Кожна частинна діаграма з груп

та їх ком-зв'язь комутативна, її рядки мають, k, m - ізо-
морфізми (можливо bij), j - епіморфізм (звч), n - мономорфізм (inj):

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \xrightarrow{i} E \\ j \downarrow & f' \downarrow & k \downarrow & g' \downarrow & l \downarrow & h' \downarrow & m \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' \xrightarrow{i'} E' \end{array}$$

Потім l - менш ізоморфізм. Реш. Тут знову не зручні побудовані
абелеві, але ми, як завжди, використовуємо стандартні позначення.
► Перевіримо, що l - мономорфізм. Нехай $l(c) = 0$ для $c \in C$.

Потім $0 = h'(l(c)) = m(h(c)) \Rightarrow [m - \text{bij}] \Rightarrow h(c) = 0 \Rightarrow [мономорф] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists b \in B : c = g(b) \Rightarrow 0 = l(g(b)) = g'(k(b)) \Rightarrow [мономорф] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists a' \in A' : f'(a') = k(b) \Rightarrow [j - \text{звч}] \Rightarrow \exists a \in A : j(a) = a',$

$k(b) = f'(j(a)) = k(f(a)) \Rightarrow [k - \text{bij}] \Rightarrow b = f(a), c = g(b) =$

$= g(f(a)) = 0$ в силу мономорфії. Точн., $l - \text{inj}$.

Перевіримо, що l - епіморфізм. Нехай $c' \in C'$. Потім $m - \text{bij} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists d \in D : h'(c') = m(d) \Rightarrow [мономорф] \Rightarrow h(i(d)) = i'(m(d)) =$

$= i'(h'(c')) = 0 \Rightarrow [n - \text{ing}] \Rightarrow i(d) = 0 \Rightarrow [\text{monicomb}] \Rightarrow \exists c \in C$
 $d = h(c), h'(\ell(c)) = m(h(c)) = m(d) = h'(c') \Rightarrow h'(\ell(c) - c') = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow [\text{monicomb}] \Rightarrow \exists b' \in B' : g'(b') = \ell(c) - c' \Rightarrow [k - \text{ing}] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists b \in B : k(b) = b', \ell(g(b)) = g'(k(b)) = g'(b') = \ell(c) - c' \Rightarrow$

$\Rightarrow c' = \ell(c - g(b))$. Тил. з. ℓ - зур. Рем. Бен "меню" гверна
 збурмо diagram chasing - переслідування (або пошук) по діаграмі.

Впр. 14. (3×3 - лемма). Решаю наступна діаграма з групи
 ма їх ком-зуб комутативна, а її стовпчики точні. Дво
два пункти або два верхніх рядки точні, то точні і
третій:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A'' & \rightarrow & B'' & \rightarrow & C'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Рем. Значайно, в силу симетричності впрне її наступна:

якщо рядки $\bar{u}$ перші два або останні два стовпчиків точні, то точний $\bar{u}$ третій.

Впр. 1.5. (лема про зв'яз). Нехай послідовна діаграма з абелевих груп та їх im -зв'яз комутативна, а її рядки точні:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & A & \xrightarrow{\quad} & B & \xrightarrow{\quad} & C & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 & \downarrow f & \downarrow g & \downarrow h & & & & \swarrow \text{"зв'яз"} \\
 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{\quad} & B' & \xrightarrow{\quad} & C' & \xrightarrow{\quad} 0
 \end{array}$$

Тоді існує точна послідовність (можливо $\exists$ sign. зв'яз)

$$\text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } g \rightarrow \text{Ker } h \rightarrow A' / \text{Im } f \rightarrow B' / \text{Im } g \rightarrow C' / \text{Im } h$$

("Коядра: $\text{Coker } f$, $\text{Coker } g$, $\text{Coker } h$).

Спробуйте ввести Th. 1.1 з цього твердження.